ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ ПЛАНИРОВАНИЯ ЭКСПЕРИМЕНТА

© 2005 В.Е. Коржаков, А.В. Коржаков
УДК 69:658.11
ББК 38.761.1
К 66

Реализация метода оптимизации процесса предварительной акусто-магнитной обработки технической воды теплоагрегатов

Аннотация:

Приведены результаты исследований обработки технической воды теплоагрегатов акусто-магнитным аппаратом. Для проведения экспериментов и при обработки их результатов применялись математические методы планирования экспериментов. Доказано, что противонакипная эффективность акусто-магнитного аппарата выше эффективности существующих магнитных и акустических аппаратов. Более высокая эффективность акусто-магнитного аппарата объясняется обработкой воды одновременно магнитным полем и акустическими колебаниями.

Ключевые слова:

Экспериментальный стенд, акустно-магнитный аппарат, процесс накипеобразования, регрессионная модель, противонакипный эффект, критерий Пирсона, закон Гаусса, коэффициент сходимости.

Исследования процесса акусто-магнитной обработки воды проводились на экспериментальном стенде. Циркуляционная вода подвергалась обработке в акустно-магнитном аппарате. Исследования были проведены на воде р. Кама (общее солесодержание 1098 мс/л, общая жесткость воды 5,2 мг-экв/л, карбонатная жесткость 2,2 мг-экв/л). Эта вода относится к гидрокарботному классу. Продолжительность каждого цикла исследований составляла 48 ч. Количество накипи, образовавшейся на поверхности нагрева электронагревателя, определяли объемным способом. Для этого с поверхности нагрева удаляли накипь 0,2 и раствором кальцинированной соды. Количество соды, оставшейся после нейтрализации, определяли обратным титрованием 0,2 н., раствором соляной кислоты. Разность между общим объемом 0.2 н. раствора соляной кислоты, израсходованной на растворение накипи и обратное титрование соды, и объем 0,2 н. раствора соды даст количество кислоты, израсходованной на растворение накипи. Это количество пересчитывали на содержание карбоната кальция $CaCO_3$.

Линейная математическая модель процесса

Процесс накипеобразования на стенках теплообменников является сложным процессом выделения солей из воды, обработанной физическими полями.

Оптимизацию такого процесса можно вести в условиях, когда неизвестен аналитический вид функции, связывающий параметр оптимизации с факторами, определяющими процесс.

В качестве параметра оптимизации (отклика) выбран противонакипный эффект θ безреагентной обработки воды, который является функцией большого числа факторов [1]

$$\theta = F(X_1, X_2, \dots X_n). \qquad (1)$$

На лабораторной установке было изучено влияние на процесс снижения накипеобразования следующих управляемых факторов [1]:

X_1 – произведения напряженности магнитного поля H и его градиента ΔH ($A^2/м^2$);

X_2 – теплонапряжение поверхности нагрева Q ($кВт/м^2$);

X_3 – скорости течения воды $V_В$ ($м/с$);

X_4 – длины рабочего участка магнитного аппарата l ($м$);

X_5 – общей жесткости воды $Ж_0$ ($мг-экв/л$);

X_6 – температуры обрабатываемой воды t (^oC);

X_7 – интенсивности ультразвуковых колебаний $I_у$ ($Вт/м^2$).

Противонакипной эффект определяется как отношение:

$$\theta = \frac{M_H - M_0}{M_H},$$

где M_H – маски накипи, осевшие на поверхности теплообменника за период τ, без обработки воды; M_0 - то же, после обработки.

Чтобы получить линейную математическую модель процесса, была реализована 1/8 реплики факторного эксперимента 2^7 [2]. Основные уровни и интервалы варьирования факторов выбирались на основании априорной информации о процессе [3].

Введем кодированные переменные на основании соотношения (3)

$$x_1 = \frac{X_1 - 7{,}25}{7{,}15}, \quad x_2 = \frac{X_2 - 15}{10}, \quad x_3 = \frac{X_3 - 1{,}0}{0{,}5},$$

$x_4 = \frac{X_4 - 0{,}6}{0{,}3}$, $x_5 = \frac{X_5 - 3{,}0}{2{,}5}$, $x_6 = \frac{X_6 - 30}{20}$,

$x_7 = \frac{X_7 - 0{,}55}{0{,}45}$, $\theta = y$.

Согласно работе [2], обозначим в таблицах условно верхний, нижний и основной уровни, соответственно знаками «+», «-» и «0».

Матрица планирования и результаты реализации опытов приведены в таблице 1. Опыты проводились рандомизированно.

