МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

УДК 517.91/93
ББК 22.161.61
У 95

Д.С. Ушхо, О.А. Пономарёва

Особые точки кубической дифференциальной системы на экваторе сферы Пуанкаре

(Рецензирована)

Аннотация:

В работе изучены все возможные типы особых точек кубической системы на бесконечности в случае, когда их число равно четырем. Установлено, что ранее полученный результат Шарипова Ш.Р. является лишь частным случаем результатов, полученных в настоящей заметке.

Ключевые слова:

Особая точка, состояние равновесия, точка покоя, узел, седло, седлоузел, топологический узел, топологическое седло.

При исследовании качественной структуры разбиения на траектории у автономной дифференциальной системы

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y), \frac{dy}{dt} = Q(x, y) \qquad (1)$$

с аналитическими правыми частями важную роль играют сведения о поведении её траекторий в бесконечно удаленных частях фазовой плоскости. Так, например, поведение сепаратрис седла $A\left(-\frac{1}{\mu};0\right)$ системы [1]:

$$\frac{dx}{dt} = y, \frac{dy}{dt} = -x - \alpha y - \mu x^2 - y^2,$$

где $\alpha > 0, \mu > 0$, однозначно определяется посредством исследования состояний равновесия этой системы на бесконечности. Во многих случаях установить существование предельного цикла и его устойчивость для системы (1) удается благодаря знанию поведения траекторий (1) на бесконечности.

Таким образом, вопрос об исследовании поведения траекторий системы (1) на экваторе сферы Пуанкаре, которому посвящена предлагаемая нами работа, имеет весьма большое значение.

Впервые попытка исследования бесконечно удалённых особых точек дифференциальной системы

$$\frac{dx}{dt} = \sum_{i+j=0}^{3} a_{ij} x^i y^j \equiv P(x, y), \frac{dy}{dt} = \sum_{i+j=0}^{3} b_{ij} x^i y^j \equiv Q(x, y) \qquad (2)$$

была предпринята в заметке [2]. Однако, как оказалось, автором [2] получены лишь некоторые частные случаи более общих результатов исследования системы (2), проведенного нами.

Отметим один любопытный факт, который, по сути дела, послужил поводом к написанию настоящей заметки. При изучении поведения траекторий системы (2), обладающей шестью инвариантными прямыми, в работе [3] установлено, что дифференциальная система

$$\frac{dx}{dt} = x(x-1)(ckx + y + c), \frac{dy}{dt} = y(y-1)((c - ck + 1)x + cy - 2c - 1)$$

при $c = -2, k = -\frac{1}{2}$ имеет на бесконечности четыре состояния равновесия: два простых дикритических узла, одно простое седло и одно сложное состояние равновесия типа « седлоузел». Вместе с тем по утверждению автора [2] в случае четырёх состояний равновесия системы (2) на бесконечности не допускается наличие сложных точек покоя. Таким образом, теорема 1 [2], вообще говоря, неверна.

В данной работе ограничимся рассмотрением случая четырёх особых точек системы (2) на бесконечности. При этом будем считать выполненными условия:

$$a_{ij}, b_{ij} \in R, (P, Q) = 1, \sum_{i+j=3} |a_{ij}| > 0, \sum_{i+j=3} |b_{ij}| > 0 \qquad (3)$$

$$a_{03}u^4 + (a_{12} - b_{03})u^3 + (a_{21} - b_{12})u^2 + (a_{30} - b_{21})u - b_{30} \not\equiv 0 \qquad (4)$$

Кроме того, система, полученная в результате параллельного переноса начала координат в исследуемую точку покоя, имеет невырожденную линейную часть.

Так как рассматриваемая нами система (2) является полиномиальной, то согласно [1] удобно пользоваться преобразованиями Пуанкаре:

$$x=\frac{1}{z},\ y=\frac{u}{z}\quad (5);\qquad x=\frac{v}{z},\ y=\frac{1}{z}. \qquad (6)$$

Применяя преобразование (5) к системе (2), получаем систему:

$$\begin{aligned}\frac{du}{dt}&=b_{30}+(b_{21}-a_{30})u+b_{20}z+(b_{12}-a_{21})u^2+(b_{11}-a_{20})uz+b_{10}z^2+(b_{03}-a_{12})u^3+\\&+(b_{02}-a_{11})u^2z+(b_{01}-a_{10})uz^2+b_{00}z^3-a_{03}u^4-a_{02}u^3z-a_{01}u^2z^2-a_{00}uz^3,\\ \frac{dz}{dt}&=-a_{30}z-a_{21}uz-a_{20}z^2-a_{12}u^2z-a_{11}uz^2-a_{10}z^3-a_{03}u^3z-a_{02}u^2z^2-a_{01}uz^3-a_{00}z^4\end{aligned} \qquad (7)$$

