УДК 51
ББК 22.11
М 63
Дж. Д. Мирзов

Об уравнениях со свойством O_1

(Рецензирована)

Аннотация:

В качественной теории хорошо известны признаки Аткинсона и Белогорца колеблемости всех правильных решений нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка. Для линейных же уравнений подобных критериев не существует. В работе дается эффективное необходимое и достаточное условие того, чтобы каждое нетривиальное решение линейного уравнения было колеблющимся либо монотонно стремилось к бесконечности при неограниченном возрастании аргумента.

Ключевые слова:

Ключевые слова: уравнения типа Эмдена-Фаулера, правильные решения, колеблемость и (или) монотонность решений.

Рассмотрим уравнение

$$u'' + a(t)|u|^n \, sign\, u = 0, \qquad (1)$$

где $n > 0$, $a: R_+ \to R_+$ локально суммируемая функция. Нас будет интересовать поведение правильных решений уравнения (1) в окрестности бесконечности. Необходимые понятия и определения можно найти в [1] или [2].

Ф.В. Аткинсон [3] доказал, что если $n > 1$, то для колеблемости всех правильных решений уравнения (1) необходимо и достаточно, чтобы

$$\int^{+\infty} t a(t) dt = +\infty. \qquad (2)$$

Ш. Белогорец [4] установил, что если $0 < n < 1$, то для колеблемости всех правильных решений уравнения (1) необходимо и достаточно, чтобы

$$\int^{+\infty} t^n a(t) dt = +\infty. \qquad (3)$$

Известно, что для линейных уравнений второго порядка нет интегральных признаков колеблемости решений, аналогичных критериям Ф.В. Аткинсона и Ш. Белогорца. Поэтому, заметив, что если $n \to 1$ условие (3) «приближается» к (2), представляется интересным вопрос: чем является условие (2) для уравнения (1) при $n = 1$?

Ответу на этот вопрос посвящена данная заметка.

Скажем, что уравнение (1) обладает свойством O_1, если каждое его правильное решение $u(t)$ является колеблющимся либо $|u(t)|$ монотонно стремится к $+\infty$ при $t \to +\infty$.

Теорема. Пусть $n = 1$. Тогда (2) есть необходимое и достаточное условие для наличия свойства O_1 у уравнения (1).

Доказательство. Сначала докажем достаточность. Пусть имеет место (2). Покажем, что все нетривиальные решения уравнения

$$u'' + a(t)u = 0 \qquad (4)$$

являются колеблющимися либо по модулю монотонно стремятся к $+\infty$. Если уравнение (4) имеет хотя бы одно нетривиальное колеблющееся решение, то все его решения являются колеблющимися, поэтому имеет место свойство O_1. Предположим, что уравнение (4) имеет неколеблющееся решение $u(t)$. Тогда

$$u''(t) sign\, u(t) = -a(t)|u(t)| \le 0 \qquad (5)$$

при больших значениях аргумента и

$$\int^{+\infty} a(t) dt < +\infty.$$

Из (5) следует, что $u'(t)$ монотонная функция в некоторой окрестности $+\infty$. Поэтому в силу (2) $u'(t) \neq 0$ при достаточно больших t и, следовательно,

$$u'(t)u(t) \neq 0$$

при больших значениях аргумента. Если предположить, что

$$u'(t)u(t) < 0,$$

то из (5) имеем

$$\left|u'(t)\right|' = a(t)\left|u(t)\right| \geq 0 .$$

Интегрирование последних двух неравенств от t_0 до t дает противоречие.

Таким образом, имеем

$$u'(t)u(t) > 0,$$

т.е. $|u(t)|$ возрастает в некоторой окрестности $+\infty$. Покажем, что

$$\lim_{t\to+\infty}|u(t)| = +\infty.$$

Допустим, что это не так. Тогда из равенства

$$t|u(t)|' - |u(t)| + \int_{t_0}^{t} \tau a(\tau)|u(\tau)|d\tau = c_0,$$

где $c_0 = t_0|u(t_0)|' - |u(t_0)|$, ввиду (2) получаем

$$t|u(t)|' \leq -1$$

при достаточно больших значениях аргумента, что противоречит возрастанию $|u(t)|$. Достаточность доказана.

Теперь докажем необходимость условия (2). Допустим, что нарушается (2). Тогда

$$\int^{+\infty}\left(\int_t^{+\infty} a(\tau)d\tau\right)dt < +\infty.$$

Следовательно, по теореме 4.2. из [1] уравнение (4) имеет решение $u(t)$, обладающее свойством

$$\lim_{t\to+\infty} u(t) = c \neq 0.$$

Теорема доказана полностью.

Замечание. Теорема остается верной и при $n \neq 1$.

Примечания:

1. Мирзов Дж.Д. Асимптотические свойства решений систем нелинейных неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений, Майкоп, РИПО «Адыгея», 1993, 132с.
2. Mirzov J.D. Asymptotic Properties of Solutiony of Systems of Nonlinear Nonautonomous Ordinary Differential Equations, Folia Math.Fae.sci. nature. Univ. Masaryk. brun. 2004, №14, p.1-178.
3. Atkinson F.V. On second – order non – linear oscillations//Pacif.J.Math., 1955, 5, №1, p.643-647.
4. Belohorec S. Oscilatoricke riesenia istej nelinearnej diferencialnej rovnice druheho radu // Mat. – Fyz. Casop. SAV, 1961, 11, №4, s.250-255.