
УДК 37.016:51

ББК 74.262

3 17

В.В. Зайко

Реализация преемственности в изучении натуральных чисел и дробей на начальной и основной ступенях обучения

(Рецензирована)

Аннотация:

В статье рассматриваются изученные в методической литературе по математике вопросы комплексного подхода к характеристике понятия преемственности в обучении, отражающие взаимосвязь изучаемых школьниками понятий – натуральные числа и обыкновенные дроби.

Предложена методика выполнения отдельных разделов программного материала по математике в первых – шестых классах. Даны рекомендации по выполнению практических заданий по сквозным разделам, отражающим материал обыкновенных дробей и натуральных чисел. Всё это разработано в русле методической концепции Н.Б. Истоминой, нацеленной на развитие учащихся, и в соответствии с основными направлениями осуществления преемственности при изучении чисел в начальной и основной школе.

Ключевые слова:

Преемственность; содержательно-методическая линия курса математики; гуманитарно-ориентированное математическое образование; числовая линия; натуральные числа; обыкновенные дроби.

Активный поиск способов реализации идей развивающего обучения в школьных математических курсах нашел своё выражение в разработке различных программ, учебников, методических пособий, как для начальной, так и для основной школы.

С одной стороны, это характеризует новый этап в развитии математического образования, который определяется отказом от единообразной, унитарной средней школы. Но, с другой стороны, между начальной и основной школой возникают новые противоречия, связанные с проблемой непрерывности и преемственности в обучении математике. Суть этих противоречий сводится к следующему. Как известно, фундаментальные научные исследования по проблеме взаимосвязи обучения и развития проводились на младших школьниках. В связи с этим начальная школа располагает основательной психолого-педагогической базой для реализации идей развивающего обучения на методическом уровне. Однако эти идеи до сих пор не получили должного развития в курсе математики 5-6 классов. Методисты средней школы

видят решение проблемы преемственности между начальной и основной школой в создании единой концепции математического образования, основным принципом которой является приоритет развивающей функции.

Однако, заявляя о приоритете развивающей функции обучения, нельзя забывать, что именно в начальных классах должно быть сформировано умение учиться, на базе которого будет строиться их дальнейшее математическое образование.

Так, в концепции гуманитарно-ориентированного математического образования [3] утверждается, что «начальный этап обучения математике имеет две основные цели: внутреннюю (дидактическую) – подготовку учащихся к продолжению образования – и внешнюю (прагматическую) – формирование математической грамотности» [3, с.60]. Уделяя основное внимание в концепции внешней цели, автор считает, что содержание начального математического образования должно быть «относительно замкнутым». Другими словами, прагматическая цель – формирование математической

грамотности соответствует тезису о достаточности начального образования для повседневной жизни человека.

Обучению в 5-6 классах в этой концепции также отводится подготовительная роль, где речь идет уже о функциональной грамотности учащихся. Наиболее близким к данной концепции является высказывание М. В. Ломоносова о том, что «математику уже потому изучать нужно, что она ум в порядок приводит». Но, как справедливо отмечал А.А. Столяр, «сама по себе математика ум школьника в порядок не приводит, даже при оптимальном отборе содержания;... в результате получают носители изолированных данных знаний, без адекватного умственного развития» [5, с. 6].

Отсюда следует, что мало убедить общество и саму школу в необходимости целенаправленной работы над развитием учащихся, нужно вооружить ее средствами и способами, позволяющими эту цель реализовать. При этом необходимо учитывать, что важной стороной развития учащихся является формирование у них понятийного мышления, способности подняться с реально-предметного уровня на уровень абстрактных понятий. Для этого содержание учебного предмета должно быть системным, то есть представляющим определенную взаимосвязь понятий. Эту систему понятий ребенок усваивает в процессе учебной деятельности, которая требует осознания учебной задачи, выполнения различных мыслительных операций (анализа, синтеза, сравнения, классификации, обобщения), связанных с поиском ее решения.