Таблица 1

Основной уровень	7,25	15	1,0	0,6	3,0	30	0,55	
интервал варьир.	7,15	10	0,5	0,3	2,5	20	0,45	
верхний уровень	14,4	25	1,5	0,9	5,5	50	1	
нижний уровень	0,1	5	0,5	0,3	0,5	10	0,1	
кодированные обозначения	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	y
номер опытов								
1	-	-	-	-	-	-	-	0,19
2	+	+	-	-	+	+	-	0,20
3	+	-	+	-	+	-	+	0,85
4	-	+	+	-	-	+	+	0,30
5	+	-	-	+	-	+	+	0,73
6	--	+	-	+	+	-	+	0,34
7	-	-	+	+	+	+	-	0,38
8	+	+	+	+	-	-	-	0,63
9	-	+	-	-	-	-	-	0,11
10	+	-	-	-	+	+	-	0,32
11	+	+	+	-	+	-	+	0,74
12	-	-	+	-	-	+	+	0,44
13	+	+	-	+	-	+	+	0,64
14	-	-	-	+	+	-	+	0,31
15	-	+	+	+	+	+	-	0,29
16	+	-	+	+	-	-	-	0,63

Проведем статистическую обработку результатов полученных в ходе проведения эксперимента.

Для того, чтобы определить точечные оценки закона распределения, необходимо исключить грубые погрешности или промахи в результатах измерений.

Используем Критерий Шарлье, число наблюдений в ряду (20>n> 10). Тогда, по теореме Бернулли, число результатов, превышающих по абсолютному значению среднее арифметическое значение на величину $К_ш S_x$, будет $n[1 - \Phi(К_ш)]$, где $\Phi(К_ш)$ – значение нормированной функции Лапласа для $X=К_ш$ [4].

Если сомнительным в ряду результатов наблюдений является один результат, то $n[1-\Phi(К_ш)]=1$. Отсюда $\Phi(К_ш)=(n-1)/n$. Значения критерия Шарлье приведены в таблице 2.

Таблица 2

n	5	10	20	30	40	50	100
$К_ш$	1,3	1,65	1,96	2,13	2,24	2,32	2,58

Пользуясь критерием Шарлье, отбрасываем результат, для значения которого в ряду из n наблюдений выполняется неравенство $|x_i - \bar{x}| > К_ш S_x$.

Так как, $К_ш S_x$ =0,23*1,96=0,45, то необходимости отбросить какой-либо результат отпадает.

Приступим к определению закона распределения результатов измерения. Проверить гипотезу о том, что результаты наблюдений принадлежат нормальному закону распределения, возможно с использованием специального критерия χ^2- Пирсона. Критерием Пирсона является случайная величина, распределённая по закону χ^2 ("хи-квадрат"):

$$\chi_{теор}{}^2 = \sum \frac{(n_i - n_i')^2}{n_i'} = 7{,}81 .$$

Сравним эмпирические и теоретические частоты, используя критерий Пирсона. Вычислим наблюдаемое значение критерия Пирсона.

$$\chi^2_{набл} = \sum(n_i^2 / n_i') - n = 4{,}31 .$$

Так как $\chi^2_{набл} < \chi^2_{кр}$, то принимаем гипотезу о нормальном законе распределения генеральной совокупности. Расхождение между эмпирическими частотами и теоретическими частотами незначимо. Проверка по критерию Пирсона показывает, что распределение величин подчиняется нормальному закону Гаусса.

На основании результатов опытов приведенных в таблице 1, рассчитываем коэффициенты линейного уровня.

Параметрами регрессионной модели являются коэффициенты регрессии β_j, где N_B — количество базисных функций. Значения коэффициентов регрессии можно получить, решив систему алгебраических уравнений.

$$
\begin{cases}
\beta_0 \sum\limits_{i=1}^{N} f_{i0}^2 + \beta_1 \sum\limits_{i=1}^{N} f_{i1} f_{i0} + \ldots + \beta_d \sum\limits_{i=1}^{N} f_{id} f_{i0} = \sum\limits_{i=1}^{N} y_i f_{i0}; \\
\beta_0 \sum\limits_{i=1}^{N} f_{i0} f_{i1} + \beta_1 \sum\limits_{i=1}^{N} f_{i1}{}^2 + \ldots + \beta_d \sum\limits_{i=1}^{N} f_{id} f_{i1} = \sum\limits_{i=1}^{8} y_i f_{i1}; \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\beta_0 \sum\limits_{i=1}^{N} f_{i0} f_{id} + \beta_1 \sum\limits_{i=1}^{N} f_{i1} f_{id} + \ldots + \beta_d \sum\limits_{i=1}^{N} f^2{}_{id} = \sum\limits_{i=1}^{N} y_i f_{id}.
\end{cases}
\qquad (2)
$$

