УДК 517.958:531.34
ББК 22.1
Б 38

С.Ю. Беданокова

Уравнение движения почвенной влаги и математическая модель влагосодержания почвенного слоя, основанная на уравнении Аллера

(Рецензирована)

Аннотация:

В работе предложены и исследованы математические модели водного режима в почвогрунтах с фрактальной структурой. В основе моделей лежат дифференциальные уравнения дробного порядка.

Ключевые слова:

Фрактальная структура, уравнение диффузии, оператор дробного дифференцирования, локальные краевые условия, нелокальные краевые условия, градиент влажности, влагосодержание.

Хорошо известно, что одной из важнейших характеристик почв, оказывающих влияние практически на все почвенные свойства, является их влажность. При изучении структурных свойств почв методом малоуглового рассеянья нейтронов была установлена их фрактальная организация [1], [2], обнаружено влияние влажности на фрактальные свойства почвенных коллоидов. Зависимость фрактальной размерности почвы от влажности существенно может повлиять на процесс нестационарного движения влаги в этой капиллярно-пористой среде. Обычно движение влаги в почве моделируется нелинейным уравнением диффузии, основанным на законе Дарси. Оно имеет следующий вид [3]

$$\frac{\partial w}{\partial \mathrm{t}} = \frac{\partial}{\partial x}\left[D(w)\frac{\partial w}{\partial x}\right].$$

Здесь $w = w(x,t)$ – влажность в долях единицы, x – глубина, t – время, $D = D(w)$ – коэффициент диффузитивности.

Коэффициент диффузитивности связан с давлением $p = p(w)$ почвенной влаги,
с плотностью ρ и ускоренной силы тяжести формулой

$$D(w) = \frac{k}{\rho g}\frac{\partial p}{\partial w},$$

где $k = k(w)$ – коэффициент влагопроводности.

Уравнение движения влаги в почвах с фрактальной структурой можно получить, если модифицировать известную схему М. Аллера [4], приводящую к уравнению

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[D(w)\frac{\partial w}{\partial x} + A\frac{\partial^2 w}{\partial t \partial x}\right]$$

с варьируемым коэффициентом A.

Действительно, пусть разность $\psi_e - \psi$ эффективного потенциала ψ_e и капиллярного потенциала влажности ψ пропорциональна «фрактальной скорости изменения влажности» $\partial_{0t}^{\alpha} w(x,\tau)$, где ∂_{0t}^{α} – оператор дробного (в смысле M. Caputo) дифференцирования по t порядка $\alpha \in]0,1[$ с началом в начальный момент времени $t = 0$ [5]. Таким образом

$$\psi_e - \psi = \mu \partial_{0t}^{\alpha} w(x,\tau), \qquad (1)$$

$$\partial_{0t}^{\alpha} w(x,\tau) = \int_0^t \frac{(t-\tau)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{\partial w(x,\tau)}{\partial \tau}\partial\tau,$$

где $\mu = \mu(t)$ коэффициент пропорциональности, зависящий только от времени t, $\Gamma(z)$ – гамма функция Эйлера и предполагается, что роль уравнения течения однокомпонентной сжимаемой жидкости играет уравнение

$$\partial_{0t}^{\alpha} w(x,\tau) = \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial \psi_e}{\partial x}\right). \qquad (2)$$

Из (1) и (2) получаем модифицированное уравнение движения влаги

$$\partial_{0t}^{\alpha} w(x,\tau)=\frac{\partial}{\partial x}\left[D(w)w_x(x,t)+k_{\mu}\partial_{0t}^{\alpha} w_x(x,\tau)\right]. \quad (3)$$

Здесь

$$D(w)=k(w)\frac{\partial\psi}{\partial w},\quad k_{\mu}=\mu k(w),\quad w_x=\frac{\partial w}{\partial x}.$$

Уравнение (3) в какой то степени отражает, в первую очередь через параметр α, фрактальные свойства почвенных коллоидов.

Для почв типа Гарднера [6], [7] коэффициент диффузитивности

$$D(w)=\beta\exp(\gamma w), \quad (4)$$

где β и γ – параметры, характеризующие почву.