Основной содержательно-методической линией курса «Математика», изучаемого в начальной и основной школе, является *числовая линия*. Она группирует вокруг себя значительное число понятий данного курса, связанных с развитием понятия числа. Поэтому необходима разработка единого математического подхода к изучению натуральных чисел и дробей, что позволит обеспечить преемственность в изучении курса «Математика» на двух ступенях обучения.

Таким образом, в теории числовых систем преемственность выступает как единство развития исторического и логического. Практическая деятельность человека, с одной стороны, и внутренние потребности математики – с другой, определили развитие понятия числа.

Для характеристики понятия преемственности в рамках математического образования обучение необходимо рассматривать как процесс становления личности человека посредством овладения им основами математических знаний и умений, математической деятельности. Для характеристики преемственности в обучении необходим комплексный, системный подход, в котором находят отражение: логика построения основных содержательно-методических линий курса, учитывающая взаимосвязь и развитие изучаемых школьниками понятий.

Рассмотрим некоторые способы реализации преемственности при изучении натуральных чисел и дробей на начальной и основной ступенях обучения. В современных программах и учебниках методика изучения натуральных чисел и дробей осуществляется в рамках концепции, представленной Н.Б. Истоминой, основной целью которой является развитие мышления учащихся в процессе усвоения математического содержания.

Ориентируясь на это, строилась методика изучения натуральных чисел и дробей в 5 классе, а также рациональных чисел в 6 классе.

Таким образом, основные направления методики изучения натуральных чисел в начальных классах получили свое дальнейшее развитие при изучении натуральных чисел и дробей в 5 классе.

Реализация данной методики в учебниках 5 и 6 классов нашла свое выражение в замене объяснительных текстов проблемными ситуациями в виде практических заданий. Выполнение этих заданий требует активного использования приемов выбора, сравнения, классификации, преобразования, конструирования; отказа от репродуктивного повторения. Приоритетными являются обучающие задания, с помощью которых устанавливаются взаимосвязи понятий курса математики 5 и 6 классов с теми понятиями, которые учащиеся ранее усвоили в начальных классах.

Охарактеризуем кратко содержание курса «Математика» по линии числа и общую направленность методики изучения натуральных чисел и дробей в начальных, пятом и шестом классах.

1 класс. Отношения «столько же», «больше», «меньше» (установление взаимно однозначного соответствия). Счет. Цифры. Взаимо-

связь количественного и порядкового чисел. Натуральный ряд чисел от 1 до 9, принцип его построения. Присчитывание и отсчитывание по единице. Смысл действия сложения и вычитания. Понятия целого и части. «Увеличить на...», «уменьшить на...». Компоненты и результаты действий сложения и вычитания. Переместительное свойство сложения. Двухзначные числа, их разрядный состав.

2 класс. Сочетательное свойство сложения. Трехзначные числа, их разрядный состав. Смысл умножения. Названия компонентов и результата умножения. Умножение на 0 и на 1. Переместительное свойство умножения. Понятие «увеличить в ...».

3 класс. Сочетательное свойство умножения. Смысл деления. Названия компонентов и результата деления. Взаимосвязь умножения и деления. Понятие «уменьшить в ...». Кратное сравнение. Невозможность деления на нуль. Деление числа на 1 и на само себя. Многозначные числа. Понятия разряда и класса. Соотношение разрядных единиц. Разрядные слагаемые.

4 класс. Смысл деления с остатком. Способы деления с остатком. Взаимосвязь компонентов и результата деления (с остатком и без остатка).

5 класс. Натуральные числа. Повторение основных понятий, свойств, способов действий, которые изучались в курсе математики начальной школы. Делители и кратные. Простые и составные числа. Признаки делимости. Разложение на простые множители. Наибольший общий делитель. Наименьшее общее кратное. Обыкновенные дроби. Дробь как часть целого. Изображение дробей на координатном луче. Основное свойство дроби. Сравнение дробей. Дробь как результат деления натуральных чисел. Сложение и вычитание смешанных чисел. Умножение и деление обыкновенных дробей.