В этих уравнениях величина индекса d в обозначении базисных функций f_{id} и коэффициента регрессии β_d равна $d = N_B - 1$. Так как информационная матрица Фишера Ф для ПФЭ и ДФЭ диагональная и все диагональные элементы ее одинаковы и равны N, то выражение для определения всех коэффициентов уравнения регрессии одинаково и имеет простой вид:

$$\beta_j = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} f_j\left(\vec{X}_i\right) \bar{y}_i , \qquad (3)$$

где N – число точек спектра плана; $f_j\left(\vec{X}_i\right)$ – значение j-ой базисной функции в i-ой точке спектра плана; $\bar{y}_i$ – выборочное среднее функции отклика в той же точке.

Значения базисных функций $f_j\left(\vec{X}_i\right)$ для отдельных факторов равны x_{ij}, а для взаимодействия факторов – $x_{ik} x_{il} x_{im} \ldots$. С учетом этого на основе выражения (3) можно записать следующие формулы для вычисления значений коэффициентов уравнения регрессии:

для коэффициентов при факторах x_j, включая также свободный член уравнения

$$\hat{\beta}_j = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_{ij} y_i, j = \overline{0, n} , \qquad (4)$$

для коэффициентов при взаимодействиях факторов

$$\hat{\beta}_g = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_{ik} x_{il} x_{im} \ldots \bar{y}_i, g = \overline{n+1, d};$$

$$k, l, m = \overline{1, n}; k \neq l \neq m, \qquad (5)$$

где n – количество факторов.

Таким образом,

$\hat{\beta}_0 = 44{,}375 * 10^{-2}$, $\hat{\beta}_4 = 0{,}05$,

$\hat{\beta}_1 = 14{,}875 * 10^{-2}$, $\hat{\beta}_5 = -1{,}5 * 10^{-2}$,

$\hat{\beta}_2 = -3{,}75 * 10^{-2}$, $\hat{\beta}_6 = -3{,}125 * 10^{-2}$,

$\hat{\beta}_3 = 8{,}875 * 10^{2}$, $\hat{\beta}_7 = 0{,}1$.

Поскольку полученные значения коэффициентов регрессии $\hat{\beta}_j$, $j = \overline{0, N_B - 1}$ – случайные числа в связи с действием случайной помехи в процессе эксперимента, то они являются оценками истинных значений коэффициентов регрессии β_j.

Таким образом, в рассматриваемой области процесс накипеобразования может быть аппроксимирован уравнением:

$$
\begin{aligned}
y = (&44{,}375 + 14{,}875 x_1 - 3{,}75 x_2 + 8{,}875 x_3 + \\
&+ 5 x_4 - 1{,}5 x_5 - 3{,}125 x_6 + 10 x_7) 10^{-2}
\end{aligned}
\qquad (6)
$$

Проведем проверку адекватности модели при поиске экстремума. Так как планирование проведено ненасыщенное, то, проведя дополнительные наблюдения в центре плана, можем приступить к рассмотрению гипотезы H_o состоящую в том, что модель

$$y = \sum_{i=1}^{N} f_j\left(\vec{X}_i\right) \beta_i , \qquad (7)$$

адекватна.

Для дополнения плана было выполнено шесть параллельных опытов в точке с координатами, соответствующими основному уровню факторов. Результаты опытов приведены в таблице 3.

Таблица 3

Номер опыта	y_g	$y_g - \bar{y}$	$(y_g - \bar{y}_p)^2$
1	0,76	0,023	0,000544
2	0,79	0,053	0,002844
3	0,68	- 0,056	0,003211
4	0,77	0,033	0,001111
5	0,67	- 0,066	0,0044
6	0,75	0,013	0,000178

Оценка параметра σ^2, обусловленная неадекватностью модели, равна

$$S_r^2 = Q / (n + 1 - r) . \qquad (8)$$

Поскольку планирование ортогональное, то

$$Q = \sum_{u=1}^{n} y_u^2 + n_0 \bar{y}_0^2 - n \sum_{j=1}^{p_0} \hat{\beta}^{0\,2}_j - N \hat{\beta}_0^{0\,2} . \qquad (9)$$

Для матрицы плана (таблица 1) добавленной таблицей 2 имеем:

$$n_0 - 1 = 5 ;\ n - p = 9 ;\ n = 16 ;\ N = 22 .$$

В результате вычислений были получены следующие данные:

$\hat{\beta}_0^0 = 0{,}52$; $\hat{\beta}_1^0 = 0{,}14875$; $\hat{\beta}_2 = -0{,}0375$;

$\hat{\beta}_3^0 = 0{,}08875$; $\hat{\beta}_4^0 = 0{,}05$; $\hat{\beta}_5^0 = -0{,}015$;

$\hat{\beta}_6^0 = -0{,}03125$; $\hat{\beta}_7^0 = 0{,}1$.