Известно [1], что все бесконечно удаленные особые точки системы (2), кроме одной («концов оси y»), являются состояниями равновесия системы (7). Поэтому преобразование (6) применяем к системе (2) лишь для установления характера точки покоя $v=z=0$ системы:

$$\begin{aligned}\frac{dv}{dt}&=a_{03}+(a_{12}-b_{03})v+a_{02}z+(a_{21}-b_{12})v^2+(a_{11}-b_{02})vz+a_{01}z^2+(a_{30}-b_{21})v^3+\\&+(a_{20}-b_{11})v^2z+(a_{10}-b_{01})vz^2+a_{00}z^3-b_{30}v^4-b_{20}v^3z-b_{10}v^2z^2-b_{00}vz^3,\\ \frac{dz}{dt}&=-b_{03}z-b_{12}vz-b_{02}z^2-b_{21}v^2z-b_{11}vz^2-b_{01}z^3-b_{30}v^3z-b_{20}v^2z^2-b_{10}vz^3-b_{00}z^4\end{aligned} \qquad (8)$$

Особые точки системы (7) определяются из системы уравнений:

$$z=0,\ f(u)\equiv b_{30}+(b_{21}-a_{30})u+(b_{12}-a_{21})u^2+(b_{03}-a_{12})u^3-a_{03}u^4=0 \qquad (9)$$

В силу нашего предположения (4) окружность круга Пуанкаре состоит из траекторий системы (7). Поэтому эта система не имеет состояний равновесия типа фокуса и центра.

Из уравнения (9) и вида системы (8) следует, что система (2) на бесконечности имеет не более четырёх особых точек.

Теорема 1. Если система (2) имеет на бесконечности четыре состояния равновесия, и все они простые, то они не могут быть одновременно сёдлами.

Доказательство. Непосредственными вычислениями можно убедиться в том, что корни характеристического уравнения особой точки $(\bar{u},0)$ системы (7) определяются по формулам:

$$\lambda_1(\bar{u})=-a_{30}-a_{21}\bar{u}-a_{12}\bar{u}^2-a_{03}\bar{u}^3,\lambda_2(\bar{u})=f'(\bar{u}) \qquad (10)$$

а особой точки $(0,0)$ системы (8) – по формулам:

$$\lambda_1(0)=-b_{03},\lambda_2(0)=a_{12}-b_{03} \qquad (11)$$

Не нарушая общности рассуждений, считаем, что $A(u=z=0)$, $B(u=1,z=0)$, $C(u=u_0,z=0)$, $D(v=z=0)$ – простые состояния равновесия системы (2) на бесконечности, разумеется, при условии $u_0\neq 1;0$. Тогда по необходимости выполняются условия:

$$b_{30}=a_{03}=0 \qquad (12),$$

$$(b_{21}-a_{30})(a_{12}-b_{03})\neq 0 \qquad (13),$$

$$b_{12}-a_{21}=a_{12}-b_{03}+a_{30}-b_{21} \qquad (14),$$

$$u_0=\frac{b_{21}-a_{30}}{b_{03}-a_{12}} \qquad (15).$$

Корни характеристических уравнений особых точек A,B и C с учётом (10) запишутся, соответственно, в виде:

$$\lambda_1(0)=-a_{30},\lambda_2(0)=b_{21}-a_{30} \qquad (16);$$

$$\lambda_1(1)=-a_{30}-a_{21}-a_{12},\lambda_2(1)=a_{30}-b_{21}+b_{03}-a_{12} \qquad (17);$$

$$\begin{aligned}\lambda_1(u_0)&=-\left(\frac{a_{12}(b_{21}-a_{30})^2}{(b_{03}-a_{12})^2}+\frac{a_{21}(b_{21}-a_{30})}{b_{03}-a_{12}}+a_{30}\right),\\ \lambda_2(u_0)&=\frac{(b_{21}-a_{30})(b_{21}-a_{30}+a_{12}-b_{03})}{b_{03}-a_{12}}\end{aligned} \qquad (18).$$

Простая особая точка, как известно [1], является седлом, если произведение её характеристических чисел отрицательно. С учетом (11), (16) – (18) A,B,C,D – простые сёдла, если имеет место система неравенств

$$b_{03}(a_{12}-b_{03})>0, a_{30}(b_{21}-a_{30})>0, (a_{30}+a_{21}+a_{12})(a_{30}-b_{21}+b_{03}-a_{12})>0,$$

$$\frac{(b_{21}-a_{30})(b_{21}-a_{30}+a_{12}-b_{03})}{b_{03}-a_{12}}\left(\frac{a_{12}(b_{21}-a_{30})^2}{(b_{03}-a_{12})^2}+\frac{a_{21}(b_{21}-a_{30})}{b_{03}-a_{12}}+a_{30}\right)>0 \qquad (19)$$

Но система (19) не совместна. Теорема доказана.

