УДК 33:517.977.1
ББК 65в
Б 71
З.У. Блягоз, А.Ю. Попова

Принятие решений в условиях риска и неопределенности

Аннотация:

В статье рассматривается математическая модель игры, когда возникает необходимость принятия решения в условиях вероятностной неопределенности. При этом подробно излагаются 7 критериев принятия оптимального решения (критерии Байеса, Лапласа, Вальда, Гурвица и др.). На конкретном примере иллюстрируется применение этих критериев и методика принятия оптимального решения при наличии риска.
Ключевые слова:

Риск, неопределенность, вероятность, принятие решений, игра с природой, стратегия.

Важнейшей составляющей частью любого вида человеческой деятельности является принятие решений в условиях вероятностной неопределенности. Сложность выбора того или иного решения зависит от степени определенности возможных исходов или последствий. Существуют ситуации, в которых можно более или менее точно оценить вероятность наступления исходов для каждого решения. В этих случаях говорят о принятии решений в условиях риска. Но гораздо чаще невозможно даже приблизительно указать вероятность того или иного результата, что связано с недостаточной информированностью о внешних обстоятельствах, в которых приходится принимать решение. Эта неопределенность порождается множеством различных факторов, таких как экономическая ситуация в стране, уровень инфляции, курсы валют, рыночная конъюнктура, политические отношения, состояние погоды, стихийные обстоятельства и т.п. В этом случае речь идет о принятие решений в условиях вероятностной неопределенности

Математическая модель ситуации, в которой принятие решений зависит от объективных обстоятельств, называется игрой с природой.

Подобные модели изучает такой раздел математики как «Теория игр с природой» («Теория принятия решений»). Она служит для выработки рекомендаций по рациональному образу действий в условиях риска и неопределенности, вызванной не зависящими от нас причинами.

Игру с природой можно определить как парную игру, в которой сознательный игрок А, заинтересованный в наиболее выгодном для него исходе игры, выступает против участника, совершенно безразличного к результату природа П.

Очевидно, что при решении игр с природой достаточно найти наилучшие рекомендации только для игрока А, потому как природа в рекомендациях не нуждается, развиваясь в соответствии с определенными законами независимо от того, удобно это человеку или нет.

Пусть игрок А располагает *m* возможными стратегиями, которые обозначим $A_1, A_2,\ldots, A_m$, тогда как природа П может принимать одно из *n* своих состояний $П_1, П_2,\ldots, П_n$.

Предполагается обычно, что игрок *A* в состоянии оценить результаты выбора им каждой из своих стратегий A_i, $i=1,\ldots,m$, при каждом состоянии природы $П_j$, $j=1,\ldots,n$, количественно выражающиеся действительными числами a_{ij}. Эти числа называются выигрышами игрока А.

В таком случае игра может быть задана матрицей $P = [a_{ij}]_{m\times n}$, называемой платежной матрицей (или матрицей игры).

A_i \ $П_j$	$П_1$	$П_2$	…	$П_n$
A_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}
A_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}
…	…	…	…	…
A_m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}

Если в платежной матрице элементы k-ой строки не меньше соответствующих элементов s-ой строки, т.е. $a_{kj} \ge a_{sj}\ \left(j=\overline{1,n}\right)$, то доминируемую (дублируемую) строку s можно удалить, т.к. она определяет стратегию A_s, заведомо не лучшую стратегии A_k. Это позволяет значительно упростить платежную матрицу игры. Отбрасывать же те или иные состояния природы нельзя, поскольку она может реализовать любое свое состояние независимо от того, выгодно оно игроку А или нет.

После упрощения платежной матрицы иногда выгодно перейти от нее к матрице рисков, которая позволит более четко выявить преимущество одной стратегии по сравнению с другой при данном состоянии природы.

Риском r_{ij} игрока А, когда он пользуется чистой стратегией A_i при состоянии $П_j$ природы, называется разность между максимальным выигрышем $\max\limits_i a_{ij}$, который он мог бы получить, достоверно зная, что природой будет реализовано именно состояние $П_j$, и тем выигрышем a_{ij}, который он получит, используя стратегию A_i, не зная, какое из состояний $П_j$ природа реализует.

Таким образом, элементы r_{ij} матрицы рисков определяются по формуле:

$$r_{ij} = \beta_j - a_{ij} \ge 0 \qquad (1)$$

где β_j – максимально возможный выигрыш игрока А при состоянии $П_j$ (максимальный элемент j-го столбца платежной матрицы).

Учитывая специфику игр с природой, при поиске оптимальных решений обращаются к различным критериям, дающим некоторою логическую схему принятия решения.

