УДК 517.929
ББК 22.161
У 95
Д.С. Ушхо

Новое доказательство одной теоремы об оценке числа особых точек второй группы кубической дифференциальной системы

(Рецензирована)

Аннотация:

В статье приводится новое доказательство ранее опубликованного автором в журнале «Дифференциальные уравнения» утверждения: кубическая дифференциальная система не может иметь более пяти особых точек второй группы.

Ключевые слова:

Дифференциальные уравнения, кубическая дифференциальная система, особые точки второй группы.

Исследованию числа особых точек второй группы дифференциальной системы

$$\frac{dx}{dt}=\sum_{i+j=0}^{3}a_{ij}x^iy^j\equiv P_3(x,y),\ \frac{dy}{dt}=\sum_{i+j=0}^{3}b_{ij}x^iy^j\equiv Q_3(x,y). \quad (1)$$

где $a_{ij}, b_{ij}\in R$, $(P_3,Q_3)=1$, посвящена работа [1], основной результат которой сформулирован в виде теоремы 3: система (1) не может иметь более пяти особых точек второй группы с чисто мнимыми характеристическими корнями.

Напомним, что особая точка $M(x_0,y_0)$ типа «фокус» или «центр» дифференциальной системы

$$\frac{dx}{dt}=P(x,y),\ \frac{dy}{dt}=Q(x,y). \quad (2)$$

называется особой точкой второй группы, если выполняется одно из условий:

$$P'_x(x_0,y_0)+Q'(x_0,y_0)=0,\ P'_x(x_0,y_0)Q'_y(x_0,y_0)-P'_y(x_0,y_0)Q'_x(x_0,y_0)>0, \quad (3)$$

$$P'_x(x_0,y_0)+Q'(x_0,y_0)=0,\ P'_x(x_0,y_0)Q'_y(x_0,y_0)-P'_y(x_0,y_0)Q'_x(x_0,y_0)=0, \quad (4)$$

Очевидно, условие (3) ((4)) соответствует случаю чисто мнимых (двух нулевых) корней характеристического уравнения особой точки $M(x_0,y_0)$.

Целью данной заметки является новое доказательство упомянутой теоремы 3[1].

Предварительно докажем некоторые вспомогательные утверждения.

Теорема 1. *Пусть система (1) имеет шесть состояний равновесия, расположенных на параболе* L*. Тогда* L *– изоклина этой системы.*

Доказательство. Существует [2] невырожденное линейное преобразование, переводящее параболу L в параболу $\overline{L}:\overline{y}=a\overline{x}^2$. При этом система (1) преобразуется к системе:

$$\frac{d\overline{x}}{dt}=\sum_{i+j=0}^{3}a_{ij}\overline{x}^i\overline{y}^j\equiv \overline{P}_3(\overline{x},\overline{y}),\ \frac{d\overline{y}}{dt}=\sum_{i+j=0}^{3}b_{ij}\overline{x}^i\overline{y}^j\equiv \overline{Q}_3(\overline{x},\overline{y}). \quad (5)$$

По условию система (5) имеет шесть состояний равновесия на параболе $\overline{L}$. Это возможно в том и только в том случае, когда

$$\overline{P}_3(\overline{x},a\overline{x}^2)\equiv\alpha(\overline{x}-a_1)(\overline{x}-a_2)...(\overline{x}-a_6),\ \overline{Q}_3(\overline{x},a\overline{x}^2)\equiv\beta(\overline{x}-a_1)(\overline{x}-a_2)...(\overline{x}-a_6), \quad (6)$$

где $a_i, i=\overline{1,6}$ – абсциссы точек равновесия, расположенных на $\overline{L}$. Из (6) следует, что

$$\left(\frac{d\overline{y}}{d\overline{x}}\right)_{\overline{y}=a\overline{x}^2}=\frac{\beta}{\alpha}-const,$$

то есть $\overline{L}$ – изоклина системы (5). Так как свойство кривой быть изоклиной дифференциальной системы инвариантно относительно аффинного преобразования [3], то парабола L – изоклина системы (1). Теорема доказана.