Теорема 2. Если система (2) имеет на экваторе сферы Пуанкаре четыре состояния равновесия, то среди них не более трёх сложных.

Доказательство. Так как по условию система (2) имеет четыре состояния равновесия на бесконечности, то согласно (13) ни один из коэффициентов $b_{21}-a_{30}$ и $a_{12}-b_{03}$ в уравнении (9) не равен нулю. Если же предположить, что все четыре состояния равновесия: A, B, C, D – сложные, то для каждого из них, по крайней мере, один характеристический корень равен нулю. Поэтому $a_{30}=b_{03}=0$. Но в силу (11) и (16) $b_{21}a_{12}\neq 0$. Более того, $b_{21}+a_{12}\neq 0$ (в противном случае B и C совпадут). Итак, $\lambda_2(1)\neq 0,$ но $\lambda_1(1)=-a_{21}-a_{12}=0$, $\lambda_2(u_0)\neq 0$, но $\lambda_1(u_0)=-\left(\frac{a_{12}b_{21}{}^2}{a_{12}{}^2}-\frac{a_{21}b_{21}}{a_{12}}\right)=0$. Из системы уравнений $a_{21}+a_{12}=b_{21}-a_{21}=0$ следует равенство $b_{21}+a_{12}=0$, противоречащее тому, что B и C – несовпадающие состояния равновесия. Теорема доказана.

Теорема 3. Если система (2) имеет на экваторе сферы Пуанкаре четыре состояния равновесия, то среди них нет ни одного с двумя нулевыми характеристическими числами.

Следствие. Если система (2) имеет на экваторе сферы Пуанкаре четыре состояния равновесия, то сложные из них могут быть седлоузлами, либо топологическими узлами, либо топологическими сёдлами (см. т. 65 [1,с.379]).

Теорема 4. Если система (2) имеет на бесконечности три сложных состояния равновесия и одно простое, то простое состояние равновесия непременно является узлом.

Для краткости дальнейшего изложения введём обозначения: у – простой узел; с – простое седло; су – седлоузел, к которому примыкают два гиперболических и один параболический секторы; ту – топологический узел (сложная точка покоя, достаточно малая окрестность U_ε которой не содержит ни эллиптических, ни гиперболических секторов так, что любая траектория, проходящая через U_ε, стремится к этой точке в определённом направлении); тс – топологическое седло (сложная точка покоя, к которой примыкают четыре гиперболических сектора); сэ – состояние равновесия с эллиптическим сектором (сложная точка покоя, к которой примыкают один гиперболический и один эллиптический секторы).

Теорема 5. Если система (2) имеет на бесконечности четыре состояния равновесия, из которых три сложных, то возможны следующие случаи распределения сложных состояний равновесия: а) 3 су; б) 3 тс; в) 3 ту; г) 2 су, 1 ту; д) 2 су, 1 тс; е) 1 су, 2 ту; ж) 1 су, 2 тс; з) 1 су, 1 ту, 1 тс; и) 2 ту, 1 тс; к) 2 тс, 1 ту.

Теорема 6. Если система (2) имеет на бесконечности четыре состояния равновесия, в том числе два простых и два сложных, то возможны следующие случаи их распределения: а) 2 су, 1 с, 1 у; б) 2 су, 2 у; в) 1 су, 1 ту, 1 с, 1 у; г) 1 су, 1 ту, 2 у; д) 1 су, 1 тс, 1 с, 1 у; е) 1 су, 1 тс, 2 у; ж) 2 ту, 1 с, 1 у; з) 2 ту, 2 у; и) 1 ту, 1 тс, 1 с, 1 у; к) 1 ту, 1 тс, 2 у; л) 2 тс,1 с, 1 у; м) 2 тс, 2 у.

Теорема 7. Если на экваторе сферы Пуанкаре система (2) имеет четыре состояния равновесия A, B, C, D, в том числе одно кратное, то остальные три одновременно не могут быть сёдлами.