В силу (4) можно предположить, что в слое $0\le x\le r$ с небольшой влагоемкостью между $D(w)$ и w существует линейная зависимость и записать приближенное равенство

$$D(w)=\beta(1+\gamma w). \quad (5)$$

В случае (5) уравнение (3) допускает следующую запись:

$$\partial_{0t}^{\alpha} w(x,\tau)=\frac{\beta}{2\gamma}\frac{\partial^2(1+\gamma w)^2}{\partial x^2}+\frac{\partial}{\partial x}\left[k_{\mu}\partial_{0t}^{\alpha} w_x(x,\tau)\right]. \quad (6)$$

Пусть

$$\delta(t)=\int_0^r w(x,t)dx,\quad 0\le t\le T$$

– влагосодержание несущего слоя $[0,r]$ в момент времени t от начального 0 до расчетного T; k_{μ} не зависит от x, тогда уравнение (6) можно приближенно заменить уравнением следующего вида

$$\partial_{0t}^{\alpha} w(x,\tau)=\beta(1+\gamma\delta)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+k_{\mu}\partial_{0t}^{\alpha} w_{xx}(x,\tau). \quad (7)$$

Из уравнения (7) после интегрирования обеих его частей по x от 0 до r будем иметь

$$\begin{aligned}&\partial_{0t}^{\alpha}\delta(\tau)=\beta[1+\gamma\delta(t)][w_x(r,t)-w_x(0,t)]+\\&+k_{\mu}\partial_{0t}^{\alpha}[w_x(r,\tau)-w_x(0,\tau)]\end{aligned}. \quad (8)$$

Уравнение (8) для уравнения (3) порождает следующие локальные и нелокальные краевые условия:

$$\partial_{0t}^{\alpha}\int_0^r w(x,t)dx=\delta^{(\alpha)}(t), \quad (9)$$

$$w_x(r,t)=\varphi_r(t), \quad (10)$$

$$w_x(r,t)-w_x(0,t)=f_1(t), \quad (11)$$

$$w_x(0,t)=f_0(t). \quad (12)$$

Предположим, что известно влагосодержание $\delta(t)$ в начальный момент времени

$$\delta(0)=\delta_0 \quad (13)$$

и нелокальное краевое условие (11) с правой частью $f_1(t)\in C^1[0,T]$. Тогда уравнение (8) можно записать в виде

$$\partial_{0t}^{\alpha}\delta(\tau)-c(t)\delta(t)=f(t),\quad 0\le t\le T, \quad (14)$$

где

$$c(t)=\beta\gamma f_1(t),\quad f(t)=\beta f_1(t)+k_{\mu}\partial_{0t}^{\alpha} f_1(\tau).$$

С учетом начального условия (13) для нахождения $\delta(t)$ получим интегральное уравнение Вольтерра второго рода

$$\delta(t)-D_{0t}^{-\alpha}c(\tau)\delta(t)=\delta_0+D_{0t}^{-\alpha}f(\tau). \quad (15)$$

Здесь и в дальнейшем D_{0t}^{χ} – оператор Римана-Лиувилля [5].

Уравнение (15) имеет и притом единственное решение $\delta(t)$. Метод итерации или метод последовательных приближений позволяет найти это решение с любой наперед заданной точностью.

Рассмотрим модифицированное уравнение движения влаги (3) с постоянным коэффициентом диффузитивности D, когда влажность меняется в небольшом диапазоне, и постоянным коэффициентом Аллера k_{μ}

$$\partial_{0t}^{\alpha} w(x,\tau)=D\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+k_{\mu}\partial_{0t}^{\alpha}\frac{\partial^2 w(x,\tau)}{\partial x^2} \quad (16)$$

с начальным условием

$$w(x,0)=\varphi(x),\quad 0\le x\le r$$

и граничными условиями второго рода

$$\left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_{x=0}=f_1(t),\quad 0\le t\le T, \quad (17)$$

$$\left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_{x=r}=0,\quad 0\le t\le T, \quad (18)$$

где $f_1(t)\in C[0,r],\quad f_1^{/}(t)\in L[0,r]$.

Условие (17) задает правило изменения потока влаги на поверхности $x=0$ почвы. Условие (18) физически означает отсутствие потока влаги через границу $x=r$.

Пусть влажность $w(x,t)$ удовлетворяет условиям (17) и (18). Тогда из равенства (16) после почленного интегрирования по x от 0 до r получаем

$$\partial_{0t}^{\alpha}\delta(\tau)=-Df_1(t)-k_{\mu}\partial_{0t}^{\alpha} f_1(\tau). \quad (19)$$

Из (19) нетрудно показать, что

$$\delta(t)=\delta_0-DD_{0t}^{-\alpha}f_1(\tau)-k_\mu\left[f_1(t)-f_1(0)\right]. \quad (20)$$

где δ_0 – начальное состояние (13) переменной δ.