Теорема 2. *Если система (1) имеет шесть состояний равновесия, расположенных на кривой L второго порядка, являющейся эллипсом или гиперболой, то L – изоклина этой системы.*

Доказательство проведем в случае, когда L – эллипс, так как в случае гиперболы рассуждения аналогичны.

Если

$$\left(P_3(x,y)\right)_{(x,y)\in L} \equiv 0 \tag{7}$$

или

$$\left(Q_3(x,y)\right)_{(x,y)\in L} \equiv 0\,, \tag{8}$$

то L – изоклина бесконечности или нуля системы (1), и теорема доказана. Заметим, что одновременно тождества (7) и (8) не могут быть выполнены, так как $\left(P_3, Q_3\right) = 1$.

Пусть не выполняется ни одно из равенств (7) и (8). Тогда, не сужая общности рассуждений, считаем, что система (1) имеет шесть состояний равновесия на эллипсе $L: \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ [2]. Иначе говоря, система уравнений:

$$P_3(x,y) = 0,\ Q_3(x,y) = 0,\ x^2 = a^2 - \frac{a^2}{b^2}y^2, \tag{9}$$

имеет шесть решений.

Заменив x^2 в многочленах $P_3(x,y)$, $Q_3(x,y)$ в силу третьего уравнения системы (9), получаем систему уравнений:

$$f_2(y)x + f_3(y) = 0, \quad g_2(y)x + g_3(y) = 0, \quad x^2 = a^2 - \frac{a^2}{b^2}y^2, \tag{10}$$

равносильную системе (9). В системе (10):

$$f_2(y)x + f_3(y) \equiv \left(P_3(x,y)\right)_{x^2 = a^2 - \frac{a^2}{b^2}y^2},$$

$$g_2(y)x + g_3(y) \equiv \left(Q_3(x,y)\right)_{x^2 = a^2 - \frac{a^2}{b^2}y^2},$$

$f_i(y),\ g_i(y),\ i = 2,3$ – многочлены i-й степени.

Прежде всего отметим, что решения системы (10) расположены не менее чем на трех прямых $y = m_i$.

Случай 1. Все шесть состояний равновесия системы (1), расположенных на эллипсе L, принадлежат прямым $y = m_i$, $i = \overline{1,3}$. Тогда на каждой прямой из трех указанных лежат две особые точки. Это же означает, что при каждом $i \in \{1,2,3\}$ уравнения:

$$f_2(m_i)x + f_3(m_i) = 0,\ g_2(m_i)x + g_3(m_i) = 0$$

имеют два решения. Так как линейное уравнение имеет более одного решения в том и только в том случае, когда коэффициент при переменной и свободный член равны нулю, то:

$$f_2(y) \equiv 0,\ g_2(y) \equiv 0,\ f_3(y) \equiv \alpha(y - m_1)(y - m_2)(y - m_3),\ g_3(y) \equiv \beta(y - m_1)(y - m_2)(y - m_3).$$

Из двух последних тождеств следует, что $\left(\dfrac{Q_3(x,y)}{P_3(x,y)}\right)_{(x,y)\in L} = \dfrac{\beta}{\alpha} - const$, то есть L – изоклина системы (1).

Случай 2. Все шесть состояний равновесия системы (1), расположенных на эллипсе L, лежат на четырех прямых $y = m_i$, $i = \overline{1,4}$. Тогда на двух из них расположены две особые точки, а на двух других – по одной особой точке. Ради определенности считаем, что на прямых $y = m_1$ и $y = m_2$ расположены по два состояния равновесия. Тогда m_1, m_2 – корни уравнений $f_i(y) = 0,\ g_i(y) = 0,\ i = 2,3$. Так как в рассматриваемом случае $f_i(y) \not\equiv 0,\ g_i(y) \not\equiv 0$, то систему (10) перепишем в виде:

$$x = -\frac{f_3(y)}{f_2(y)},\quad g_3(y)f_2(y) - g_2(y)f_3(y) = 0,\quad f_3^{\,2}(y) - f_2^{\,2}(y)(a^2 - \frac{a^2}{b^2}y^2) = 0. \tag{11}$$

