УДК 004
ББК 32.81
К 66

Исследование априорной информации о расходе топлива в карбюраторных двигателях

Аннотация:

Приведены результаты исследования расхода топлива в карбюраторных двигателях после установки на них акусто-магнитного аппарата. Результаты получены на основе методов математической статистики и теории погрешности.

Ключевые слова:

Карбюраторный двигатель, критерий Шарлье, критическая точка, критерий Пирсона, абсолютная ошибка.

Рассмотрим исследования, которые были проведены на реальном физическом объекте после установки акусто-магнитного аппарата. В результате повторных измерений, проведенных с одинаковой точностью, были получены ряды различных значений. Рассмотрим ряд величин, указывающих расход топлива на сто километров для автомобилей отечественного производства с карбюраторным двигателем.

Для нахождения наиболее близкого значения к истинному значению измеряемой величины найдем среднее арифметическое значение ряда отдельных измерений (выборочное среднее), являющееся несмещенной оценкой математического ожидания (МО) случайной величины.

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = 8{,}61. \qquad (1)$$

Результаты отдельных измерений отличаются от среднего значения. Эти отклонения носят названия абсолютных погрешностей. Проведем формирование групп результатов.

Абсолютные ошибки отдельных измерений некоторой величины в какой-то степени характеризуют точность каждого из измерений или разброс измеряемых значений. Перейдем к выборке отклонений от среднего арифметического значения (таблица 1).

В качестве количественной меры разброса выбрано математическое ожидание квадрата случайных отклонений наблюдений – дисперсия.

Точечная оценка дисперсии, определяется по формуле:

$$\widetilde{D}[x] = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2. \qquad (2)$$

Для исправления оценки СКО введем поправочный множитель k(n), зависящий от числа наблюдений n. Он изменяется от k(3) = 1,13 до k(∞) ≈ 1,03. Оценка среднего квадратического отклонения

$$\widetilde{\sigma} = S_x = k(n)\sqrt{\widetilde{D}[x]} = k(n)\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}. \qquad (3)$$

Таблица 1

№ группы	x_i	N_i	Δx_i	Δx_i^2	$\Delta x_i^2 \cdot n_i$
1	8,38	2	0,23	0,0529	0,1058
2	8,44	1	0,17	0,0289	0,0289
3	8,48	2	0,13	0,0169	0,0338
4	8,51	3	0,10	0,0100	0,03
5	8,54	3	0,07	0,0049	0,0147
6	8,55	2	0,06	0,0036	0,0072
7	8,59	3	0,02	0,0004	0,0012
8	8,63	6	0,02	0,0004	0,0024
9	8,69	2	0,08	0,0064	0,0128
10	8,72	3	0,11	0,0121	0,0363
11	8,76	2	0,15	0,0225	0,045
12	8,89	1	0,28	0,0784	0,0784

Полученные оценки МО и СКО являются случайными величинами. Это проявляется в том, что при повторениях серий из n наблюдений каждый раз будут получаться различные оценки $\overline{x}$ и $\widetilde{\sigma}$. Рассеяние этих оценок целесообразно оценивать с помощью СКО $S_{\overline{x}}$ и $S\sigma$. Оценка СКО среднего арифметического значения

$$S_{\overline{x}} = \frac{S_x}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}. \qquad (4)$$

Оценка СКО среднего квадратического отклонения

$$S_\sigma \approx \widetilde{\sigma}(S_x) = S_x\sqrt{\varepsilon - 1}/(2\sqrt{n}). \qquad (5)$$

Отсюда следует, что относительная погрешность определения СКО может быть оценена как

$$S_\sigma / S_x = \sqrt{\varepsilon - 1}/(2\sqrt{n}). \qquad (6)$$

Она зависит только от эксцесса и числа наблюдений в выборке и не зависит от СКО, т.е. той точности, с которой производятся измерения. Ввиду того, что большое число измерений проводится относительно редко, погрешность определения σ может быть весьма существенной. В любом случае она больше погрешности из-за смещенности оценки, обусловленной извлечением квадратного корня и устраняемой поправочным множителем k(n). В связи с этим пренебрегаем учетом смещенности оценки СКО отдельных наблюдений и определяем его по формуле [2]

$$\tilde{\sigma} = S_x = \sqrt{\tilde{D}[x]} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} = 0{,}126, \quad (7)$$

т.е. считают k(n)=1.