Рассмотрим важный вариант модели (13), (19), когда градиент влажности $\partial w/\partial x$ при $x=0$ меняется по следующему закону:

$$f_1(t)=\sum_{j=0}^{n}A_j t^{\varepsilon j}, \quad (21)$$

где A_j для любого $j=0,1,...$ представляют постоянные величины, независящие от времени, ε – неотрицательное число, которое характеризует фрактальную размерность поверхности почвенного слоя.

Подставляя $f_1(t)$ из (21) в формулу (20) и, учитывая равенство $f_1(0)=A_0$ будем иметь расчетную формулу

$$\delta(t)=\delta_0+k_\mu A_0-\sum_{j=0}^{n}A_j t^{\varepsilon j}\left[\frac{D\Gamma(1+\varepsilon j)}{\Gamma(1+\alpha+\varepsilon j)}t^\alpha+k_\mu\right]. \quad (22)$$

В формуле (22) положим, что

$$A_j=\lambda^j/\Gamma(1+\varepsilon j), \quad \lambda=const, \quad j=0,1,.... \quad (23)$$

Тогда она примет вид

$$\delta(t)=\delta_0-Dt^\alpha\sum_{j=0}^{n}\frac{(\lambda t^\varepsilon)^j}{\Gamma(1+\alpha+\varepsilon j)}-k_\mu\sum_{j=1}^{n}\frac{(\lambda t^\varepsilon)^j}{\Gamma(1+\varepsilon j)}. \quad (24)$$

Пусть

$$E_{1/\rho}^n[z;z_0]=\sum_{k=0}^{n}\frac{z^k}{\Gamma(z_0+k\rho)} \quad (25)$$

– полином Миттаг-Леффлера по терминологии А. М. Нахушева [5]

$$E_{1/\rho}^\infty[z;z_0]\equiv E_{1/\rho}[z;z_0].$$

Тогда формулу (24) можно переписать в виде

$$\delta(t)=\delta_0-Dt^\alpha E_{1/\varepsilon}^n[\lambda t^\varepsilon;1+\alpha]-\lambda k_\mu t^\varepsilon E_{1/\varepsilon}^{n-1}[\lambda t^\varepsilon;1+\varepsilon]. \quad (26)$$

Если в (21) положить $n=\infty$ и коэффициенты ряда определить по формуле (23), то

$$f_1(t)=E_{1/\varepsilon}[\lambda t^\varepsilon;1], \quad (27)$$

тогда расчет влагосодержания слоя или фильтрационной почвенной колонки длины r можно произвести следующим образом:

$$\delta(t)=\delta_0-Dt^\alpha E_{1/\varepsilon}[\lambda t^\varepsilon;1+\alpha]-\lambda k_\mu t^\varepsilon E_{1/\varepsilon}[\lambda t^\varepsilon;1+\varepsilon]. \quad (28)$$

При $\varepsilon=\alpha$ формула (28) записывается в виде

$$\delta(t)=\delta_0-\left(D+\lambda k_\mu\right)t^\alpha E_{1/\alpha}[\lambda t^\alpha;1+\alpha]. \quad (29)$$

Перепишем уравнение (16) в виде

$$\partial_{0t}^\alpha\left[w(x,\tau)-k_\mu\frac{\partial^2 w(x,\tau)}{\partial x^2}\right]=D\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (30)$$

и предположим, что задано граничное условие (11), которое означает закон изменения во времени от начального $t=0$ до расчетного $t=T$ разность градиента влажности на границах $x=0, \quad x=r$ почвенного слоя $0\le x\le r$.

В уравнении (30) заменим выражение, стоящее в квадратных скобках на его среднее значение, тогда уравнение приближенно заменится нагруженным уравнением вида

$$\partial_{0t}^\alpha\delta(\tau)=D\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-\partial_{0t}^\alpha k_\mu f_1(\tau), \quad 0\le x\le r, \quad 0\le t\le T. \quad (31)$$

Любое решение $w=w(x,t)$ уравнения (31) представимо в виде

$$rDw(x,t)=C_1(t)x+C_2(t)+\frac{1}{2}x^2\left[\partial_{0t}^\alpha\delta(\tau)+\partial_{0t}^\alpha k_\mu f_1(\tau)\right], \quad (32)$$