В силу выше отмеченного, а именно:

$$f_2(m_i) = f_3(m_i) = 0,$$

$$g_2(m_i) = g_3(m_i) = 0,\ i = 1,2,$$

второе и третье уравнения системы (11) запишутся в виде:

$$(y - m_1)^2(y - m_2)^2 M_1(y) = 0,$$

$$(y - m_1)^2(y - m_2)^2 N_2(y) = 0,$$

где $M_1(y)(N_2(y))$ – многочлены первой (второй) степени. Так как система (11) имеет еще два решения $y = m_3, y = m_4$, то $M_1(y) \equiv 0$. Это же означает, что

$$g_3(y) f_2(y) - g_2(y) f_3(y) \equiv 0 \qquad (12).$$

Из (12) следует, что

$$\frac{g_3(y)}{f_3(y)} \equiv \frac{g_2(y)}{f_2(y)} - const.$$

Отсюда следует, что

$$\left(\frac{Q_3(x,y)}{P_3(x,y)}\right)_{(x,y)\in L} \equiv \frac{g_2(y)x + g_3(y)}{f_2(y)x + f_3(y)} - const,$$

то есть L – изоклина системы (1).

Случай 3. Все шесть состояний равновесия системы (1), расположенных на эллипсе L, лежат на пяти прямых $y = m_i$, $i = \overline{1,5}$. Тогда на одной из них, например на прямой $y = m_1$, расположены два состояния равновесия. Таким образом,

$$f_2(m_1) = f_3(m_1) = 0, \; g_2(m_1) = g_3(m_1) = 0.$$

Поэтому уравнения системы (11) могут быть записаны в виде:

$$(y - m_1)^2 M_3(y) = 0, \; (y - m_1)^2 N_4(y) = 0.$$

Поскольку система (11) имеет, кроме $y = m_1$ еще четыре решения, то $M_3(y) \equiv 0$ ($M_3(y)$ – многочлен третьей степени). Следовательно, имеет место тождество (12), а значит коэффициенты в линейных относительно x первых двух уравнениях системы (10) пропорциональны. Поэтому

$$\left(\frac{Q_3(x,y)}{P_3(x,y)}\right)_{(x,y)\in L} \equiv \frac{g_2(y)x + g_3(y)}{f_2(y)x + f_3(y)} - const,$$

то есть L – изоклина системы (1).

Случай 4. Все шесть состояний равновесия системы (1), расположенных на эллипсе L, лежат на пяти прямых $y = m_i$, $i = \overline{1,6}$. Тогда левая часть второго уравнения системы (11) как многочлен пятой степени тождественно обращается в нуль, то есть и в этом случае L – изоклина системы (1). Теорема доказана.

В заметке [3] доказана теорема 16, согласно которой прямые l_1 и l_2 представляют собой распавшуюся кривую второго порядка, являющуюся изоклиной системы (1), если сумма состояний равновесия этой системы на двух указанных прямых равна шести.

Итак, из упомянутой теоремы [3] и доказанных выше теорем 1 и 2 следует

Теорема 3. *Если на кривой L второго порядка расположены шесть состояний равновесия системы (1), то L – изоклина этой системы.*

Лемма 1. *Пусть в открытой односвязной области G система (1) имеет только четыре состояния равновесия A, B, C, D, причем все они грубые. Если в этой области O – простая и при том единственная точка пересечения дуг AB и CD изоклины бесконечности $P_3(x,y) = 0$, то A и B – седла (антиседла), а C и D – антиседла (седла).*

Справедливость данного утверждения следует из определения индекса Пуанкаре [4]

$$J = \frac{p - q}{2},$$

и из того, что индекс простого состояния равновесия равен +1 или -1 [4]. Здесь $p(q)$ – число скачков, совершаемых функцией $Q_3(x,y)/P_3(x,y)$ от $+\infty$ к $-\infty$ (от $-\infty$ к $+\infty$), когда точка $M(x,y)$ переходит через изоклину $P_3(x,y)=0$, обходя один раз в положительном направлении простую замкнутую кривую, окружающую состояние равновесия.

