УДК 517.946
ББК 22.161
Х 98
К.У. Хубиев

Задача Геллерстедта для нагруженного уравнения смешанного типа

(Рецензирована)

Аннотация:

В работе рассмотрена задача Геллерстедта для нагруженного уравнения гиперболо-параболического типа. Задача сведена к интегральному уравнению Фредгольма II рода, методом малого параметра найдены условия, при которых задача имеет, и притом единственное решение.

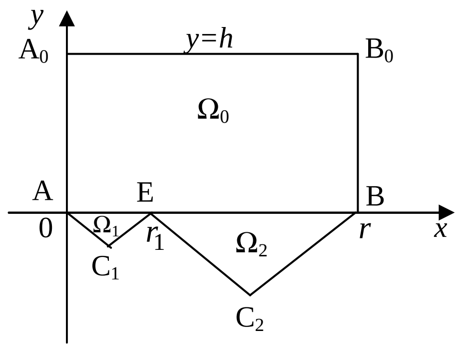
Ключевые слова:

Задача Геллерстедта, уравнения смешанного типа, нагруженные уравнения.

Рассмотрим нагруженное [1] уравнение

$$\begin{cases} u_{xx} - u_y + au_x + cu + \mathrm{M}_0\, u = f_0(x,y), & \Omega_0, \\ u_{xx} - u_{yy} + \mathrm{M}_k\, u = f_k(x,y), & \Omega_k,\ k = 1,2, \end{cases} \tag{1}$$

в области $\Omega = \left(\bigcup\limits_{k=0}^{2}\Omega_k\right) \cup I_0$, где Ω_0 – область, ограниченная отрезками AA_0, BB_0, A_0B_0 прямых $x=0$, $x=r$, $y=h>0$ соответственно, Ω_1 – область, ограниченная отрезком AE оси x и характеристиками уравнения (1) $AC_1: x+y=0$, $EC_1: x-y=r_1$, Ω_2 – область, ограниченная отрезком EB оси x и характеристиками $EC_2: x+y=r_1$, $BC_2: x-y=r$, I_0 – интервал $0<x<r$, I_1 – интервал $0<x<r_1$, I_2 – интервал $r_1<x<r$.



Здесь $\mathrm{M_k}: C(\bar{I}_k) \to C(\overline{\Omega}_k)$, $(k=0,1,2)$ – заданные линейные ограниченные операторы, функции $f_k(x,y) \in C(\overline{\Omega}_k)$, a, c – const.

Регулярным решением уравнения (1) назовем функцию $u(x,y) \in C(\overline{\Omega}) \cap \cap C^1(\Omega \setminus E) \cap C^2(\Omega \setminus I_0)$, удовлетворяющую уравнению (1) в $\bigcup\limits_{k=0}^{2}\Omega_k$.

Через $\|\circ\|$ будем обозначать, в зависимости от контекста, либо норму в пространстве непрерывных функций $\|f\| = \max\limits_{[0,r]}|f(x)|$, либо норму оператора $\|\mathrm{M}\| = \sup\limits_{\|f\|\le 1}|\mathrm{M}\,f|$.

Задача Г. *Найти регулярное в области* Ω *решение* $u(x,y)$ *уравнения (1), удовлетворяющее краевым условиям*

$$u(0,y) = \varphi_1(y), \quad u(r,y) = \varphi_2(y), \quad 0 \le y \le h, \tag{2}$$

$$u_{|EC_1} = u\big((x+r_1)/2; (x-r_1)/2\big) = \psi_1(x), \quad 0 \le x \le r_1, \tag{3}$$

$$u_{|EC_2} = u\big((r_1+x)/2; (r_1-x)/2\big) = \psi_2(x), \quad r_1 \le x \le r, \tag{4}$$

где $\varphi_1(y), \varphi_2(y), \psi_1(x), \psi_2(x)$ *– заданные непрерывные функции, причем* $\psi_1(r_1) = \psi_2(r_1)$.