6 класс. Обыкновенные и десятичные дроби. Рациональные числа. Положительные и отрицательные числа. Координатная прямая. Противоположные числа. Модуль числа. Сравнение рациональных чисел. Сложение и вычитание рациональных чисел. Умножение и деление рациональных чисел.

Первые шаги в формировании понятия числа у младших школьников связаны с выполнением ими определенных действий с

предметными совокупностями. Количественная характеристика предметных групп осознается ребенком в процессе установления взаимно-однозначного соответствия между предметными множествами. В этом случае количественная характеристика числа находит выражение в понятиях «столько же», «больше», «меньше».

Знакомство учащихся с лучом, отрезком и способом измерения длины с помощью различных мерок позволяет ввести понятие «числовой луч» и применять его как наглядное средство для сравнения чисел, а затем для их сложения и вычитания.

В качестве математической основы разъяснения смысла сложения выступает теоретико-множественная трактовка суммы. Она легко переводится на язык предметных действий, что позволяет при формировании представлений о смысле сложения опираться на опыт детей, навыки счета и операции присчитывания и отсчитывания.

Во втором классе в теме «Умножение» большое внимание уделяется разъяснению детям смысла этого действия как суммы одинаковых слагаемых и новой математической записи. Для этой цели предлагаются различные виды учебных заданий:

- на выделение признаков сходства и различия данных выражений;
- на соотнесение рисунка и числового выражения;
- на запись числового выражения по данному рисунку;
- на выбор числового выражения, соответствующего данному рисунку.

Нумерация многозначных чисел в курсе *третьего класса* представлена темой: «Многозначные числа» Основными способами усвоения десятичной позиционной системы счисления являются: анализ этих чисел с точки зрения их разрядного состава, выявление признаков сходства и различия в конкретных числах, построение рядов чисел в соответствии с определенными правилами.

Содержание программы *четвертого класса* тоже соответствует тематическому принципу. Последовательность изучения тем позволяет органически включить в каждую следующую тему ранее пройденный материал и тем самым выстроить знания, умения и навыки в определенную систему.

Для разъяснения смысла деления с остатком, так же, как и при рассмотрении смысла действий сложения, вычитания, умножения и деления, используются задания на соотнесение предметных действий и математической записи. Способ освоения деления с остатком проходит с помощью специальной системы заданий, через которые до учащихся доводится смысл определения: «Разделить число a на натуральное число b – значит найти такие q и r , при которых $a = b \times q + r$, где $0 < r < b$ », но при этом, конечно, буквенная символика не употребляется.

В пятом классе продолжается работа, начатая в начальных классах.

Тема «Натуральные числа» – первая тема в 5 классе, основные цели изучения которой – систематизировать, обобщить и развить знания учащихся о натуральных числах: познакомить с новыми понятиями, к восприятию и усвоению которых учащиеся были подготовлены в начальных классах.

Цели преемственности реализуются при изучении всех вопросов, включенных в программу. Например:

- при повторении курса математики начальных классов вводится понятие «натуральное число» (в начальных классах этот термин не вводился, речь шла о числах, которые используются для счета);

- вводятся понятия: «координатный луч» (в начальных классах – «числовой луч»), «координата точки», «единичный отрезок» (в начальных классах – «мерка»);

- учащиеся обобщают на вербальном и символическом уровне изменение результатов действий в зависимости от изменения компонентов и знакомятся со способами округления (подготовительная работа к такому обобщению также осуществлялась в начальных классах);

- изучение свойств делимости опирается на знания, умения и навыки, сформированные в начальном курсе математики при изучении свойства «деление суммы на число». В третьем классе при знакомстве с этим свойством учащимся предлагались задания:

1. Догадайся, по какому правилу записаны выражения в каждом столбике? Вычисли их значения.

$54 : 9$	$63 : 7$	$56 : 7$	$72 : 8$
$(36+18):9$	$(49+14):7$	$(42+14):7$	$(24+48):8$
$36:9+18:9$	$49:7+14:7$	$42:7+14:7$	$24:8+48:8$

Запиши столбики выражений по такому же правилу и вычисли их значения:

$36 : 4$; $48 : 6$; $27 : 3$; $45 : 9$.

