

Оптимизация рационального использования ресурсов в фермерском хозяйстве

Аннотация:

В статье рассматриваются вопросы развития фермерского хозяйства на основе математического моделирования. Показаны преимущества методов квазилинейного программирования в оптимизации рационального использования ресурсов в фермерском хозяйстве.

Ключевые слова:

Линейное программирование; квазилинейное программирование; оптимизация; математическое моделирование; функция релаксации; фермерское хозяйство.

Фермерские хозяйства в России являются небольшими по размеру организациями. В распоряжении фермера находятся незначительные размеры ресурсов и объемов производимой продукции. Так же как и для больших предприятий, для таких форм хозяйствования достаточно актуальной является задача оптимального распределения ограниченных производственных ресурсов. На конкретном примере одного из фермерских хозяйств в России проведено исследование модели Оудли по планированию фермы как частично-целочисленную линейную задачу с элементами динамики [1]. Нами осуществлена определенная модификация этой модели с целью расширения возможностей оптимизации. На основе новых инструментов моделирования [2]. Такие модели на наш взгляд могут сыграть важную роль на данном этапе, когда проводятся исследования различных форм хозяйствования. Однако, принимая во внимание недостатки линейных моделей можно с уверенностью сказать, что требуется разработка моделей, учитывающих ситуации на рынке. Одним из подходов в данном случае может быть принят метод оптимизации пропорции в хозяйстве. С этой целью весьма успешно может быть использовано аппарат квазилинейного программирования. Нами разработаны модели, устанавливающие определенное равновесие в фермерском хозяйстве. Рассмотрим случай, когда фермер специализирует в производстве зерновых культур.

В фермерском хозяйстве имеется ограниченный размер пашни, один самоходный зерноуборочный комбайн и по одному колесному и гусеничному трактору. В случае необходимости фермер может взять в аренду грузовик, а также нанять работников на сезонные работы. Кроме того, недостающую технику можно купить или приобрести по лизингу. Ставится задача оптимизации структуры посевной площади с максимальной прибылью от реализации продукции с условием соблюдения в процессе организации и технологии, необходимых агротехнических требований, сроков проведения основных технологических операций выращивания зерновых культур. В качестве исходной информации принимаются следующие данные: размер пашни, затраты времени на 1 га, затраты труда, затраты на эксплуатацию и приобретение единицы техники, расходы по найму работников и аренды техники,

доход от реализации продукции.

Введем следующее обозначение переменных: $x_j - x_{j0}$ – сельскохозяйственные культуры в расчете на разные способы производства, x_{j1} – пар. В качестве целочисленных переменных введено количество единиц техники: x_{j2} – количество колесных тракторов; x_{j3} – гусеничных тракторов, x_{j4} – количество зерноуборочных комбайнов, x_{j5} – работников, чел. На втором этапе решения задачи вводятся дополнительные переменные z_t – количество арендованного машинного времени в t -й период.

График работы фермера:

5 мая – 10 мая – сев ячменя;
5 мая – 10 мая – сев овса.
15 мая – 20 мая – сев гречихи;
15 мая – 20 мая – пар. 26 июня – 3 августа – уборка озимой пшеницы;
26 июля – 3 августа – уборка озимой ржи;
5 августа – 10 августа – вспашка (пшеница);
5 августа – 10 августа – вспашка (озимая рожь);
5 августа – 10 августа – уборка (ячмень);
5 августа – 10 августа – уборка (овес).
15 августа – 20 августа – вспашка (ячмень);
15 августа – 20 августа – вспашка (овес);
25 августа – 30 августа – вспашка (гречиха).

Рассмотрим постановку линейной задачи оптимизации посевных площадей фермерского хозяйства.