Проверим гипотезу об адекватности модели при наличии повторных наблюдений в центре плана

$$F_{расч} = \frac{s_r^2}{s_e^2} = 19.045 > F_{табл} = 10{,}15 .$$

Так как расчетное значение больше табличного, то гипотеза отклоняется. Ее отклонение указывает на возможность нахождения исследователя вблизи области экстремума, так как при этом возрастают эффекты взаимодействия более высоких порядков. На основе априорных сведений исследователь полагает, что область экстремума функции отклика им не достигнута, и причиной неадекватности модели может быть неточность аппроксимации функции отклика в окрестности центра плана. В этой ситуации принимается решение продолжения крутого восхождения без проведения дополнительных наблюдений относительно центра плана, поскольку при использовании неадекватных моделей оценки составляющих градиента для истинной модели могут быть несмещенными.

Нахождение «почти стационарной » области

Для определения условий получения максимального значения противонакипного эффекта, было использовано «крутое восхождение» по условному градиенту [5]. Оптимизация процесса противонакипной обработки производилась для воды, имеющей среднюю общую жесткость, наиболее распространенной на объектах.

Обработка технической воды производилась в акусто-магнитном аппарате с длиной зоны взаимодействия физических полей $X_4 = l_{akt} = 0{,}30$ м.

Необходимо найти оценку градиента функции отклика в центре плана или в точке ($x_1^0,\ x_2^0,\ x_3^0,\ x_4^0,\ x_5^0,\ x_6^0,\ x_7^0$), где $x_i^0 = 0$ ($i = 1,2,...,7$). Оценка градиент имеет вид:

$$\widehat{\mathrm{grad}} f_1\ (x_1^0,\ x_2^0,\ x_3^0,\ x_4^0,\ x_5^0,\ x_6^0,\ x_7^0) = (\hat{\beta}_1,\ \hat{\beta}_2,\ \hat{\beta}_3,\ \hat{\beta}_4,\ \hat{\beta}_5,\ \hat{\beta}_6,\ \hat{\beta}_7),$$

где $\hat{\beta}_i$ – оценка методом наименьших квадратов β_i. Поскольку планирование ортогональное, то окончательно

$$\widehat{\mathrm{grad}} f_1\ (x_1^0,\ x_2^0,\ x_3^0,\ x_4^0,\ x_5^0,\ x_6^0,\ x_7^0) =$$

$$= (0{,}14875;-0{,}0375;0{,}08875;0{,}05;-0{,}015;-0{,}03125;0{,}1)\ .$$

Для достижения максимального эффекта значение факторов x_2, x_5, x_6 находятся на нижних уровнях, а значение фактора x_4 на верхнем уровне. Таким образом, движение к экстремуму предположительно осуществляется в направлении всего лишь четырех факторов x_1, x_3, x_4 и x_7. Для подтверждения, или опровержения данного выбора, проведем исследование важных точек, в пространстве предикторов используя ПРЕСС-процедуру. Выбор предикторных переменных был проведен на основании исследований приведенных в таблице 4.

Таблица 4

Индексы переменных в модели	**Соответствующие значения**
12,13,14,15,16,17,23,24,25,26,27,34,35,36,37,45,46,47,56,57, 67	0,6; 154,4; 136,3; 0,94; 0,53; 249,2; 159,9; 145,8; 1,19; 1,12; 256,01; 255,4; 38,2; 42,4; 394,9; 38,47; 39,93; 392,1; 1,36; 253,2; 257,22
123, 124, 125, 126, 127, 134, 135, 136, 137, 145, 146, 147, 156, 157, 167, 234, 235, 236, 237, 245, 246, 247, 256, 257, 267, 345, 346, 347, 356, 357, 367, 456, 457, 467, 567	0,48; 0,48; 0,59; 0,61; 0,53; 161,2; 155,8; 158,1; 162,9; 137,5; 139,5; 141,9; 0,8; 0,54; 0,59; 166,8; 161,64; 163,8; 168,7; 147,8; 149,9; 152; 1,26; 1,01; 1,34; 258,6; 264,8; 266,1; 42,6; 40; 45,2; 39,81; 41,2; 42,6; 149,9
1234, 1235, 1236, 1237, 1245, 1246, 1247, 1256, 1257, 1267, 1345, 1346, 1347, 1356, 1357, 1456, 1457, 1467, 1567, 2345, 2346, 2347, 2356, 2357, 2367, 2456, 2457, 2467, 2567, 3456, 3457, 3467, 3567, 4567	0,5; 0,51; 0,52; 0,31; 0,57; 0,68; 0,39; 0,69; 0,51; 0,54; 145,4; 148,01; 139,2; 144,21; 137,2; 139,8; 131,4; 121,8; 124; 0,66; 154,3; 156,71; 148,09; 153,15; 146,29; 148,7; 145,3; 136,3; 138,72; 261,1; 248,7; 255,6; 41,2; 42,47; 39,5
12345, 12346, 12347, 12356, 12357, 12367, 123456, 123457, 12467, 12567, 13456, 13457, 13467, 13567, 14567, 23456, 23457, 23467, 23567, 24567, 34567	0,57; 0,51; 9,8; 0,52; 9,9; 11,1; 11,2; 11,2; 12,5; 11,4; 166,9; 211,49; 215,9; 210,9; 189,57; 173,2; 219,7; 223,5; 218,6; 216,6; 353,4
123456, 123457, 123467, 123567, 124567, 134567, 234567,	0,66; 1013,2; 987,39; 1030,1; 1041,8; 1727,1; 1833,2
1234567	0,53