Задача **Г** с разрывными условиями склеивания для ненагруженного уравнения гиперболо-параболического типа с постоянными коэффициентами подробно исследована (см., например, [2]).

Пусть существует решение $u(x,y)$ задачи (1)-(4). Обозначим $\tau(x)=u(x,0)$, $\nu(x)=u_y(x,0)$. Тогда $\tau(x)\in C(\bar{I}_0)\cap C^1(I_0\setminus E)$, $\nu(x)\in C(I_0\setminus E)$.

В силу непрерывности производных u_{xx}, u_x, u_y мы можем перейти в уравнении (1) к пределу при $y\to+0$ и получить, что $\tau(x)$ и $\nu(x)$ на AB будут связаны следующим функциональным соотношением, принесенным из области Ω_0:

$$\tau''(x)+a\tau'(x)+c\tau(x)+[\mathrm{M}_0\tau(t)](x,0)=f_0(x,0)+\nu(x). \tag{5}$$

Решая задачу Коши [3] для уравнения (1) в области Ω_k, $k=1,2$ как для неоднородного волнового уравнения с правой частью $f_k(x,y)-[\mathrm{M_k}\tau(t)](x,y)$, получим:

$$u(x,y)=\frac{\tau(x+y)+\tau(x-y)}{2}-\frac{1}{2}\int\limits_{x+y}^{x-y}\nu(\xi)d\xi-\frac{1}{2}\int\limits_{y}^{0}\int\limits_{x+y-\eta}^{x-y+\eta}\big(f_{\mathrm{k}}(\xi,\eta)-[\mathrm{M_k}\tau(t)](\xi,\eta)\big)d\xi d\eta\,. \tag{6}$$

Удовлетворяя (6) условию (3), на I_1 после несложных преобразований получим

$$\tau(x)-\int\limits_{x}^{r_1}\nu(\xi)d\xi+\int\limits_{\frac{x-r_1}{2}}^{0}\int\limits_{x-\eta}^{r_1+\eta}[\mathrm{M}_1\tau(t)](\xi,\eta)d\xi d\eta=2\psi_1(x)-\tau(r_1)+\int\limits_{\frac{x-r_1}{2}}^{0}\int\limits_{x-\eta}^{r_1+\eta}f_1(\xi,\eta)d\xi d\eta\,. \tag{7}$$

Дифференцируя (7) по переменной x, получим:

$$\tau'(x)+\nu(x)-\int\limits_{\frac{x-r_1}{2}}^{0}[\mathrm{M}_1\tau(t)](x-\xi,\xi)d\xi=2\psi_1'(x)-\int\limits_{\frac{x-r_1}{2}}^{0}f_1(x-\xi,\xi)d\xi\,. \tag{8}$$

Исключая из (5) и (8) функцию $\nu(x)$, получим следующее уравнение относительно $\tau(x)$:

$$\tau''(x)+(a+1)\tau'(x)+c\tau(x)=g_1(x), \tag{9}$$

где $g_1(x)=f_0(x,0)+2\psi_1'(x)-\int\limits_{\frac{x-r_1}{2}}^{0}f_1(x-\xi,\xi)d\xi-[\mathrm{M}_0\tau(t)](x,0)+\int\limits_{\frac{x-r_1}{2}}^{0}[\mathrm{M}_1\tau(t)](x-\xi,\xi)d\xi.$

Удовлетворяя (6) условию (4), на I_2 после несложных преобразований получим

$$\tau(x)+\int\limits_{x}^{r_1}\nu(\xi)d\xi-\int\limits_{\frac{r_1-x}{2}}^{0}\int\limits_{x+\eta}^{r_1-\eta}[\mathrm{M}_2\tau(t)](\xi,\eta)d\xi d\eta=2\psi_2(x)-\tau(r_1)-\int\limits_{\frac{r-x_1}{2}}^{0}\int\limits_{x+\eta}^{r_1-\eta}f_1(\xi,\eta)d\xi d\eta\,. \tag{10}$$