Определить максимум следующей целевой функции $F(x)$:

$$F(x) = \sum_{s \in S} c_s x_s \leq - \sum_{i \in I} c_i x_i - \overline{c_t} y_t - \sum_{t \in T} c_t z_t,$$

при условиях:

1) ограниченности посевных площадей:

$$\sum_{s \in S} x_s \leq b;$$

2) ограничения по технологическим операциям сельскохозяйственных культур по видам техники в определенные сроки:

$$\sum_{s \in S} a_{sti} x_s \leq \sum_{i \in I} b_{it} x_i + \sum_{t \in T} c_t z_t \quad (i \in I, t \in T);$$

3) ограничения по трудовым ресурсам:

$$\sum_{s \in S} k_i a_{sit} x_s \leq b_{it} y_t + \sum_{t \in T} c_t z_t \quad (t \in T);$$

4) требования по обязательному производству продукции:

$$\sum_{s \in S} a_{is} x_s \geq b_i, \quad i \in I_0;$$

5) не отрицательности и целочисленности переменных:
 $x_s \geq 0, (s \in S), x_i \geq 0, (i \in I), y_t \geq 0, z_t \geq 0, (t \in T).$

Обозначения индексов и множеств:

s – номер сельскохозяйственной культуры, $s \in S$, где S – множество всех видов сельскохозяйственных культур и пара;

i – номер вида сельскохозяйственной техники, $i \in I$, где I – множество всех видов сельскохозяйственной техники (тракторов и комбайнов);

t – номер периода времени для выполнения сезонных сельскохозяйственных работ, $t \in T$, где T – множество всех периодов;

I_0 – множество ограничений по планам.

Искомые переменные:

x_s – площадь s -й сельскохозяйственной культуры, пара, (га);
 z_t – количество арендованного машинного времени в t -й период;

x_i – количество сельскохозяйственной техники (шт.);

\bar{c} – заработная плата работника, у.е.;

c_i – затраты на приобретение и эксплуатацию единицы i -го вида сельскохозяйственной техники (у.е.);

a_{is} – выход продукции с единицы площади;

c_s – стоимость товарной продукции с 1 га s -й культуры, у.е.;

b – площадь пашни в хозяйстве, га;

b_{it} – доступное время на одну единицу i -го вида техники в t -й период, ч (коэффициента погодности и продолжительности периода в часах);

a_{sit} – затраты времени на обработку 1 га s -й культуры или пара i -м видом техники в t -й период (ч.);

k_i – коэффициент, обозначающий численность работников, обслуживающих i -й вид сельскохозяйственной техники.

Подставляя конкретные данные, получим числовую экономико-математическую модель.

В процессе решения задачи не предусматривалось условие целочисленности переменных. Однако для фермерского хозяйства учет этого фактора имеет существенное значение.

Это объясняется тем, что в фермерском хозяйстве используется небольшое количество техники стоимость, которой занимает в удельном весе финансовых ресурсов значительную часть. Поэтому изменение на единицу техники существенно отражается в финансовом положении хозяйства: что делает нецелесообразным округление полученных величин. С этой целью вводятся дополнительные ограничения по целочисленности переменных. В разработанной математической модели учитывается возможность снятия напряженности ограничений задачи. В этом случае нами предлагается решить задачу в другой постановке. На наш взгляд достаточно эффективно можно использовать аппарат квазилинейного программирования в наиболее напряженных ограничениях. На первом этапе строится линейная задача оптимизации. На втором этапе осуществляется корректировка показателя с целью достижения оптимальных пропорций. Необходимость корректировки уста- навливается с помощью решения двойственной задачи линейного программирования.

Рассмотрим две постановки задачи. Первый вариант

постановки предусматривает принятие в качестве целевой функции максимум прибыли при условии достижения согласованности ресурсных ограничений. По второму варианту снимается напряженность ограничений по производству продукции при минимизации затрат.

Целевые функции:

Затраты:

$$F_1(x) = 400x_1 + 700x_2 + 380x_3 + 500x_4 + 350x_5 + 490x_6 + 320x_7 + 480x_8 + 300x_9 + 460x_{10} + 450x_{12} + 500x_{13} + 550x_{14} + 300x_{15} \rightarrow \max.$$

Прибыль:

$$F_2(x) = 190x_1 + 220x_2 + 160x_3 + 180x_4 + 140x_5 + 180x_6 + 120x_7 + 140x_8 + 90x_9 + 110x_{10} - 450x_{12} - 500x_{14} - 550x_{15} \rightarrow \max.$$

Допустим, что фермер располагает 140 га пашни, один самоходный комбайн, и по одному самоходному и гусеничному трактору. Фермер имеет возможность арендовать грузовой автомобиль. В случае необходимости он может приобрести недостающую технику, а также нанимать работников в напряженные периоды.