Для того, чтобы определить точечные оценки закона распределения, необходимо исключить грубые погрешности или промахи в результатах измерений.

Используем Критерий Шарлье, число наблюдений в ряду велико (n > 20). Тогда, по теореме Бернулли, число результатов, превышающих по абсолютному значению среднее арифметическое значение на величину $К_шS_x$, будет $n[1-\Phi(K_ш)]$, где $\Phi(K_ш)$ – значение нормированной функции Лапласа для Х=$K_ш$ [3].

Если сомнительным в ряду результатов наблюдений является один результат, то n[1-$\Phi(K_ш)$]=1. Отсюда $\Phi(K_ш)$=(n-1)/n. Значения критерия Шарлье приведены в таблице2.

Таблица 2

n	5	10	20	30	40	50	100
$К_ш$	1,3	1,65	1,96	2,13	2,24	2,32	2,58

Пользуясь критерием Шарлье, отбрасываем результат, для значения которого в ряду из n наблюдений выполняется неравенство $|x_i - \bar{x}| > K_ш S_x$.

Если, $K_ш S_x$=0,269, то необходимо отбросить результат 8,89.

После исключения грубой погрешности перейдем к формированию нового ряда и групп результатов. Запишем полученные данные в таблицу 3.

Таблица 3

№ группы	x_i	N_i	Δx_i	Δx_i^2	$\Delta x_i^2 \cdot n_i$
1	8,38	2	0,22	0,049	0,097
2	8,44	1	0,16	0,026	0,026
3	8,48	2	0,12	0,014	0,029
4	8,51	3	0,09	0,008	0,024
5	8,54	3	0,06	0,004	0,011
6	8,55	2	0,05	0,003	0,005
7	8,59	3	0,01	0,000	0,000
8	8,63	6	0,03	0,001	0,005
9	8,69	2	0,09	0,008	0,016
10	8,72	3	0,12	0,014	0,043
11	8,76	2	0,16	0,025	0,051

Найдем среднее арифметическое значение ряда отдельных измерений (1).

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = 7{,}60.$$

Рассчитаем среднее квадратическое отклонение (7):

$$\tilde{\sigma} = S_x = k(n)\sqrt{\tilde{D}[x]} = k(n)\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} = 0{,}105.$$

Приступим к определению закона распределения результатов измерения. Проверить гипотезу о том, что результаты наблюдений принадлежат нормальному закону распределения, возможно с использованием специального критерия χ^2 – Пирсона. Эмпирическое распределение задано в виде последовательности интервалов одинаковой длины и соответствующих им частот. Вычислим выборочную среднюю и выборочное среднее квадратическое отклонение методом произведений. Для этого перейдем от заданного интервального распределения к распределению равноотстоящих вариантов, приняв в качестве варианты x_i^* среднее арифметическое концов интервала: $x_i^* = (x_i + x_{i+1})/2$. В итоге получим распределение, представленное в таблице 3.

Выполнив выкладки по методу произведений, найдем выборочную среднюю и выборочное среднее квадратическое отклонение: $\bar{x}^* = 8{,}6$, σ^*=0,099.

Определим шаг по формуле Стерджеса:

$$к = 1+3{,}32 \lg n=4{,}8, \quad h = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{k} = 0{,}076. \quad (9)$$

Найдем интервалы (z_i, z_{i+1}), учитывая, что $\bar{x}^* = 8{,}6$, σ^*=0,099, $1/\sigma^*$=10,05.

Для этого составим расчетную таблицу 4 (левый конец первого интервала примем равным $-\infty$, а правый конец последнего интервала ∞).

Таблица 4

Номер интервала i	Граница интервалов		Частота	x_i^*	$x_i^* - \bar{x}^*$	$x_{i+1}^* - \bar{x}^*$	Границы интервалов	
	x_i	x_{i+1}	n_i				$z_i = \frac{x_i - \bar{x}^*}{\sigma^*}$	$z_{i+1} = \frac{x_{i+1} - \bar{x}^*}{\sigma^*}$
1	8,38	8,46	3	8,420	-0,22	-0,14	-	-1,400
2	8,46	8,54	5	8,5	-0,14	-0,06	-1,400	-0,596
3	8,54	8,62	8	8,580	-0,06	0,02	-0,596	0,208
4	8,62	8,70	8	8,66	0,02	0,10	0,208	1,012
5	8,7	8,78	5	8,740	0,10	0,18	1,012	-
Сумма			29	8,60	-0,30	0,10		

Найдем теоретические вероятности P_i и теоретические частоты $n_i' = n \cdot P_i = 29 \cdot P_i$. Для этого составим расчетную таблицу 5.