Дифференцируя (10) по переменной x, получим:

$$\tau'(x)-\nu(x)+\int\limits_{\frac{r_1-x}{2}}^{0}[\mathrm{M}_2\tau(t)](x+\xi,\xi)d\xi=2\psi_2'(x)+\int\limits_{\frac{r_1-x}{2}}^{0}f_2(x+\xi,\xi)d\xi\,. \tag{11}$$

Исключая из (5) и (11) функцию $\nu(x)$, получим следующее уравнение относительно $\tau(x)$:

$$\tau''(x)+(a-1)\tau'(x)+c\tau(x)=g_2(x), \tag{12}$$

где $g_2(x)=f_0(x,0)-2\psi_2'(x)-\int\limits_{\frac{r_1-x}{2}}^{0}f_2(x+\xi,\xi)d\xi-[\mathrm{M}_0\tau(t)](x,0)+\int\limits_{\frac{r_1-x}{2}}^{0}[\mathrm{M}_2\tau(t)](x+\xi,\xi)d\xi.$

Считая функции $g_1(x)$ и $g_2(x)$ известными, определим $\tau(x)$ как решение двухточечной задачи Дирихле

$$\tau(0)=\varphi_1(0), \quad \tau(r_1)=\psi_1(r_1) \tag{13}$$

для обыкновенного дифференциального уравнения (9) на интервале I_1 и задачи

$$\tau(r_1)=\psi_2(r_1), \quad \tau(r)=\varphi_2(0) \tag{14}$$

для обыкновенного дифференциального уравнения (12) на интервале I_2:

$$\tau(x)=\int_0^{r_1} G_1(x,\xi)g_1(\xi)d\xi+G_{1\xi}(x,r_1)\psi_1(r_1)-G_{1\xi}(x,0)\varphi_1(0), \tag{15}$$

$$\tau(x)=\int_{r_1}^{r} G_2(x,\xi)g_2(\xi)d\xi+G_{2\xi}(x,r)\varphi_2(0)-G_{2\xi}(x,r_1)\psi_2(r_1), \tag{16}$$

где $G_k(x,\xi)$ – функция Грина задачи (9),(13) и (12),(14), имеющая в зависимости от $D=(a+3-2k)^2-4c$, $k=1,2$, вид:

1) при $D>0$

$$G_k(x,\xi)=\begin{cases}\exp[\lambda(x-\xi)]\cdot\dfrac{\mathrm{sh}[\mu(\xi-(k-1)r_1)]\mathrm{sh}[\mu(x-(k-1)r_2-r_1)]}{\mu\,\mathrm{sh}(\mu r_k)}, & (k-1)r_1\le\xi\le x,\\ \exp[\lambda(x-\xi)]\cdot\dfrac{\mathrm{sh}[\mu(x-(k-1)r_1)]\mathrm{sh}[\mu(\xi-(k-1)r_2-r_1)]}{\mu\,\mathrm{sh}(\mu r_k)}, & x\le\xi\le(k-1)r_2+r_1,\end{cases}$$

2) при $D<0$

$$G_k(x,\xi)=\begin{cases}\exp[\lambda(x-\xi)]\cdot\dfrac{\sin[|\mu|(\xi-(k-1)r_1)]\sin[|\mu|(x-(k-1)r_2-r_1)]}{|\mu|\sin(|\mu|r_k)}, & (k-1)r_1\le\xi\le x,\\ \exp[\lambda(x-\xi)]\cdot\dfrac{\sin[|\mu|(x-(k-1)r_1)]\sin[|\mu|(\xi-(k-1)r_2-r_1)]}{|\mu|\sin(|\mu|r_k)}, & x\le\xi\le(k-1)r_2+r_1,\end{cases}$$