1) ограниченности пашни и пара:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} + x_{11} \leq 140;$$

ограниченности использования техники для выполнения сезонных работ в определенные сроки; по видам:

колесные трактора:

2) сев ячменя и овса в 1-м периоде:

$$0,8x_5 + x_6 + 0,83x_7 + x_8 \leq 45x_{12};$$

3) сев гречихи во 2-м периоде:

$$0,7x_9 + 0,8x_{10} \leq 45x_{12};$$

4) уборка озимых в 3-м периоде:

$$2x_1 + 2,2x_2 + 1,8x_3 + 2x_4 \leq 63x_{12}$$

5) уборка ячменя и овса в 4-м периоде:

$$1,6x_5 + 1,8x_6 + 1,2x_7 + 1,4x_8 \leq 48x_{12};$$

6) уборка гречихи в 5-м периоде:

$$2,7x_9 + 2,2x_{10} \leq 40x_{12};$$

7) сев озимых по пару в 6-м периоде:

$$0,75x_{11} \leq 40x_{12};$$

гусеничные тракторы:

8) вспашка пара в 2-м периоде:

$$1,6x_{11} \leq 45x_{13};$$

9) вспашка зяби в 4-м периоде (после уборки озимых):

$$1,45x_1 + 1,5x_5 + 1,45x_9 + 1,5x_{10} \leq 48x_{13};$$

10) вспашка зяби в 5-м периоде (после уборки яровых):

$$1,5x_5 + 1,6x_6 + 1,45x_7 + 1,5x_8 \leq 40x_{13};$$

11) вспашка зяби в 6-м периоде (после уборки гречихи):

$$1,45x_9 + 1,5x_{10} \leq 40x_{13};$$

комбайны:

12) раздельная уборка озимых в 3-м периоде:

$$1,9x_1 + 2x_2 + 1,6x_3 + 1,8x_4 \leq 63x_{14};$$

13) уборка ячменя и овса в 4-м периоде:

$$7,5x_5 + 1,6x_6 + 1,6x_7 + 1,8x_8 \leq 48x_{14};$$

14) раздельная уборка гречихи в 5-м периоде:

$$2x_9 + 2,2x_{10} \leq 40x_{14};$$

Следующая группа ограничений введена для определения численности работников:

15) сев в 1-м периоде:

$$1,8x_7 + 2x_8 \leq 45x_{15};$$

16) сев гречихи и вспашка пара во 2-м периоде:

$$1,4x_9 + 1,6x_{10} + 1,6x_{11} \leq 45x_{15};$$

17) уборка озимых в 3-м периоде:

$$6x_1 + 7x_2 + 5,4x_3 + 6x_4 + 1,7x_5 + 1,8x_6 \leq 63x_{15};$$

18) вспашка зяби после озимых и уборка яровых в 4-м периоде:

$$1,45x_1 + 1,5x_2 + 1,45x_3 + 1,5x_4 + 4,5x_5 + 4,8x_6 + 4,2x_7 + 4,3x_8 \leq 48x_{15};$$

19) вспашка зяби после яровых и уборка гречихи в 5-м периоде:

$$1,45x_5 + 1,6x_6 + 1,45x_7 + 1,5x_8 + 6x_9 + 7x_{10} \leq 40x_{15};$$

20) вспашка зяби гречихи и сев озимых зерновых в 5-м периоде:

$$1,5x_7 + 1,6x_8 + 1,45x_9 + 1,5x_{10} \leq 40x_{15};$$

21) технологические условия выращивания культур, связанных с севооборотом:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - x_{11} \leq 0;$$