Таблица 5

Номер интервала i	Граница интервалов		$\Phi(z_i)$	$\Phi(z_{i+1})$	$P_i = \Phi(z_i) - \Phi(z_{i+1})$	$n_i = 29 \cdot P_i$
	z_i	z_{i+1}				
1	-	-1,40	-0,500	-0,4192	0,0808	2,3432
2	-1,40	-0,60	-0,4192	-0,2257	0,1935	5,6115
3	-0,60	0,21	-0,2257	0,0832	0,3089	8,9581
4	0,21	1,01	0,0832	0,3438	0,2606	7,5574
5	1,01	-	0,3438	0,5000	0,1562	4,5298
Сумма					1,000	29

По таблице критических точек распределения $\chi^2_{набл}$, по уровню значимости $\alpha = 0,05$ и числу степеней свободы $k = s - 3 = 5 - 3 = 2$, находим критическую точку правосторонней критической области $\chi^2_{кр}(0,05;2)$ =6.

Сравним эмпирические и теоретические частоты, используя критерий Пирсона. Вычислим наблюдаемое значение критерия Пирсона. Для этого составим расчетную таблицу 6. Столбцы 7 и 8 служат для контроля вычислений по формуле

$$\chi^2_{набл} = \sum (n_i^2 / n_i') - n \,. \qquad (10)$$

Контроль: $\sum (n_i^2 / n_i') - n$ =29,43-29=0,43= $\chi^2_{набл}$.

Вычисления произведены правильно.

Таблица 6

i	n_i	n_i'	$n_i - n_i'$	$(n_i - n_i')^2$	$(n_i - n_i')^2 / n_i'$	n_i^2	n_i^2 / n_i'
1	3	2,34	0,657	0,43139	0,18	9	3,84
2	5	5,61	-0,612	0,37393	0,07	25	4,46
3	8	8,96	-0,958	0,91796	0,10	64	7,14
4	8	7,56	0,443	0,19589	0,03	64	8,47
5	5	4,5298	0,470	0,22109	0,05	25	5,52
сумма	29	29,00			0,43	187	0,43

Так как $\chi^2_{набл} < \chi^2_{кр}$, то принимаем гипотезу о нормальном законе распределения генеральной совокупности. Расхождение между эмпирическими частотами и теоретическими частотами незначимо.

Проверка по критерию Пирсона показывает, что распределение величин подчиняется нормальному закону Гаусса. Зная закон распределения можно перейти к нахождению квантильного множителя z_p при заданном значении доверительной вероятности P=0,95. Доверительные границы случайной погрешности можно записать как $\Delta = \pm z_p \cdot S_{\bar{x}}$.

Находим среднее квадратическое отклонение от среднего значения (4):

$$S_{\bar{x}} = \frac{S_x}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2} = 0{,}0194.$$

Так как гипотеза о нормальности распределения не противоречит опытным данным, доверительный интервал определяется по формуле [3]:

$$P(0{,}95) = 2\Phi(z_p) \,. \qquad (11)$$

Отсюда $\Phi(z_p)$ =0,475. Из таблицы значений функции Лапласа, находим, что z_p =1,96.

Подставляем полученные значения в формулу

$$\Delta = \pm z_p \cdot S_{\bar{x}} = 1{,}96 \cdot 0{,}0194 = 0{,}038 \,.$$

Перейдем к вычислению границы суммарной неисключенной систематической погрешности результата измерения. Неисключенная систематическая погрешность результата образуется из неисключенных погрешностей метода, средства измерения, погрешностей поправок. При суммировании эти составляющие рассматриваются как случайные величины. Данные о виде неисключенных составляющих систематических погрешностей отсутствуют, поэтому их распределение считаем равномерным. При равномерном распределении неисключенных систематических погрешностей границы неисключенной систематической погрешности результата измерения θ вычисляют по формуле [3]:

$$\theta = k \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \theta_i^2} \,, \qquad (12)$$

где θ_i – граница i-й не исключенной составляющей систематической погрешности;

k – коэффициент, определяемый заданной доверительной вероятностью (при $P(0{,}95)$ $k = 1.1$);

m - количество неисключенных составляющих.