В условиях риска, т.е. когда известны вероятности q_j состояний природы, можно использовать критерии Байеса, Лапласа, Ходжа-Лемана. При принятии решений в условиях неопределенности критерии Вальда, Сэвиджа, Гурвица и произведений.

1. Критерий Байеса

Этот критерий используется в предположении, что вероятности q_j состояний природы $П_j$ известны. В качестве показателя эффективности чистой стратегии A_i используется средневзвешенный выигрыш при стратегии A_i с весами $q_1,\ldots,q_n$, т.е. величина

$$b_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j \quad \left(i = \overline{1,m}\right) \tag{2}$$

Оптимальной по Байесу чистой стратегией является стратегия с максимальным показателем эффективности. Цена игры в этом случае определяется по формуле:

$$b = \max_{1 \le i \le m} b_i = \max_{1 \le i \le m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j \tag{3}$$

Аналогично можно найти оптимальную по Байесу стратегию, используя формулу

$$R_i = \sum_{j=1}^{n} r_{ij} q_j \quad \left(i = \overline{1,m}\right) \tag{4}$$

и матрицу рисков. В этом случае средний риск следует минимизировать. Однако, следует заметить, что стратегия, максимизирующая средний выигрыш, совпадает со стратегией, минимизирующей средний риск.

2. Критерий Лапласа

Если игрок А не располагает объективной информацией об вероятностях q_j состояний природы $П_j$ и считает в равной мере правдоподобными все состояния, то их вероятности полагают одинаковыми и равными 1/n. Этот прием называют *принципом недостаточного основания Лапласа.*

Отсюда вытекает и критерий Лапласа, в соответствии с которым оптимальной считается чистая стратегия, обеспечивающая максимальный средний выигрыш игрока А при равенстве всех вероятностей.

В этом случае показатели эффективности каждой чистой стратегии рассчитываются по формуле:

$$l_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \quad \left(i = \overline{1,m}\right), \tag{5}$$

а цена игры равна

$$l = \max_{1 \le i \le m} l_i = \max_{1 \le i \le m} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}. \tag{6}$$

При использовании критериев Байеса и Лапласа предполагается, что ситуация, в которой принимается решение, характеризуется следующими обстоятельствами:

- вероятности появления состояний $П_j$ известны и не зависят от времени.
- решение реализуется (теоретически) бесконечно много раз.
- для малого числа реализаций решения допускается некоторый риск.

При достаточно большом количестве реализаций среднее значение постепенно стабилизируется. Поэтому при полной (бесконечной) реализации какой-либо риск практически исключён.

3. Критерий Вальда

В случае, если вероятности состояний природы неизвестны и нет возможности получить о них какую-либо статистическую информацию, при определении оптимального решения можно использовать критерий Вальда.

Критерий Вальда является критерием крайнего пессимизма, т.к. здесь игрок А исходит из предположения, что природа П «действует» против него наихудшим образом, т.е. реализует такие состояния $П_j$, при которых величина его выигрыша принимает наименьшее значение.

Показатели эффективности каждой чистой стратегии рассчитываются по формуле:

$$w_i = \min_{1 \le j \le n} a_{ij}, \left(i = \overline{1,m}\right). \tag{7}$$

Оптимальной по критерию Вальда считается та чистая стратегия, показатель эффективности которой будет максимальным, т.е. обеспечивается максимин

$$w = \max_{1 \le i \le m} w_i = \max_{1 \le i \le m} \min_{1 \le j \le n} a_{ij}. \tag{8}$$

Критерий Вальда часто также называют максиминным критерием.

Выбранные таким образом варианты полностью исключают риск. Это означает, что принимающий решение не может столкнуться с худшим результатом, чем тот, на который он ориентируется.

Применение критерия Вальда бывает оправдано, если ситуация, в которой принимается решение, следующая:

- о возможности появления внешних состояний $П_j$ ничего не известно;
- приходится считаться с появлением различных внешних состояний $П_j$;
- решение реализуется только один раз;
- необходимо исключить какой бы то ни было риск.

4. Критерий Сэвиджа

Критерий Сэвиджа, как и критерий Вальда, является критерием крайнего пессимизма, ибо и здесь игрок А исходит из предположения, что природа реализует самые неблагоприятные для него состояния. Критерий Сэвиджа рекомендует выбирать в качестве оптимальной ту чистую стратегию, при которой минимизируется величина максимального риска.