22)–26) требования по производству продукции:

$$40x_1 + 50x_2 \geq 2000;$$

$$30x_3 + 40x_4 \geq 200;$$

$$35x_5 + 45x_6 \geq 1424;$$

$$30x_7 + 35x_8 \geq 342;$$

$$30x_9 + 35x_{10} \geq 300;$$

27) условия неотрицательности переменных:

$$x_j \geq 0, j = 1, 15.$$

На первом этапе проведены расчеты по задаче линейного программирования с целью определения необходимой техники по разным критериям оптимизации. Структура площадей находящихся по критерию максимума прибыли в распоряжении фермера определилась следующим образом:

$$x_1=0, x_3=x_5=x_7=x_9=0, x_2=40, x_4=5, x_6=31,65, x_8=9,77, x_{11}=45.$$

На этом этапе проведены расчеты при достаточно напряженных плановых заданиях по производству продукции:

$$b_{24} = 2000, b_{25} = 200, b_{26} = 1424, b_{27} = 342, b_{28} = 300.$$

Решение задачи оптимизации на последующих этапах предусматривает округление переменных по количеству необходимой фермеру техники и рабочей силы. С этой целью в модель вводятся дополнительные ограничения:

$$\overline{x_{12}} = 1, \overline{x_{13}} = 2, \overline{x_{14}} = 2, \overline{x_{15}} = 6.$$

На третьем этапе решаются линейная задача и обобщенная задача квазилинейного программирования, с

фиксированием количества техники.

Предварительно определяются двойственные оценки продуктов. Данные табл. 1 свидетельствуют о завышенности запланированных фермером плановых требований. Это говорит о необходимости корректировки первоначально заданных объемных показателей по производству продукции.

Результаты расчетов показали значительную напряженность запланированных фермером заданий. Оценка проводилась по минимуму совокупности производственных затрат в фермерском хозяйстве. Известно, что оценить напряженность ограничения необходимо с помощью определенного показателя сравнения.

Таблица 1

Цена реализации и оценки сельскохозяйственной продукции, у.е. на 1 ц

	Цена	Оценка
Пшеница	15	42,12
Рожь	14	51,32
Ячмень	12	30,30
Овес	13	35,15
Гречиха	10	32,88

Таким показателем в процессе анализа продуктов нами часто принимается цена реализации. Согласно тому, что оценка определяет эффективность заданного требования производства, разность цены и оценки является показателем оптимальности построенной задачи.

На рис. 1 довольно успешно продемонстрирован ход вычисления решения задачи квазилинейного программирования. Поиск оптимума осуществляется с помощью одного из алгоритмов приведенного в работе [2].

На рис. 1 заметно, что от итерации к итерации решение приближается к равновесному.

На рис. 2 изображено множество Парето для двух критериев:

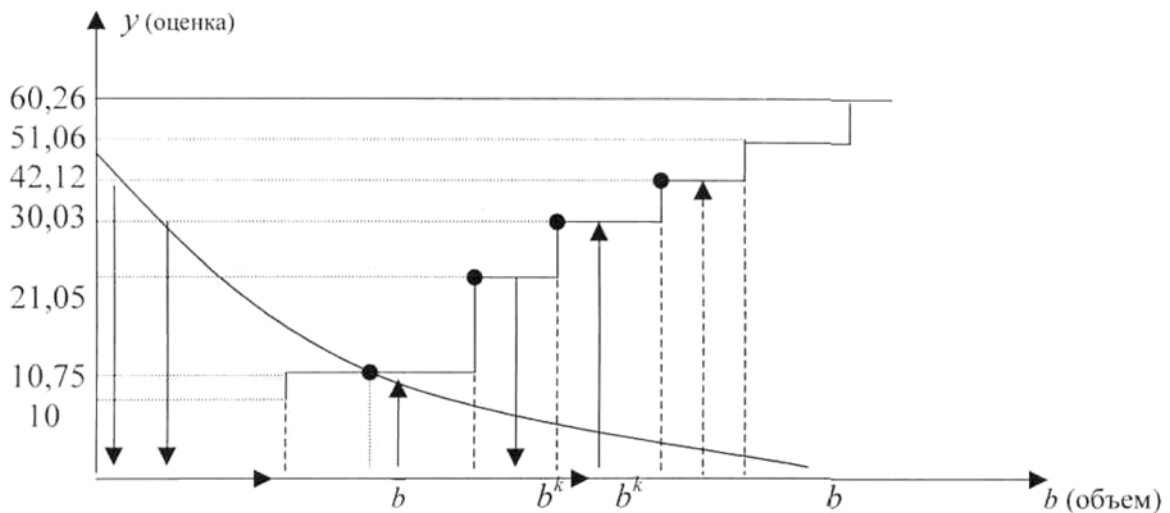


Рис. 1. График зависимости двойственной оценки y от правой части b и функции $b(y)$.
Схема итерационного процесса.

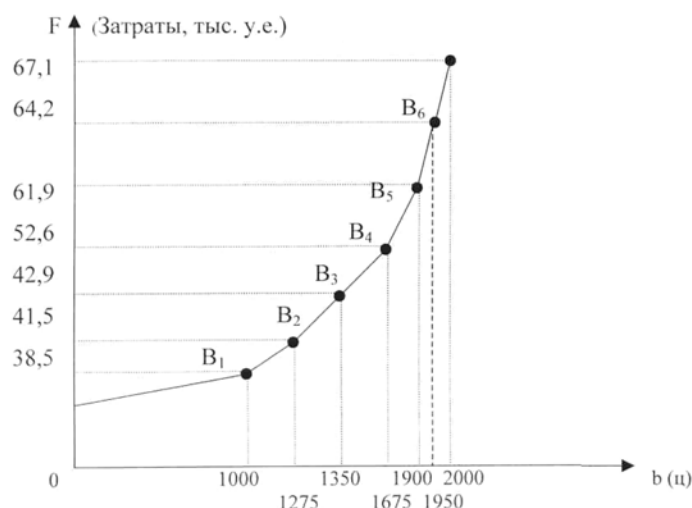


Рис. 2. Взаимосвязь критериев оптимизации.

$F \rightarrow \min$ (минимум производственных затрат),
 $b \rightarrow \max$ (максимум производственных затрат). Точки на ломанной кривой означают критические точки соответствующие изменению базиса решения задачи линейного программирования.

Информация об этой кривой является весьма важной для принятия решения фермером в определении оптимальных объемов производимой продукции.

Безусловно, можно решать задачу в итеративном режиме. Пользуясь этой функциональной зависимостью можно определить оптимальный объем продукции если использовать определенный показатель сравнения.

Аппарат квазилинейного программирования осуществляет эту процедуру весьма успешно. Построению функциональной зависимости изображенной на рис.2 соответствуют данные в табл. 2.

Таблица 2

Критерии оптимизации и оценки ограничений

k	$F_1^k(x_j), j = \overline{1, n},$ у.е.	$b(y^k),$ ц	$y^k,$ (у.е./ц)
0		-	-
1	38574	1000	10,00
2	38828	1025	10,75
3	41516	1275	10,75
4	41871	1300	21,05
5	42923	1350	21,05
6	43604	1375	30,03
7	52694	1675	30,03
8	53477	1700	42,12
9	61901	1900	42,12
10	62964	1925	51,06
11	64240	1950	51,06
12	65613	1975	60,26
13	67119	2000	60,26

Таблица 3

Структура решения ЗЛП в критических точках

k	о	1	2	3	4	5	6
b	-	1000	1025	1275	1300	1350	1375
y	-	10	10,75	10,75	21,05	21,05	30,3
x ₁	-	25	25,62	31,87	32,5	33,75	32,28
x ₂	-	-	-	-	-	-	1,67
x ₃	6,66	6,66	6,66	6,66	5,82	0,82	-
x ₄	-	-	-	-	0,62	4,37	5
x ₅	40,6	40,68	40,68	40,68	40,68	40,68	40,68
x ₆	-	-	-	-	-	-	-
x ₇	11,34	11,4	11,4	11,4	11,4	11,4	11,4
x ₈	-	-	-	-	-	-	-
x ₉	10	10	10	10	10	10	10
x ₁₀	-	-	-	-	-	-	-
x ₁₁	6,66	31,66	32,2	38,54	38,95	38,95	38,95
z ₃	-	-	0,25	12,75	13,74	14,74	15,24
z ₄	30,77	30,77	30,77	30,77	30,77	30,77	30,77