Аналогичными рассуждениями устанавливается справедливость следующих утверждений.

Лемма 2. *Пусть в открытой односвязной области G система (1) имеет только три состояния равновесия A, B, C, причем все они грубые, кроме того точка $D \in G$. Если в этой области O – простая и при том единственная точка пересечения дуг AB и CD изоклины $P_3(x,y) = 0$, то C – седло (антиседло), а A и B – антиседла (седла).*

Лемма 3. *Пусть в открытой односвязной области G система (1) имеет только простые состояния равновесия, и они расположены на ветви L главной изоклины системы (1). Если L имеет особую точку, являющуюся точкой возврата, то на L седла чередуются с антиседлами.*

Замечание 1. Под антиседлом следует понимать простое состояние равновесия системы (1), не являющееся седлом (т.е. узел, фокус, центр).

Из лемм 1 и 3 вытекает

Лемма 4. *Пусть система (1) имеет только простые состояния равновесия, среди которых не более трех седел. Тогда на ветви* L *неприводимой изоклины бесконечности* $P_3(x, y) = 0$ *или нуля* $Q_3(x, y) = 0$ *с узловой особой точкой (с особой точкой возврата) эта система имеет не более восьми (семи) состояний равновесия.*

Замечание 2. Узловую точку и точку возврата кривой следует понимать в смысле терминологии [5].

Из леммы 4 и теоремы 36[6] следует

Лемма 5. *Пусть система (1) имеет три седла и шесть антиседел. Тогда неприводимая изоклина* $P_3(x, y) = 0$ *либо не имеет особой точки, но состоит не менее чем из трех различных ветвей, либо имеет единственную особую точку* M_0. *В случае, когда* M_0 *является узловой точкой (точкой возврата), изоклина* $P_3(x, y) = 0$ *имеет, кроме ветвей, инцидентных точке* M_0, *хотя бы одну ветвь (хотя бы две ветви).*

Теорема 4. *Никакие шесть простых состояний равновесия системы (1), каждая из которых имеет индекс Пуанкаре, равный +1 (-1) не могут принадлежать одной и той же кривой второго порядка.*

Доказательство. Прежде всего заметим, что система (1) не может иметь более шести состояний равновесия на кривой $L:\ F_2(x, y) = 0$ второго порядка, так как система уравнений $F_2(x, y) = P_3(x, y) = Q_3(x, y) = 0$ имеет не более шести решений.

Предположим, что на L система имеет шесть состояний равновесия с одним и тем же индексом Пуанкаре. Тогда в силу теоремы 3 L – изоклина системы (1). Поэтому, без ограничения общности рассуждений, считаем, что, $P_3(x, y) = 0$ распадается на кривую L и прямую l_0. Если L является эллипсом, либо гиперболой, либо параболой, либо парой параллельных прямых, то прямая l_0 пересекает ее разве что в двух точках. В силу этого в одной из двух полуплоскостей, на которые прямая l_0 разбивает всю фазовую плоскость системы (1), окажутся не менее трех особых точек. Но это противоречит теореме 36[6], согласно которой две простые особые точки с одним и тем же индексом Пуанкаре не могут находиться рядом, если между ними нет особой точки самой изоклины.

Если кривая L суть пара пересекающихся прямых, то в силу лемм 1 и 2 и теоремы 36[6] на L не более четырех состояний равновесия с одним и тем же индексом Пуанкаре. Теорема доказана.

Теорема 5. *Система (1) не может иметь шесть особых точек второй группы с чисто мнимыми характеристическими корнями.*

Доказательство. Пусть система (1) имеет шесть особых точек второй группы с чисто мнимыми корнями характеристического уравнения. Тогда $\sigma(x, y) = P'_{3x}(x, y) + Q'_{3y}(x, y) \equiv 0$, так как в противном случае шесть состояний равновесия, индекс Пуанкаре каждого из которых равен +1, принадлежат кривой второго порядка $\sigma(x, y) = 0$. А это противоречит теореме 4.