где

$$C_1(t)=rDw_x(0,t), \quad C_2(t)=rDw(0,t). \quad (33)$$

Пусть соблюдены граничные условия

$$w(0,t)=f_0(t),$$

$$\left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_{x=0}=f_1(t), \quad \left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_{x=r}=0, \quad 0\le t\le T.$$

Тогда из (32) и (33)

$$w(x,t)=f_1(t)x+f_0(t)+\frac{x^2}{2rD}\left[\partial_{0t}^\alpha\delta(\tau)+\partial_{0t}^\alpha k_\mu f_1(\tau)\right]. \quad (34)$$

Из (34) следует дифференциальное уравнение дробного порядка

$$\delta(t)=f_0(t)r+f_1(t)\frac{r^2}{2}+\frac{r^2}{6D}\left[\partial_{0t}^\alpha\delta(\tau)+\partial_{0t}^\alpha k_\mu f_1(\tau)\right],$$

которое эквивалентно уравнению

$$\partial_{0t}^{\alpha}\delta(\tau)-\frac{6D}{r^2}\delta(t)=-F_{01}(t)\,, \qquad (35)$$

где

$$F_{01}(t)=\partial_{0t}^{\alpha}k_{\mu}f_1(\tau)+3Df_1(t)+\frac{6D}{r}f_0(t)\,. \qquad (36)$$

Единственное решение $\delta(t)$ задачи Коши (13) для этого уравнения определяется формулой [5]

$$\delta(t)=\frac{d}{dt}\int_0^t F_{01}^{\alpha}(\tau)\mathrm{E}_{\alpha}\left[\frac{6D}{r^2}(t-\tau)^{\alpha}\right]d\tau\,, \qquad (37)$$

где

$$F_{01}^{\alpha}(t)=\delta_0-D_{0t}^{-\alpha}F_{01}(\tau)\,. \qquad (38)$$

Справедлива следующая

Теорема. *Единственное решение* $w(x,t)$ *начально-краевой задачи*

$$\int_0^r w(x,0)dx=\delta_0\,,$$

$$w(0,t)=f_0(t)\,,$$

$$\left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_{x=0}=f_1(t),\quad \left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_{x=r}=0$$

для уравнения (31) задается формулой

$$w(x,t)=f_0(t)+f_1(t)x+\frac{x^2}{2rD}\partial_{0t}^{\alpha}k_{\mu}f_1(\tau)+$$

$$+\frac{3x^2}{r^3}\frac{d}{dt}\int_0^t F_{01}^{\alpha}(\tau)\mathrm{E}_{\alpha}\left[\frac{6D}{r^2}(t-\tau)^{\alpha}\right]d\tau-\frac{F_{01}(t)}{2rD}x^2,$$

где функции $F_{01}(t)$ *и* $F_{01}^{\alpha}(t)$ *однозначно вычисляются по алгоритмам (36) и (38).*

Примечания:

1. *Федотов Г.Н., Третьяков Ю.Д., Иванов В.К., Куклин А.И., Пахомов Е.И., Исламов А.Х., Початкова Т.Н.* Фрактальные коллоидные структуры в почвах различной зональности // ДАН. – 2005. Т. 405. № 3. С. 351-354.
2. *Федотов Г.Н., Третьяков Ю.Д., Иванов В.К., Куклин А.И., Пахомов Е.И., Исламов А.Х., Початкова Т.Н.* Влияние влажности на фрактальные свойства почвенных коллоидов // ДАН. – 2006. Т. 409. № 2. С. 199-201.
3. *Нерпин С.В., Чудковский А.Ф.* Энерго и массообмен в системе растение-почва-воздух. – Л.: Гидрометиздат, 1975. 358 с.
4. *Hallaire M.* Leon et productios vegetabl. Institut National de la Reche Agronomique. – № 9. 1964.
5. *Нахушев А.М.* Дробное исчисление и его применение. – М.: Физматлит, 2003. 272 с.
6. *Полубаринова-Кочина П.Я., Пряженская В.Т., Эмих В.Н.* Математические методы в вопросах орошения. – М.: Наука, 1969.
7. *Нахушев А.М.* О некоторых способах линеаризации уравнений движения грунтовых вод и почвенной влаги / Межвуз. сб. «Краевые задачи для уравнений смешанного типа и родственные проблемы функционального анализа и прикладной математики». Вып 2. – Нальчик: КБГУ, 1979. 198 с.