k	7	8	9	10	11	12	13
b	1675	1700	1900	1925	1950	1975	2000
y	30,03	42,12	42,12	51,06	51,06	60,26	60,26
x ₁	2,28	-	-	-	-	-	-
x ₂	31,67	34	38	38,5	39	39,5	40
x ₃	-	-	-	-	-	-	-
x ₄	5	5	5	5	5	5	5
x ₅	40,68	40,3	4,3	-	-	-	-
x ₆	-	0,3	28,3	31,64	31,64	31,64	31,64
x ₇	11,4	11,4	11,4	11,08	4,08	-	-
x ₈	-	-	-	0,26	6,26	9,77	9,77
x ₉	10	10	10	10	10	7,08	0,08
x ₁₀	-	-	-	-	-	2,49	8,49
x ₁₁	38,95	39	43	43,5	44	44,5	45
z ₃	21,24	21,8	30,6	31,7	32,8	33,9	35
z ₄	30,77	30,77	23,5	26,64	22,64	22,64	22,64

Данные табл. 3 получены в результате проведения параметрического анализа. С этой целью введено обозначение $b_i^* = b_i + \delta_i$, $i=22$, где δ_i – принимается в качестве подвижного параметра i -го планового ограничения, b_i^* – максимально возможный уровень планового задания i -го ограничения в случае максимизации b_i . Осуществлялась оптимизация по критерию минимума производственных затрат, с изменением параметра δ_i , от нуля до максимального уровня b_i . Каждому значению параметра δ_i , соответствует определенный уровень производственных затрат F .

При отсутствии производства пшеницы отзывчивыми культурами являются озимая рожь (1-способом), овес на богаре (1-способом) и гречиха. Озимая рожь остается эффективной с точки зрения орошения до тех пор пока производство пшеницы возрастает до 1300 ц. При достижении этого уровня объектного показателя в оптимальный план включается производство ржи вторым способом.

Пшеница предлагается выращивать интенсивным способом при достижении объемного показателя 1375. Фермер обходится без аренды машин, если в хозяйстве запланирована 1000 ц пшеницы. Дальнейшее наращивание этой культуры требует аренды машин.

При достижении объема производства пшеницы до 1700 ц необходимо ее производить только интенсивным способом. Такая же ситуация и по ячменю. Для гречихи этот предельный показатель равен 1925 ц. При этой ситуа-

ции ячмень можно производить только интенсивным способом. Гречиха производится первым способом при достаточно напряженном ограничении пшеницы. В оптимальный план эта культура включается на предельном уровне производства пшеницы. Таким образом, информация приведенная в табл. 3 для фермера является значительной степени важной. Знание характера изменения структуры от объема производства той или иной продукции дает возможность фермеру принять оптимальные решения и вести свое хозяйство эффективно. Однако вся проблема заключается в сложности построения этой таблицы. Этот фактор обуславливает необходимость разработки модели квазилинейного программирования. В этом случае существенно упрощается процедура поиска компромиссного плана. При этом заранее необходимо предложить изменение и зависимость параметров и осуществить попытку ее формализации. Проведенный параметрический анализ позволяет провести содержательную интерпретацию равновесного плана, тем самым продемонстрировать преимущества постановки многокритериальных задач, где наглядно представляется связь критериев оптимизации.

Примечания:

1. Белова Т.н. Математическая модель оптимизации производственной программы для фермерского хозяйства // Достижения науки и техники АПК, №4, 1998.
2. Куев А.И. Модели наилучшего использования ресурсов в сельском хозяйстве. – Финансы и статистика, Москва, 1994.