По лемме 1[1] система (1), кроме шести антиседел имеет еще три седла. Исходя из лемм 1 и 2 и теоремы 36[6], легко показать, что ни одна из главных изоклин системы (1) не является распадающейся кривой. Тогда мы оказываемся в условиях леммы 5. Согласно [7] изоклина $P_3(x, y) = 0$, удовлетворяющая условиям леммы 5, встречается только в одном из следующих классов: гиперболических гипербол, параболических гипербол, гиперболизмов конических сечений.

Пусть кривая $P_3(x, y) = 0$ принадлежит классу гиперболических гипербол. Тогда не уменьшая общности рассуждений, считаем, что система (1) имеет вид [7]:

$$\frac{dx}{dt} = cx - ey + bx^2 + ax^3 - xy^2 \equiv \overline{P_3}(x, y),\quad \frac{dy}{dt} = \sum_{i+j=1}^{3} B_{ij} x^i y^j \equiv \overline{Q_3}(x, y), \tag{13}$$

где $a > 0$.

Так как $\sigma(x, y) \equiv 0$, то коэффициенты системы (13) подчинены условиям:

$$\begin{gathered} B_{01} = -c,\ B_{11} = -2b,\ B_{02} = 0, \\ B_{21} = -3a,\ B_{12} = 0,\ B_{03} = \frac{1}{3}, \\ B_{10}e > 0\ ((0,0) - \text{центр}). \end{gathered} \tag{14}$$

Исследуем особые точки системы (13) на бесконечности. Посредством преобразований Пуанкаре [4]:

$$x = \frac{1}{z}, \; y = \frac{u}{z}$$

и

$$x = \frac{v}{z}, \; y = \frac{1}{z}$$

система (13) с учетом (14) приводится соответственно к виду:

$$\frac{du}{dt} = B_{30} - 4au + B_{20}z - 3buz + B_{10}z^2 + \frac{4}{3}u^3 - 2cuz^2 + eu^2z^2,$$

$$\frac{dz}{dt} = -az - bz^2 + u^2z - cz^3 + euz^3, \qquad (15)$$

и

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{4}{3}v - ez^2 + 4av^3 + 3bv^2z + 2cvz^2 - B_{30}v^4 - B_{20}v^3z - B_{10}v^2z^2, \qquad (16)$$

$$\frac{dz}{dt} = -\frac{1}{3}z + 3av^2z + 2bvz^2 + cz^3 - B_{30}v^3z - B_{20}v^2z^2 - B_{10}vz^3.$$

Очевидно, особая точка $v = z = 0$ системы (16) является простым устойчивым узлом [4]. Координаты остальных бесконечно удаленных особых точек системы (13) согласно [4] удовлетворяют системе уравнений

$$z = 0, \; B_{30} - 4au + \frac{4}{3}u^3 = 0.$$

Важно отметить следующее. Так как система (13) имеет девять состояний равновесия в конечной части фазовой плоскости, то сложные состояния равновесия системы (15) могут появиться лишь в результате слияния простых особых точек, расположенных на экваторе сферы Пуанкаре.

Характеристические корни особой точки $(u=u_i, z=0)$ системы (15), как нетрудно видеть, определяются по формулам:

$$\lambda_1(u_i) = u_i^{\,2} - a, \; \lambda_2(u_i) = 4(u_i^{\,2} - a), \qquad (17)$$

где u_i – корень уравнения

$$\frac{4}{3}u^3 - 4au + B_{30} = 0. \qquad (18)$$

Сразу заметим, что уравнение (18) не имеет трехкратного корня в силу $a \neq 0$.

Итак, уравнение (18) имеет: а) либо три различных действительных корня; б) либо один простой и один двукратный действительные корни; в) либо один простой действительный и два комплексно-сопряженных корня.

В случае а) согласно (17) все три особые точки системы (15) узлы. В случае б) система (15) имеет один простой узел и одну сложную двукратную особую точку с двумя нулевыми характеристическими корнями. В силу выше приведенных рассуждений, сложная точка покоя имеет индекс Пуанкаре, равный +2. В случае в) простому корню уравнения (18) соответствует особая точка типа «узел».