Таким образом, показатель эффективности определяется как величина максимального риска:

$$s_i = \max_{1 \le j \le n} r_{ij}, \quad \left(i = \overline{1,m}\right). \tag{9}$$

А цена игры равна

$$s = \min_{1 \le i \le m} s_i = \min_{1 \le i \le m} \max_{1 \le j \le n} r_{ij}. \tag{10}$$

При использовании критерия Сэвиджа ситуация, в которой принимается решение, должна удовлетворять тем же условиям, что и при применении критерия Вальда.

5. ***Критерий Гурвица***

Занять более уравновешенную позицию, которая находится где-то между точкой зрения крайнего оптимизма и крайнего пессимизма, предлагает критерий Гурвица. Его также часто называют критерием пессимизма-оптимизма.

В области чистых стратегий показатель эффективности определяется из условия:

$$g_i = \gamma \min_{1 \le j \le n} a_{ij} + (1-\gamma) \max_{1 \le j \le n} a_{ij}, \quad \left(i = \overline{1,m}, \quad 0 \le \gamma \le 1\right) \tag{11}$$

Оптимальной по Гурвицу считается та чистая стратегия, показатель эффективности которой принимает наибольшее значение

$$g = \max_{1 \le i \le m} g_i = \max_{1 \le i \le m} \left\{ \gamma \min_{1 \le j \le n} a_{ij} + (1-\gamma) \max_{1 \le j \le n} a_{ij} \right\}, \quad 0 \le \gamma \le 1. \tag{12}$$

Параметр γ выбирается из субъективных соображений, потому что на практике очень трудно найти количественную характеристику для тех долей оптимизма и пессимизма, которые присутствуют при принятии решения. Чаще всего γ полагают равным 0,5.

При $\gamma = 1$ критерий Гурвица превращается в критерий Вальда (крайнего пессимизма).

При $\gamma = 0$ – в критерий крайнего оптимизма, или критерий «азартного игрока», делающего ставку на то, что исход игры будет для него самым благоприятным:

$$g = \max_{1 \le i \le m} g_i = \max_{1 \le i \le m} \max_{1 \le j \le n} a_{ij} \tag{13}$$

При $0 \prec \gamma \prec 1$ получается нечто среднее между точкой зрения крайнего оптимизма и крайнего пессимизма.

Критерий Гурвица применяется в случае, когда:

1) о вероятностях появления состояния $П_j$ ничего не известно;
2) с появлением состояния $П_j$ необходимо считаться;
3) реализуется только малое количество решений;
4) допускается некоторый риск.

6. ***Критерий Ходжа-Лемана***

Этот критерий опирается одновременно на критерий Вальда и критерий Байеса-Лапласа. С помощью параметра ν выражается степень доверия к используемому распределений вероятностей, а коэффициент (1-ν) характеризует количественно степень пессимизма игрока А. Чем больше доверия игрока А данному распределению вероятностей состояний природы, тем меньше пессимизма и наоборот.

Если доверие велико, то доминирует критерий Байеса-Лапласа, в противном случае – критерий Вальда, т.е. показатель эффективности чистой стратегии A_i равен:

$$h_i = \nu \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_i + (1-\nu) \min_{1 \le j \le n} a_{ij}, \quad \left(i = \overline{1,m}, \quad 0 \le \nu \le 1\right). \tag{14}$$

Стратегия с максимальным показателем эффективности является оптимальной. Цена игры определяется по формуле:

$$h = \max_{1 \le i \le m} h_i = \max_{1 \le i \le m} \left\{ \nu \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_i + (1-\nu) \min_{1 \le j \le n} a_{ij} \right\}, \quad 0 \le \nu \le 1 \tag{15}$$

При ν=1 критерий Ходжа-Лемана переходит в критерий Байеса-Лапласа, а при ν=0 становится критерием Вальда.

Выбор ν субъективен т.к. определить степень достоверности какой-либо функции распределения довольно сложно.

Для применения критерия Ходжа-Лемана желательно, чтобы ситуация в которой принимается решение, удовлетворяла свойствам:

- вероятности появления состояния Пj неизвестны, но некоторые предположения о распределении вероятностей возможны;
- принятое решение теоретически допускает бесконечно много реализаций;
- при малых числах реализации допускается некоторый риск.

7. ***Критерий произведений***

Критерий произведений используется в тех случаях, когда все элементы платежной матрицы положительны, т.е. $a_{ij} \succ 0, i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}$. Если это условие нарушается, то можно перейти к строго положительным значениям с помощью преобразования $a_{ij}+a$ при подходящем образом подобранном *a*>0. Результат при этом будет, естественно, зависеть от *a*.