3) при $D=0$

$$G_k(x,\xi)=\begin{cases}\exp[\lambda(x-\xi)]\cdot\dfrac{[\xi-(k-1)r_1](x-(k-1)r_2-r_1)}{r_k}, & (k-1)r_1\le\xi\le x,\\ \exp[\lambda(x-\xi)]\cdot\dfrac{[x-(k-1)](\xi-(k-1)r_2-r_1)}{r_k}, & x\le\xi\le(k-1)r_2+r_1,\end{cases}$$

где $\mu=\dfrac{\sqrt{D}}{2}$, $\quad \lambda=-\dfrac{a+3-2k}{2}$, $r_2=r-r_1$.

Подставив значение функции $g_1(x)$ в (15), значение функции $g_2(x)$ в (16), и обозначив

$$\rho_1(x)=G_{1\xi}(x,r_1)\psi_1(r_1)-G_{1\xi}(x,0)\varphi_1(0)+\int_0^{r_1}G_1(x,\xi)\left(f_0(\xi,0)+2\psi_1'(\xi)-\int_{\frac{\xi-r_1}{2}}^{0}f_1(\xi-\eta,\eta)d\eta\right)d\xi,$$

$$\rho_2(x)=G_{2\xi}(x,r)\varphi_2(0)-G_{2\xi}(x,r_1)\psi_2(r_1)+\int_{r_1}^{r}G_2(x,\xi)\left(f_0(\xi,0)+2\psi_2'(\xi)-\int_{\frac{r_1-\xi}{2}}^{0}f_2(\xi+\eta,\eta)d\eta\right)d\xi,$$

на интервале I_0 получим уравнение

$$\tau(x)=[\mathrm{K}\tau(t)](x)+\mathrm{p}(x), \tag{17}$$

где

$$\mathrm{p}(x)=H(r_1-x)\rho_1(x)+H(x-r_1)\rho_2(x),$$

$$[\mathrm{K}\,\tau(t)](x)=H(r_1-x)\int_0^{r_1}G_1(x,\xi)\left(\int_{\frac{\xi-r_1}{2}}^{0}[\mathrm{M}_1\tau(t)](\xi-\eta,\eta)d\eta-[\mathrm{M}_0\tau(t)](\xi,0)\right)d\xi+$$

$$+H(x-r_1)\int_{r_1}^{r}G_2(x,\xi)\left(\int_{\frac{r_1-\xi}{2}}^{0}[\mathrm{M}_2\tau(t)](\xi+\eta,\eta)d\eta-[\mathrm{M}_0\tau(t)](\xi,0)\right)d\xi,$$

$H(y)=\begin{cases}1, & y>0,\\ 0, & y<0,\end{cases}$ – функция Хевисайда.

Известно, что уравнения вида (17) разрешимы единственным образом (см., например, [4]), если $\|\mathrm{K}\|<1$. Оценивая оператор K, имеем

$$|\mathrm{K}\tau|\le H(r_1-x)\int_0^{r_1}\left|G_1(x,\xi)\left(\int_{\frac{\xi-r_1}{2}}^{0}[\mathrm{M}_1\tau(t)](\xi-\eta,\eta)d\eta-[\mathrm{M}_0\tau(t)](\xi,0)\right)\right|d\xi+$$

$$+H(x-r_1)\int_{r_1}^{r}\left|G_2(x,\xi)\left(\int_{\frac{r_1-\xi}{2}}^{0}[\mathrm{M}_2\tau(t)](\xi+\eta,\eta)d\eta-[\mathrm{M}_0\tau(t)](\xi,0)\right)\right|d\xi\le$$