Определим границы неисключенной составляющей метода измерения. Для нахождения ошибки метода измерения нужно использовать формулу для вычисления исходной величины

$$V = \frac{100 \cdot G}{S} \,,$$

где V – расход топлива на сто километров;

G – доза топлива, используемого для прохождения пути до полной остановки двигателя автомобиля;

S – расстояние, пройденное автомобилем от момента начала измерения до полной остановки.

Необходимо найти формулу для абсолютной или для относительной ошибки измеряемой величины [1]. Абсолютная ошибка:

$$\Delta N = \pm \frac{B\Delta A + A\Delta B}{B^2} = \frac{100 \cdot 1{,}105}{13{,}15^2} = 0{,}635 .$$

Относительная ошибка:

$$\frac{\Delta N}{N} = \pm\left(\frac{\Delta A}{A} + \frac{\Delta B}{B}\right) = \pm \frac{0{,}635}{13{,}15} = 0{,}048 .$$

Подставим в полученные формулы вместо ошибок измерений точность приборов (класс точности – 0,5), которые использовались для измерения, а вместо значений непосредственно измеренных на опыте величин – их приближенные значения, тогда получим ошибку метода измерения $\frac{0{,}5}{7} = \pm 0{,}071$.

Определим погрешности при проведении измерений, учитывая, что автомобиль останавливается не сразу после остановки двигателя. Относительная ошибка равна $\pm$ 0,014. Абсолютная ошибка равна 0,195.

Найдем границы неисключенной систематической погрешности результата измерения θ по формуле (2.28):

$$\theta = k\sqrt{\sum_{i=1}^{m} \theta_i^2} =$$

$$1{,}1 \cdot \sqrt{0{,}048^2 + 0{,}071^2 + 0{,}014^2} = 0{,}095 .$$

Границы неисключенной составляющей систематической погрешности и оценки СКО результата измерений S связаны соотношением

$$0{,}0152 < \theta < 0{,}152.$$

При невыполнении неравенств θ<0.8S и θ>8S границу суммарной погрешности ГОСТ 8.207-76 предписывает находить путем композиции распределений случайных и неисключенных систематических погрешностей, рассматривая как случайные величины. Допускается границы погрешности результата измерений определять по формуле:

$$\Delta = KS_{\sum} = \frac{t_p S + \theta}{S + \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \theta_i^2 / 3}} S_{\sum} = \frac{1{,}96 \cdot 0{,}105 + 0{,}095}{0{,}105 + 0{,}049} \cdot 0{,}0526 = 0{,}1027 , \qquad (13)$$

где $S_{\sum} = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \theta_i^2 / 3 + S^2}$ – оценка суммарного СКО суммарной погрешности.

Однако данный подход приводит к заниженным оценкам. Согласно рекомендациям Сергеева А.Г. [3], возможно, рассмотреть этот вопрос с другой точки зрения. Если систематическая составляющая постоянна, то ее модуль должен суммироваться с доверительным интервалом случайной составляющей $t_p S$. Доверительный интервал суммарной погрешности

$$\Delta = 2(|\theta| + t_p S) = 2(0{,}095+0{,}038)=0{,}266. \qquad (14)$$

Результат измерений записывается в виде

$$V=8{,}6 \pm 0{,}266$$

при доверительной вероятности $P = 0{,}95$.

Полученный результат соответствует контрольным замерам, данным в технической документации на данный вид автотранспорта.

Примечания:

1. Зайдель А.Н. Элементарные оценки ошибок измерения. Изд. 2-е испр. И доп. – Л.: «Наука», Ленинградское отд., 1967.
2. Коржаков А.В. Исследование эффективности акусто-магнитной обработки жидкого топлива. / А.В. Коржаков, В.И. Лойко // Научный журнал КубГАУ [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ 2004.- №2 (02). – Режим доступа: http//www.ej.kubagro.ru/2004/20/02/p02.asp.
3. Сергеев А.Г. Метрология, стандартизация, сертификация: Учебное пособие. / Латышев М.В. Терегеря В.В. / – М.: Логос, 2003. – 536 с.: ил.