«Наилучшей моделью» следует признать модель, включающую предикторы X_1, X_2, X_3, X_7. Этой модели отвечает одно из самых малых значений суммы квадратов предсказываемых расхождений, равное 0,31. Имеются еще восемь сумм полученных для моделей, содержащих три предиктора. Путем простых логических рассуждений можно сделать вывод о пригодности только двух моделей содержащих три предиктора, а именно 125 и 127.

Теперь получим дополнительную информацию, исследуя слагаемые, входящие в сумму для модели с предикторами X_1, X_2, X_3, X_7. Эти результаты приведены в таблице 5. Из таблицы видно, что все модели, содержащие предикторы X_1, X_2, X_3, X_7 хорошо предсказываются. Для данного набора данных они все должны быть сохранены, поскольку содержат информацию о согласии модели с экспериментальными данными. Однако оценка градиента построенной модели указывает на другое сочетание предикторов. Для получения дополнительной информации, исследуем слагаемые, входящие в сумму для модели с предикторами X_1, X_3, X_4, X_7. Результаты исследования приведены в таблице 6.

Из таблицы 6 видно, что наблюдение 4 хуже всего предсказывается по модели, содержащей предикторы X_1, X_3, X_4, X_7 и построенной по остальным точкам. Наблюдения 2,4,6,8,9,11,13,15,16 также плохо предсказываются.

При одном наборе данных это может свидетельствовать о наличии выбросов. В других случаях это может служить указанием на то, что подобные точки чрезвычайно информативны.

Сопоставляя четвертое наблюдение с откликом 0,3 в точке (7,97;1,75;0,69;1) с двенадцатым наблюдением, где отклик равен 0,44 при значениях (7,97;1,75;0,69;1), можно предположить, что результат четвертого опыта несколько занижен или существует влияние других факторов в этой точке.

Сопоставление других наблюдений приводит к выводу, что модель, содержащая предикторы X_1, X_3, X_4, X_7 далеко не самая подходящая для дальнейшего исследования.

Таким образом, модель, содержащая предикторы X_1, X_2, X_3, X_7 лучшим образом подходит для дальнейших исследований. Рассмотрим выбранные две суммы, содержащие три предиктора, к тому же эти суммы ненамного отличаются от модели содержащей четыре предиктора. Сопоставляя предикторы, находящиеся в этих моделях, можно сделать вывод, что модель, содержащая предикторы X_1, X_2, X_7 подходит для проведения новой серии опытов для операции крутого восхождения. Матрица планирования и результатов крутого восхождения приведена в таблице 7.

Таблица 5

Индекс i отбрасываемого наблюдения, результат которого предсказывается	$(Y_i - Y_{ip})^2 * 10^{-3}$	Индекс i отбрасываемого наблюдения, результат которого предсказывается	$(Y_i - Y_{ip})^2 * 10^{-3}$
1	4,0	9	0,2
2	78,1	10	46,6
3	38,6	11	22,7
4	1,3	12	2,4
5	22,4	13	16,4
6	15,5	14	0,7
7	10,4	15	14,7
8	4,4	16	26,6

Таблица 6

Индекс i отбрасываемого наблюдения, результат которого предсказывается	$(Y_i - Y_{ip})^2 * 10^{-3}$	Индекс i отбрасываемого наблюдения, результат которого предсказывается	$(Y_i - Y_{ip})^2 * 10^{-3}$
1	0,648	9	21,098
2	15,601	10	0,800
3	0,228	11	17,389
4	24,149	12	0,430
5	0,452	13	17,780
6	17,714	14	0,537
7	0,642	15	22,090
8	19,858	16	0,813

Таблица 7

Факторы	X_1^1	X_1^2	X_1^7	Y
β_i	0,08875	0,089	0,1	
Шаг	7,15	9,5	0,45	
№				
1	0,04430	0,045	0,05	0,71
2	0,02218	0,022	0,02	0,88
3	0,13313	0,011	0,01	0,85

Поскольку в опыте №3 значение параметра оптимизации уменьшается, можно предположить, что точка с коэффициентом опыта №2 находится в «почти стационарной области».