При использовании этого критерия показатель эффективности каждой чистой стратегии определяется по формуле:

$$p_i = \prod_{j=1}^{n} a_{ij}, \left(i = \overline{1,m}\right). \tag{16}$$

Оптимальной по критерию произведений будет та чистая стратегия, показатель эффективности которой будет наибольшим.

$$p = \max_{1 \le i \le n} p_i = \max_{1 \le i \le m} \prod_{j=1}^{n} a_{ij} . \qquad (17)$$

Применение этого критерия обусловлено следующими обстоятельствами:

1) вероятности появления состояния $П_j$ неизвестны;

2) с появлением каждого из состояний $П_j$ по отдельности необходимо считаться;

3) критерий применим и при малом числе реализаций решения;

4) некоторый риск допускается.

Пример.

«Фото Колор» – небольшой производитель химических реактивов и оборудования, которые используются некоторыми фотостудиями при изготовлении 35-мм фильмов. Один из продуктов, который предлагает «Фото Колор» – фиксаж ВС-6. Накопленный опыт работы показывает, что спрос на этот продукт может составлять 11, 12 или 13 ящиков в неделю. От продажи каждого ящика фирма получает 350 руб. прибыли. ВС-6, как и многие фотографические реактивы, имеет очень малый срок годности. Поэтому, если ящик не продан к концу недели, его следует уничтожить. Так как каждый ящик обходится фирме в 560 рублей, она теряет эту сумму в случае, если ящик не продан к концу недели. Кроме того, если спрос на продукт будет высок, а произведено ВС-6 меньше, то фирма понесет убытки, связанные с недополученной прибылью в размере 160 руб. за ящик.

Определить еженедельный объем производства фиксажа ВС-6, обеспечивающий фирме наибольшую прибыль.

Решение:

В рассматриваемой ситуации в качестве сознательного игрока А выступает фирма «Фото Колор». Ее чистыми стратегиями будут: $А_1$ – решение о еженедельном выпуске 11 ящиков фиксажа ВС-6, $А_2$ – решения о еженедельном выпуске 12 ящиков, $А_3$ – решение о еженедельном выпуске 13 ящиков.

В качестве второго игрока будем рассматривать совокупность всех внешних обстоятельств, в которых формируется спрос на продукт, – природу П. В данном случае природа может реализовать любое из своих состояний: $П_1$ – еженедельный спрос на фиксаж ВС-6 составляет 11 ящиков, $П_2$ – 12 ящиков, $П_3$ – 13 ящиков.

Выигрыши a_{ij} игрока А – еженедельная прибыль от продажи ВС-6 представлены в следующей таблице.

	$П_1$ (11)	$П_2$ (12)	$П_3$ (13)
$А_1$ (11)	3850	3690	3530
$А_2$ (12)	3290	4200	4040
$А_3$ (13)	2730	3640	4550

Наиболее благоприятными будут комбинации ($А_1$; $П_1$), ($А_2$; $П_2$) и ($А_3$; $П_3$), когда еженедельный спрос на фиксаж будет совпадать с объемом производства. В этом случае прибыль будет равна

$a_{11} = 11*350 = 3850$ руб.,

$a_{22} = 12*350 = 4200$ руб.,

$a_{33} = 13*350 = 4550$ руб.

В случае если еженедельный спрос на продукт превышает объем выпуска (ситуации ($А_1$; $П_2$), ($А_1$; $П_3$) и ($А_2$; $П_3$)), то прибыль будет равна соответственно

$a_{12} = 11*350 - 160 = 3690$ руб.,

$a_{13} = 11*350 - 2*160 = 3530$ руб.,

$a_{23} = 12*350 - 160 = 4040$ руб.

Если же объем выпуска продукции будет превышать спрос (ситуации ($А_2$; $П_1$), ($А_3$; $П_1$) и ($А_3$; $П_2$)), то имеем

$a_{21} = 11*350 - 560 = 3290$ руб.

$a_{31} = 11*350 - 2*560 = 2730$ руб. и

$a_{32} = 12*350 - 560 = 3640$ руб.

Очевидно, что в платежной матрице нет доминирующих стратегий, поэтому упростить ее нельзя.

Прежде чем начать анализ, построим матрицу рисков, которая позволит более четко выявить преимущество одной стратегии по сравнению с другой при данном состоянии природы. Расчет производим, используя формулу (1).