Таким образом, сумма индексов особых точек системы (13) на бесконечности не менее +2. Однако это противоречит известному утверждению о том, что сумма индексов Пуанкаре всех состояний равновесия, как конечных, так и бесконечно удаленных, автономной дифференциальной системы (2) равна +1 (см., например с.124[8]).

Итак, изоклина $P_3(x, y) = 0$ системы (1) не может являться представителем класса гиперболических гипербол.

Если предположить, что кривая $P_3(x, y) = 0$ принадлежит классу параболических гипербол, то согласно [7] можно рассмотреть систему (13), где

$$a = 0, \; B_{01} = -c, \; B_{11} = -2b,$$

$$B_{02} = B_{21} = B_{12} = 0, \; B_{03} = 1/3.$$

Соответствующим образом изменятся системы (15) и (16). Однако начало координат $v = z = 0$ системы (16) является также узлом, а характеристические корни особых точек системы (15) определяются по формулам:

$$\lambda_1(u_i) = u_i^{\,2}, \quad \lambda_2(u_i) = 4u_i^{\,2}, \qquad (19)$$

где u_i – корень уравнения

$$\frac{4}{3}u^3 + B_{30} = 0. \qquad (20)$$

Согласно (19) и (20) единственная точка покоя системы (15) будет только узлом. Снова приходим к противоречию с тем, что сумма индексов особых точек на всей фазовой плоскости равна +1.

Предположим, что изоклина $P_3(x, y) = 0$ является кривой класса гиперболизмов конических сечений. Тогда согласно [7] рассматриваем систему (13), где

$$a = b = 0,\ B_{01} = -c,$$

$$B_{11} = B_{02} = B_{21} = B_{12} = 0,\ B_{03} = \frac{1}{3}.$$

Корни характеристических уравнений особых точек системы (15) определяются по тем же формулам (19), где $v = z = 0$ – узел системы (16). И в этом случае сумма индексов Пуанкаре всех состояний равновесия системы (13) не равна +1.

Теорема доказана.

Замечание 3. В заметке [1] приводится пример кубической системы с пятью центрами, характеристические корни каждого из которых являются чисто мнимыми. В этой связи уместно отметить, что, если система (1) имеет хотя бы одну особую точку второй группы с кратным нулевым характеристическим корнем (их число не более двух [9]), то общее число особых точек второй группы системы (1) заведомо меньше пяти.

Примечания:

1. Ушхо Д.С. О числе особых точек второй группы кубической системы / Д.С. Ушхо// Дифференциальные уравнения, 1993. – Т.29. – №2. – С.240-245.
2. Ильин В.А. Аналитическая геометрия / В.А. Ильин, Э.Г. Позняк. – М.: Наука, 1981. – 232 с.
3. Ушхо Д.С. О прямых изоклинах кубической дифференциальной системы / Д.С. Ушхо // Труды ФОРА. – 2003. – №8. – С.7-21.
4. Андронов А.А. Качественная теория динамических систем второго порядка / А.А. Андронов, Е.А. Леонтович, И.И. Гордон, А.Г. Майер. – М.: Наука, 1966. – 568 с.
5. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. В трех томах. Т.1 / Г.М. Фихтенгольц. – М.: Наука, 1966. – 608 с.
6. Андронов А.А. Теория бифуркаций динамических систем на плоскости / А.А. Андронов, Е.А. Леонтович, И.И. Гордон, А.Г. Майер. – М.: Наука, 1967. – 488 с.
7. Смогоржевский А.С. Справочник по теории плоских кривых третьего порядка / А.С. Смогоржевский, Е.С. Столова. – М.: Физматгиз, 1961. – 263 с.
8. Баутин Н.Н. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости / Н.Н. Баутин, Е.А. Леонтович. – М.: Наука, 1976. – 496 с.
9. Ушхо Д.С. Оценка числа центров кубической дифференциальной системы в случае кратного нулевого корня характеристического уравнения / Д.С. Ушхо // Вестник АГУ. – 1999. – №3. – С.97-100.