В процессе выполнения этого задания учащиеся осознают новый способ действия. А именно: делимое представляется в виде суммы двух слагаемых, каждое из которых делится на данное число, затем на это число делится каждое слагаемое и полученные результаты складываются.

Для усвоения нового способа действия выполняются различные задания. Например:

2. Чем похожи выражения в каждой паре? Чем отличаются?

$(22 + 50) : 8$ и $(24 + 48) : 8$; $(40 + 16) : 7$ и $(42 + 14) : 7$;
 $(36 + 18) : 9$ и $(34 + 20) : 9$; $(49 + 14) : 7$ и $(47 + 16) : 7$.

3. Какие суммы делятся на 4:

$24+4$; $20+8$; $16+8$; $24+5$;
 $20+9$; $23+5$; $21+7$; $20+7$;
 $16+12$; $19+9$; $15+13$; $16+15$.

В процессе выполнения этих заданий учащиеся рассматривают различные случаи деления суммы на число, а именно:

- если каждое слагаемое делится на данное число;
- если каждое слагаемое не делится на данное число;
- если одно из слагаемых делится на данное число, а другое не делится.

Результаты этих наблюдений используются в пятом классе при изучении свойства делимости суммы, знакомство с которым начинается с выполнения задания:

4. Чем похожи выражения? Вычисли их значения:

$$(56 + 72) : 8; \quad (64 + 72) : 8; \quad (63 + 49) : 7; \quad (64 + 56) : 6;$$
$$(36 + 81) : 9; \quad (45 + 81) : 9; \quad (49 + 28) : 7; \quad (56 + 48) : 6.$$

Анализируя признаки сходства и различия данных выражений, учащиеся выдвигают предположения о свойствах делимости суммы. Эти предположения они проверяют на других числовых выражениях, которые составляют сами. Итогом работы является обобщенная формулировка свойства делимости, которая дана в учебнике.

5. Можно ли утверждать, что сумма чисел в каждом ряду делится на 2?

- а) 2, 4, 6, 8, 9, 10; б) 7, 8, 12, 14, 26; в) 24, 26, 28, 32, 34.

Изучение свойств делимости, в частности свойства делимости суммы, находит дальнейшее развитие при изучении признаков делимости. Например, изучение признака делимости на 5 можно начинать с задания:

6. Подумай, можно ли сформулировать признак делимости на 5?

Ориентируясь на знание свойств делимости и знание признака делимости на 10, учащиеся могут рассуждать следующим образом: «Все числа, которые делятся на 10, делятся и на 5. Это легко доказать, так как любое число, делящееся на 10, оканчивается нулем (или несколькими нулями) и его можно представить в виде произведения двух множителей, одним из которых будет число 10. Например,

$$42040 = 4204 \times 10; \quad 77700 = 7770 \times 10.$$

Число 10 делится на 5. А если один из множителей делится на натуральное число, то и всё произведение будет делиться на это число».

Основные цели изучения темы «Обыкновенные дроби» – сформировать у учащихся умение пользоваться основным свойством дроби для преобразования обыкновенных дробей,

для их сравнения, сложения, вычитания, умножения и деления; сформировать навыки действий с обыкновенными дробями.

Изучение перечисленных вопросов в данной последовательности позволяет учащимся активно использовать при изучении нового материала ранее усвоенные (как в начальных классах, так и в 5 классе) знания, умения и навыки, что создаёт условия для самостоятельного выполнения заданий, нацеленных на усвоение нового материала.

Изучение темы «Основное свойство дроби» начинается с задания, при выполнении которого у учащихся на предметном уровне формируется и систематизируется представление о равных дробях.

1. Мальчик и девочка купили два кекса. Мальчик разделил свой кекс на 8 равных частей и съел две части кекса, а девочка разделила свой кекс на 16 равных частей и съела 4 части. У кого кекса осталось больше: у мальчика или у девочки?

2. Какую часть прямоугольника закрасили на каждом рисунке?