	$П_1$ (11)	$П_2$ (12)	$П_3$ (13)
$А_1$ (11)	0	510	1020
$А_2$ (12)	560	0	510
$А_3$ (13)	1120	560	0

Подсчитаем показатели эффективности стратегий

- по критерию Байеса в предположении, что вероятности продать 11, 12 или 13 ящиков в течение недели равны 0,45, 0,35 и 0,2,
- по критерию Лапласа в предположении, что эти вероятности в равной мере правдоподобны и равны 1/3,
- по критерию Ходжа-Лемана с коэффициентом доверия к вероятностям состояний природы, например, $\nu = 0,6$,
- по критерию Вальда, критерию Сэвиджа, критерию произведений, критерию Гурвица с показателем $\gamma = 0$ (крайнего оптимизма), критерию Гурвица с показателем оптимизма, например, $\gamma = 0,5$.

Данные результаты расчетов приведены в таблице.

	$П_1$ (11)	$П_2$ (12)	$П_3$ (13)	Байеса	Лапласа	Вальда	Гурвица при $\gamma = 0$ (крайнего оптимизма)	произведений
A_1 (11)	3850	3690	3530	3730	3690	3530	3850	50148945000
A_2 (12)	3290	4200	4040	3758,5	3843,33	3290	4200	55824720000
A_3 (13)	2730	3640	4550	3412,5	3640	2730	4550	45214260000
q_B	0,45	0,35	0,2					
q_L	0,333	0,333	0,333					

Для расчета показателей эффективности по критерию Сэвиджа используем матрицу рисков.

	$П_1$ (11)	$П_2$ (12)	$П_3$ (13)	Сэвиджа
A_1 (11)	0	510	1020	1020
A_2 (12)	560	0	510	560
A_3 (13)	1120	560	0	1120

	$П_1$ (11)	$П_2$ (12)	$П_3$ (13)	Гурвица при $\gamma = 0,5$		
				$\gamma \min\limits_j a_{ij}$	$(1-\gamma)\max\limits_j a_{ij}$	g_i
A_1 (11)	3850	3690	3530	1765	1925	3690
A_2 (12)	3290	4200	4040	1645	2100	3745
A_3 (13)	2730	3640	4550	1365	2275	3640

В данном примере у решения имеются две поворотные точки относительно весового множителя γ : до $\gamma = 0,39$ в качестве оптимальной выбирается стратегия A_3, при $0,39 \le \gamma \le 0,59$ – стратегия A_2, а при больших значениях – A_1.

	$П_1$ (11)	$П_2$ (12)	$П_3$ (13)	Ходжа – Лемана при $\nu = 0,6$		
				$\nu \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} q_i$	$(1-\nu) \min\limits_{1 \le j \le n} a_{ij}$	h_i
A_1 (11)	3850	3690	3530	2214	1412	3626
A_2 (12)	3290	4200	4040	2306	1316	3622
A_3 (13)	2730	3640	4550	2184	1092	3276
q_{H-L}	0,333	0,333	0,333			

Критерий Ходжа-Лемана рекомендует стратегию A_1 (выпуск 11 ящиков) – так же как и критерий Вальда. Смена рекомендуемой стратегии происходит при $\nu = 0,62$. Поэтому если, степень доверия игрока А к используемому распределению вероятностей достаточно высока в качестве оптимальной выбирается стратегия A_2.

При использовании 8 критериев стратегия A_2 выбиралась в качестве оптимальной 5 раз, стратегия A_1 – 2 раза и стратегия A_3 – 1 раз. Поэтому можно сделать вывод о том, что применение стратегии A_2 (выпуск 12 ящиков фиксажа ВС-6) является более предпочтительным.

Примечания:

1. Абчук, В.А. Экономико-математические методы: Элементарная математика и логика. Методы исследования операций / В.А. Абчук. – СПб.: Союз, 1999. – 246с.
2. Аронович, А.Б Сборник задач по исследованию операций / А.Б. Аронович, М.Ю. Афанасьев, Б.П. Суворов. – М.: Изд-во МГУ, 1997. – 252с.
3. Грешилов, А.А. Как принять наилучшее решение в реальных условиях? / А.А. Грешилов. – М.: Радио и связь, 1991. – 118с.
4. Исследование операций в экономике: учебное пособие / Н.Ш. Кремер [и др.]. – М.: ЮНИТИ, 1997. – 428с.
5. Лабскер, Л.Г. Общая методика конструирования критериев оптимальности решений в условиях риска и неопределенности / Л.Г. Лабскер, Е.В. Яновская // Финансовый менеджмент. – 2002. – №5.
6. Просветов, Г.И. Математические методы в экономике: учебно-методическое пособие / Г.И. Просветов. – М.: Изд-во РДЛ, 2004. – 364с.
7. Экономико-математические методы и прикладные модели: учеб. пособие для вузов / Под ред. В.В. Федосеева. – М.: ЮНИТИ, 2000. – 391с.