Математическая модель второго порядка

Следующим этапом являлось получение модели второго порядка для «почти стационарной» области и исследование её. Построить модель второго порядка можно, применив данные, полученные при проведении ПРЕСС-процедуры. Построим модель, включающую предикторы 1,2,7 используя центральное композиционное ортогональное планирование второго порядка. Матрица планирования и результаты реализации её приведены в таблице 8.

Таблица 8

№	x'_0	x'_1	x'_2	x'_3	$x'_1x'_2$	$x'_1x'_3$	$x'_2x'_3$	x'_4	x'_5	x'_6	y'
1	+1	-1	-1	-1	+1	+1	+1	0,27	0,27	0,27	0,77
2	+1	+1	-1	-1	-1	-1	+1	0,27	0,27	0,27	0,79
3	+1	-1	+1	-1	-1	+1	-1	0,27	0,27	0,27	0,81
4	+1	+1	+1	-1	+1	-1	-1	0,27	0,27	0,27	0,83
5	+1	-1	-1	+1	+1	-1	-1	0,27	0,27	0,27	0,85
6	+1	+1	-1	+1	-1	+1	-1	0,27	0,27	0,27	0,85
7	+1	-1	+1	+1	-1	-1	+1	0,27	0,27	0,27	0,86
8	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	0,27	0,27	0,27	0,87
9	+1	-1,215	0	0	0	0	0	0,75	-0,73	-0,73	0,88
10	+1	+1,215	0	0	0	0	0	0,75	-0,73	-0,73	0,89
11	+1	0	-1,215	0	0	0	0	-0,73	0,75	-0,73	0,90
12	+1	0	+1,215	0	0	0	0	-0,73	0,75	-0,73	0,82
13	+1	0	0	-1,215	0	0	0	-0,73	-0,73	0,75	0,92

14	+1	0	0	+1,215	0	0	0	-0,73	-0,73	0,75	0,85
15	+1	0	0	0	0	0	0	-0,73	-0,73	-0,73	0,86

На основании результатов опытов вычислены коэффициенты уравнения регрессии.

Вычислим следующие значения коэффициентов уравнения:

$$\beta_0 = \beta_0' - c\sum_{i=1}^{k}\beta_{ii} = 0{,}891,\ \beta_0' = \frac{1}{N}\sum_{u=1}^{N} y_u = 0{,}85,$$

$\beta_1 = 0{,}003,$

$\beta_2 = 0{,}019,$

$\beta_3 = 0{,}029,$

$\beta_{12} = 0{,}001,$

$\beta_{13} = -0{,}004,$

$\beta_{23} = -0{,}006,$

$\beta_4 = -0{,}0013,$

$\beta_5 = -0{,}030,$

$\beta_6 = -0{,}013.$

Таким образом, модель (содержащую предикторы 1,2,3) процесса накипеобразования в «почти стационарной» области можно описать следующим уравнением:

$$\begin{aligned} y' &= 0{,}891 + 0{,}003x' + 0{,}019x' + -0{,}029x_3' + \\ &+ 0{,}001x_1'x_2' - 0{,}004x_1'x_3' - 0{,}006x_2'x_3' - \\ &- 0{,}013x_1'^2 - 0{,}03x_2'^2 - 0{,}013x_3'^2, \end{aligned} \quad (10)$$

где $x_1' = x_1 = \frac{X_1 - 7{,}25}{7{,}15}$, $x_2' = x_2 = \frac{X_2 - 15}{16}$,

$$x_3' = x_7 = \frac{X_7 - 0{,}55}{0{,}45}.$$

Проверим на адекватность полученное уравнение. Сформируем остаточную последовательность (ряд остатков), для чего из фактических значений уровней ряда вычтем соответствующие расчетные значения по модели таблица 9.