Дети замечают, что закрасенные части можно обозначить дробями: $1/2$; $3/6$; $6/12$; $12/24$. И все они равны половине, то есть $1/2$.

Сформированность приемов умственных действий позволяет учащимся самостоятельно справиться с заданиями:

3. Можно ли утверждать, что:

$$\frac{1}{2} = \frac{3}{6}; \quad \frac{1}{2} = \frac{6}{12}; \quad \frac{1}{2} = \frac{12}{24}; \quad \frac{3}{6} = \frac{6}{12}; \quad \frac{1}{6} = \frac{12}{24}; \quad \frac{6}{12} = \frac{12}{24}. ?$$

4. Проверь себя, отметив на луче точки с координатами: $1/2$, $3/6$, $6/12$, $12/24$. За единичный отрезок прими 24 клетки в тетради. Что у тебя получилось?

Устанавливая соответствие между равенствами и геометрической моделью, дети приходят к выводу: на координатном луче равные дроби соответствуют одной и той же точке.

Учащиеся в результате практических действий, анализа ситуаций, соотнесения различных моделей подходят к осознанию основного свойства дроби, формулируют его и применяют при выполнении различных заданий.

Для сравнения приведем подход к изучению основного свойства дроби, данный в учебнике «Математика – 6» (авт. Н. Я. Виленкин и др.). Основной целью этого курса математики является формирование у учащихся знаний, в процессе выполнения учебных заданий по образцу, данных в тексте.

Приведем объяснительный текст, данный в учебнике:

«Разделим круг на 4 равные части и 3 из них закрасим, а потом каждую четверть круга разделим еще на 5 равных частей (рис. 1).

Тогда весь круг окажется разделенным на $4 \times 5 = 20$ частей, а в трёх закрашенных четвертях круга будет 3×5 таких частей.

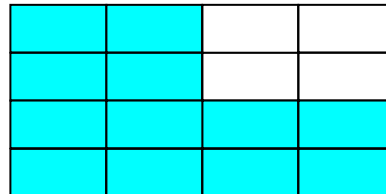
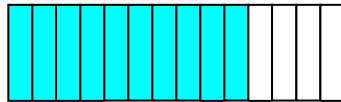
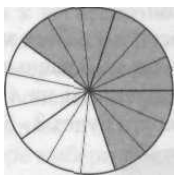


Рис. 2.

При объяснении задания ребенок может только повторить текст учебника, в котором сказано, как получаются равные дроби, то есть повторить образец, данный в учебнике.

Эти знания и умения развиваются и совершенствуются в *шестом классе*, где в начале учебного года изучается тема «Обыкновенные

и десятичные дроби». Основные цели этой темы – расширить представления учащихся о возможностях записи чисел в различных эквивалентных формах; сформировать навыки вычислений с обыкновенными и десятичными дробями.

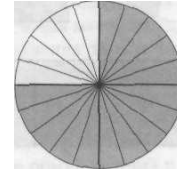


Рис. 1.

Поэтому: $\frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 5} = \frac{15}{20}$, то есть $\frac{3}{4} = \frac{15}{20}$.

Это равенство можно записать так:

$$\frac{15}{20} = \frac{15 : 5}{20 : 5} = \frac{3}{4}. \text{ Если числитель и знаменатель}$$

дроби умножить или разделить на одно и то же натуральное число, то получится равная ей дробь. Это свойство называют основным свойством дроби. Например:

$$\frac{2}{5} = \frac{4}{10}; \quad \frac{9}{15} = \frac{3}{5}; \quad \frac{16}{8} = \frac{2}{1}.$$

Две равные дроби являются различными записями одного и того же числа» [4, с. 36].

Ориентируясь на объяснения учебника, ребенок должен выполнить задание: используя рисунок 2, объясни, почему равны дроби:

$$\frac{3}{5} = \frac{9}{15}; \quad \frac{4}{3} = \frac{12}{9}; \quad \frac{5}{7} = \frac{10}{14}.$$

Дальнейшее развитие знаний учащихся о числе происходит в теме «Рациональные числа», где они знакомятся с положительными и отрицательными числами, и у них формируется представление о рациональном числе.