Доказательство. Рассмотрим случай, когда A – кратное состояние равновесия (в случае B, C, D – кратных состояний равновесия рассуждения аналогичны).

Допустим, что B, C, D – простые сёдла. Тогда имеет место система:

$$a_{30}=0, -(a_{21}+a_{12})(b_{03}-b_{21}-a_{12})<0, -b_{03}(a_{12}-b_{03})<0,$$

$$-\left(\frac{a_{12}b_{21}{}^2}{(b_{03}-a_{12})^2}+\frac{a_{21}b_{21}}{b_{03}-a_{12}}\right)\frac{b_{12}(b_{21}+a_{12}-b_{03})}{b_{03}-a_{12}}<0.$$

Преобразуем эту систему к равносильной системе:

$$(a_{21}+a_{12})(b_{21}+a_{12}-b_{03})<0 \qquad (20),$$

$$\frac{b_{21}{}^2(b_{21}+a_{12}-b_{03})}{(b_{03}-a_{12})^2}\left(\frac{a_{12}b_{21}}{b_{03}-a_{12}}+a_{21}\right)>0 \qquad (21),$$

$$b_{03}(b_{03}-a_{12})<0 \qquad (22).$$

Пусть $b_{21}+a_{12}-b_{03}>0$ (в случае $b_{21}+a_{12}-b_{03}<0$ рассуждения аналогичны). Тогда из (21) и (22) следуют неравенства: $a_{21}+a_{12}<0$ (23), $\frac{a_{12}b_{21}}{b_{03}-a_{12}}+a_{21}>0$ (24).

Умножая обе части неравенства (23) на (-1) и складывая с неравенством (24), получаем неравенство $\frac{a_{12}b_{21}}{b_{03}-a_{12}}-a_{12}>0$, из которого следует неравенство $a_{12}(b_{03}-a_{12})>0$ (25). Умножив обе части неравенства (25) на (-1) и сложив с неравенством (22), получаем невыполнимое неравенство $(b_{03} - a_{12})^2 < 0$. Теорема доказана.

Из теоремы 7 следует

Теорема 8. Если система (2) имеет на бесконечности четыре состояния равновесия, в том числе одно сложное, то возможны следующие случаи их распределения: а) 1 су, 3 у; б) 1 су, 2 с, 1 у; в) 1 су, 2 у,1 с; г) 1 ту, 3 у; д) 1 ту, 2 с,1 у; е) 1 ту, 2 у, 1 с; ж) 1 тс, 3 у; з) 1 тс, 2 с, 1 у; и) 1 тс, 2 у, 1 с.

В заключение приведём примеры систем дифференциальных уравнений (2), заведомо не удовлетворяющих теореме 1 [2].

Пример 1. Система дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = x + 3x^2 y + xy^2, \frac{dy}{dt} = 3xy + y^2 + 3x^2 y + xy^2$$

имеет на бесконечности четыре точки покоя:

$A(u = z = 0)$ – тс, $D(v = z = 0)$ – су,

$C(u = -3, z = 0)$ – ту, $B(u = 1, z = 0)$ – у.

Пример 2. $A(u = z = 0)$ и $D(v = z = 0)$ – топологические узлы, $B(u = 1, z = 0)$ и $C(u = -3, z = 0)$ – простые устойчивые узлы дифференциальной системы

$$\frac{dx}{dt} = x - y + x^2 y + xy^2, \frac{dy}{dt} = 4x - y + 3x^2 y - xy^2$$

на бесконечности.

Пример 3. Для дифференциальной системы

$$\frac{dx}{dt} = x + x^2 y + xy^2, \frac{dy}{dt} = x + y - 4x^2 y + 4xy^2 + 2y^3$$

$A(u = z = 0)$ – ту, $B(u = 1, z = 0)$ – с,

$C(u = -4, z = 0)$ – с, $D(v = z = 0)$ – у.

Примечания:

1. Андронов А.А. Качественная теория динамических систем второго порядка / А.А. Андронов, Е.А. Леонтович, И.И. Гордон, А.Г. Майер. – М.: Наука, 1966. – 568с.
2. Шарипов Ш.Р. О распределении особых точек на экваторе сферы Пуанкаре / Ш.Р. Шарипов // Труды Самаркандского гос. ун-та имени Алишера Навои. – Самарканд: Изд-во гос. ун-та, 1964. – Вып. № 144. – С. 89-92.
3. Ушхо Д.С. О характеристиках кубической дифференциальной системы с шестью линейными интегралами / Д.С. Ушхо // Труды ФОРА. – Майкоп: Изд-во АГУ, 2004. – №9. – С. 88-105.