Таблица 9

№	Фактическое y_t	Расчетное $\overline{y}_t$	Отклонение ε_t	Точки пиков	ε_t^2	$\varepsilon_t - \varepsilon_{t-1}$	$(\varepsilon_t - \varepsilon_{t-1})^2$	$\lvert\varepsilon_t\rvert : y_t \cdot 100$
1	0,77	0,77	0,000	-	0,000	-	-	0,000
2	0,79	0,79	0,000	0	0,000	0,00	0,000	0,000
3	0,81	0,82	-0,010	0	0,000	-0,01	0,000	1,235
4	0,83	0,84	-0,010	0	0,000	0,00	0,000	1,205
5	0,85	0,85	0,000	0	0,000	0,01	0,000	0,000
6	0,85	0,85	0,000	0	0,000	0,00	0,000	0,000
7	0,86	0,88	-0,020	1	0,000	-0,02	0,000	2,326
8	0,87	0,88	-0,010	0	0,000	0,01	0,000	1,149
9	0,88	0,88	0,000	0	0,000	0,01	0,000	0,000
10	0,89	0,87	0,020	0	0,000	0,02	0,000	2,247
11	0,90	0,87	0,030	1	0,001	0,01	0,000	3,333
12	0,82	0,82	0,000	1	0,000	-0,03	0,001	0,000
13	0,92	0,91	0,010	0	0,000	0,01	0,000	1,087
14	0,85	0,84	0,010	1	0,000	0,00	0,000	1,176
15	0,86	0,89	-0,030	-	0,001	-0,04	0,002	3,488

В случайной выборке математическое ожидание числа точек поворота $\overline{p}$ и дисперсия σ_p^2. Критерий случайности с α =5% уровнем значимости выполняется, проверенная модель считается адекватной $p = 4 > 3{,}47$.

Проверим соответствие распределения случайной компоненты нормальному закону распределения RS -критерий.

Т.к. при $\alpha = 0{,}05$ и $n = 15$ нижняя граница равна 3,12, а верхняя граница равна 4,12, тогда

$$R = 0{,}03 - (-0{,}03) = 0{,}06,$$

$$S_{\hat{y}} = \sqrt{0{,}003 : 14} = 0{,}0146.$$

$RS = 0{,}06 : 0{,}014638 = 4{,}03$ характеризует нормальное распределение, т.к. 3,12<4,03<4,12.

Проверим независимость значений уровней случайной компоненты, т.е. проверим отсутствие существенной автокорреляции в остаточной последовательности. Расчетное значение d -критерия Дарбина – Уотсона вычисляется по формуле

$$d = \frac{\sum_{t=2}^{n}(\varepsilon_t - \varepsilon_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^{n}\varepsilon_t^2} \quad (11)$$

Расчетное $d(d')$ сравнивается с d_1 и d_2 критические значениями статистики Дарбина – Уотсона таблица 10.

Таблица 10

n	k = 1		k = 2		k = 3	
	d_1	d_2	d_1	d_2	d_1	d_2
15	1,08	1,36	0,95	1,54	0,82	1,75
20	1,20	1,41	1,10	1,54	1,00	1,68
30	1,35	1,49	1,28	1,57	1,21	1,65

Т.к. $d = 1{,}258 < 2$, то автокорреляция не наблюдается, поэтому сравниваем с $d_1 = 0{,}82, d_2 = 1{,}75$; т.к. $d_1 > 1{,}258 < d_2$, то проверка не позволяет сделать никакого вывода. Поэтому необходима дополнительная проверка адекватности модели, с помощью ряда непараметрических критериев. Одним из таких критериев – *критерий серий*, основанный на медиане выборки.

Обозначим протяженность самой длинной серии через $К_{max}$, а общее число серий – через ν. Выборка признается случайной, если выполняются неравенства

$$К_{max} < \left[3{,}3(\lg n + 1)\right],\ \nu > \left[1 \setminus 2(n + 1 - 1{,}96\sqrt{n-1}\right],$$

для 5%-ного уровня значимости: $К_{max} < 7, \nu > 4$.

Ряд из величин ε_t расположим в порядке возрастания их значений и определим медиану полученного вариационного ряда, $\varepsilon_m = 0$ т.е. срединное значение. Сравнивая значения этой последовательности ε_t с ε_m, будем ставить знак «плюс», если значение ε_t превосходит медиану, и знак «минус», если оно меньше медианы; в случае равенства сравниваемых величин соответствующее значение ε_t опускается. Для того, чтобы последовательность ε_t была случайной выборкой, протяженность самой длинной серии $К_{max} = 2$, а общее число серий $\nu = 5$.