$$\le H(r_1-x)\|G_1\|\left(r_1\|\mathrm{M}_0\|+\|\mathrm{M}_1\|\int_0^{r_1}\frac{r_1-\xi}{2}d\xi\right)\|\tau\|+H(x-r_1)\|G_2\|\left(r_2\|\mathrm{M}_0\|+\|\mathrm{M}_2\|\int_{r_1}^{r}\frac{\xi-r_1}{2}d\xi\right)\cdot\|\tau\|\le$$

$$\le\left[H(r_1-x)r_1\|G_1\|\left(\|\mathrm{M}_0\|+\frac{r_1}{4}\|\mathrm{M}_1\|\right)+H(x-r_1)r_2\|G_2\|\left(\|\mathrm{M}_0\|+\frac{r_2}{4}\|\mathrm{M}_2\|\right)\right]\|\tau\|\le$$

$$\le\max\left\{r_1\|G_1\|\left(\|\mathrm{M}_0\|+\frac{r_1}{4}\|\mathrm{M}_1\|\right),\ r_2\|G_2\|\left(\|\mathrm{M}_0\|+\frac{r_2}{4}\|\mathrm{M}_2\|\right)\right\}\cdot\|\tau\|.$$

Нетрудно показать, что максимум функций $|G_k(x,\xi)|=\gamma_k$ в зависимости от $D=(a+3-2k)^2-4c$ равен

$$\gamma_k=\|G_k(x,\xi)\|=\frac{\mathrm{th}(\mu r_k/2)}{2\mu}=\begin{cases}\dfrac{\mathrm{tg}(|\mu|r_k/2)}{2|\mu|}, & D<0,\\[2mm] \dfrac{r_k}{4}, & D=0,\\[2mm] \dfrac{\mathrm{th}(\mu r_k/2)}{2\mu}, & D>0.\end{cases}$$

Окончательно получаем, что $\|\mathrm{K}\|<1$ при

$$\max_{k=1,2}\left\{r_k\gamma_k\left(\|\mathrm{M}_0\|+\frac{r_k}{4}\|\mathrm{M}_k\|\right)\right\}<1.$$

Так как оператор K есть композиция интегрального (т.е. компактного) оператора с ограниченным, и, следовательно, является компактным оператором [4], то к нему применима альтернатива Фредгольма и из единственности решения уравнения (17) следует существование его решения.

После нахождения $\tau(x)$ решение задачи (1)-(4) сводится к решению первой краевой задачи для уравнения (1) в области Ω_0 и первой задачи Дарбу для уравнения (1) в областях Ω_k, $k=1,2$. Таким образом, доказана следующая

Теорема. *Если функции* $\psi_k(x) \in C(\bar{I}_k) \cap C^2(I_k)$, $k=1,2;$ $n=0,1,2...$ *и выполняется неравенство*

$$\max_{k=1,2}\left\{ r_k \gamma_k \left(\|\mathrm{M}_0\| + \frac{r_k}{4}\|\mathrm{M}_k\| \right) \right\} < 1,$$

где $\gamma_k = \dfrac{\mathrm{th}(\mu r_k/2)}{2\mu}$, $\mu = \dfrac{\sqrt{(a+3-2k)^2-4c}}{2}$, *то задача* **Г** *имеет, и притом единственное, решение.*

Замечание. Если в постановке задачи **Г** точка Е совпадает с точкой А, то задача **Г** совпадает с задачей Трикоми, которая была рассмотрена в работе [5].

Примечания:

1. *Нахушев А.М.* Уравнения математической биологии. – М.: Высш. шк., 1995. 301 с.
2. *Джураев Т.Д., Сопуев А.С., Мамажанов М.* Краевые задачи для уравнений параболо-гиперболического типа. – Ташкент: ФАН, 1986. 220 с.
3. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1977. 735 с.
4. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1976. 544 с.
5. *Хубиев К.У.* Краевая задача для нагруженного уравнения смешанного гиперболо-параболического типа / Труды 5-й Международной конференции молодых ученых и студентов «Актуальные проблемы современной науки». Ч 1-2. – Самара, 2004. С.112-115.