Таблица 11

№	Отклонение, ε_t	Вариационный ряд	Серии
1	0,000	-0,03	
2	0,000	-0,02	
3	-0,010	-0,01	-
4	-0,010	-0,01	-
5	0,000	-0,01	
6	0,000	0	
7	-0,020	0	-
8	-0,010	0	-
9	0,000	0	
10	0,020	0	+
11	0,030	0	+
12	0,000	0,01	
13	0,010	0,01	+
14	0,010	0,02	+
15	-0,030	0,03	-

Так как выполняются оба неравенства, то гипотеза о случайном характере отклонений уровней ряда от модели принимается. Остаточная последовательность удовлетворяет всем свойствам случайной компоненты ряда, следовательно, **модель адекватна.**

Для характеристики точности модели воспользуемся средней относительной ошибкой аппроксимации

$$\bar{\varepsilon}_{отн} = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\left|\frac{y_t - \hat{y}_t}{y_t}\right| \cdot 100\%,\ \bar{\varepsilon}_{откл} = 1{,}150\%.$$

Полученное значение средней относительной ошибки говорит о достаточно высоком уровне точности построенной модели, ошибка менее 5% свидетельствует об удовлетворительном уровне точности.

Для адекватных моделей имеет смысл ставить задачу оценки и точности. Точность модели характеризуется величинами:

- коэффициент сходимости

$$\varphi^2 = \frac{\sum_{t=1}^{n}(y_t - \hat{y}_t)^2}{\sum_{t=1}^{n}(y_t - \bar{y})^2},\ \varphi^2 = \frac{0{,}003}{0.025} = 0{,}12,$$

- коэффициент детерминации

$$R^2 = 1 - \varphi^2,\ R^2 = 0{,}88.$$

Коэффициент детерминации говорит о том, что почти 88% значений полученных по модели совпадают с полученными данными на опыте.

Оптимизация значений параметров обработки воды

Согласно работам [2], приведем уравнение к каноническому виду

$$y - 0{,}962 = -0{,}03(x_1''')^2 - 0{,}013(x_2''')^2 - 0{,}013(x_3''')^2, \quad (12)$$

где

$$\begin{cases} x_1'' = -0{,}009x_1''' + 0{,}986x_2''' + 0{,}168x_3''', \\ x_2'' = -0{,}75x_1''' + 0{,}104x_2''' - 0{,}653x_3''', \\ x_3'' = -0{,}681x_1''' - 0{,}129x_2''' + 0{,}721x_3'''. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1' = x_1'' - 0{,}0015, \\ x_2' = x_2'' - 0{,}0095, \\ x_3' = x_3'' - 0{,}0145. \end{cases}$$

Получили следующие значения координат особой точки:

$$X_1 = 7{,}239;\ X_2 = 15{,}152;\ X_7 = 0{,}5565.$$

В этой же точке $y = \theta = 0{,}962$.

Переход от координатных значений факторов - к натуральным, производился по следующим формулам:

$$X_1 = 7{,}25 + x_1' \cdot 7{,}15;\ X_2 = 15 + x_2' \cdot 10;$$

$$X_7 = 0{,}55 + x_3' \cdot 0{,}45.$$

Поскольку коэффициенты канонической формы (12) имеют одинаковые знаки (минус), можно сделать вывод, что поверхность отклика, описывающая процесс накипеобразования в «почти стационарной» области представляет собой эллипсоид вращения. Из этого следует, что координаты оптимального режима процесса накипеобразования соответствуют координатам особой точки поверхности.

Получаем следующие расчетные значения параметров оптимального режима процесса накипеобразования:

$$\Delta H \cdot H = 7{,}239\ \ А^2/м^2,\ Q = 15{,}152\ \ кВт/м^2,$$

$$I_y = 0{,}556\ \ Вт/м^2.$$

Ожидаемое значение параметра оптимизации в этой точке:

$$\theta = 0{,}962.$$

Результаты исследований обработки технической воды показали, что противонакипная эффективность акусто-магнитного аппарата выше эффективности существующих магнитных и акустических аппаратов. Более высокая эффективность акусто-магнитного аппарата объясняется обработкой воды в аппарате одновременно магнитным полем и акустическими колебаниями.

Примечания:

1. Коржаков А.В. Исследование эффективности акусто-магнитной обработки водных систем. / А.В. Коржаков, В.И. Лойко // Научный журнал КубГАУ [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ 2004. – №2 (02). – Режим доступа: http//www.ej.kubagro.ru/2004/03/07/p07.asp.
2. Адлер Ю.П., Маркова Е.В., Грановский Ю.В. Планирование эксперимента при поиске оптимальных условий. – М.: Наука, 1971.
3. Финаев В.И., Егоров А.В. Практическое применение методов математического планирования экспериментов. – Таганрог: ТРТИ, 1993.
4. Сергеев А.Г., Латышев М.В. Терегеря В.В. Метрология, стандартизация, сертификация: Учебное пособие. – М.: Логос, 2003. – 536 с.: ил.
5. Асатурян В.И. Теория планирования эксперимента. – М.: Радио и связь, 1983.