Таким образом, преемственность при изучении математики между начальной школой и 5-6 классами находит свое выражение:

- в единстве логики изложения содержания. Тематический принцип построения курса обеспечивает изучение математического содержания в органической связи каждой темы с предыдущей. Это создает условия для повторения ранее изученных вопросов на новом уровне, позволяет сопоставлять и соотносить их в самых различных аспектах, обобщая и система-

тизируя их. При этом если учащиеся начальной школы в большей мере опираются на жизненный опыт, интуицию, то ученики 5-6 классов активно применяют уже сформированные понятия и способы действий;

- в единстве методических подходов к изучению математических понятий, свойств и способов.

Каждое из этих направлений реализуется в системе учебных заданий, отражающих цели, содержание, методы и формы обучения и обуславливающих характер учебной деятельности ученика.

Приведем примеры, обеспечивающие преемственность выполнения заданий детьми на этапе усвоения знаний.

Задание 1. а) Чем похожи все рисунки? Чем отличаются? (Рис. 3)

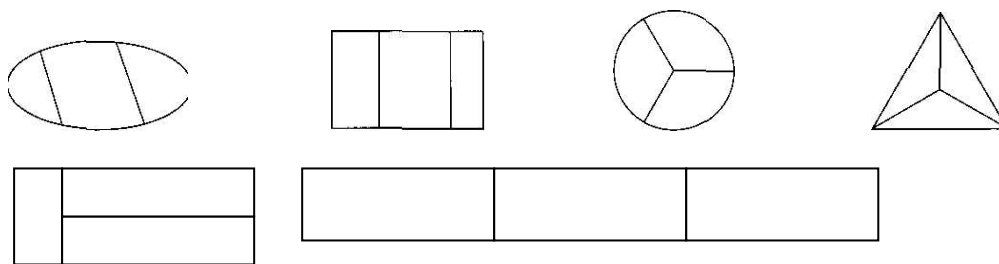


Рис. 3.

Сначала ученики выделяют общее представление, опирающееся на понятие «целое и часть» (на всех рисунках изображены фигуры, каждая из которых разделена на три части).

б) Но может быть можно разделить эти фигуры на две группы? (части одинаковые - части неодинаковые).

Задание 2. Какая часть прямоугольника закрашена на каждом рисунке?

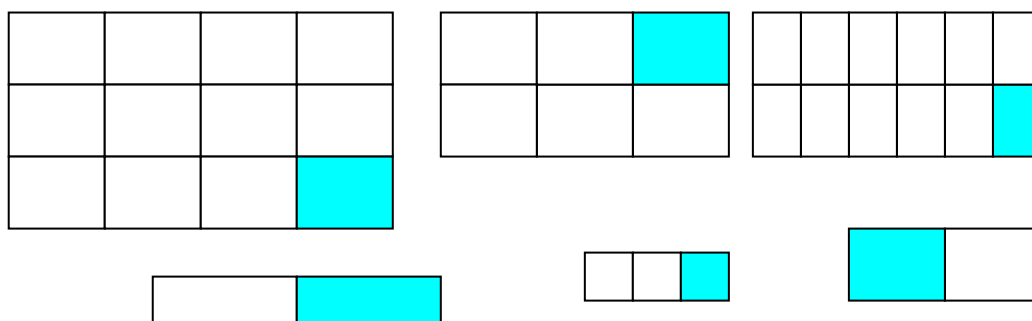


Рис. 4.

В процессе выполнения задания учащиеся, используя имеющиеся у них представления о соотношении целого и части, равных частях, осознают необходимость введения новых чисел (дробей), возможность соотношения целого с числом 1, предметный смысл записи числа 1 в

виде дроби с одинаковыми числителем и знаменателем.

Следует заметить, что в статье представлен один из путей решения проблемы преемственности в обучении математике между начальной и основной школой. Подход к понятию преем-

ственности на основе общей теории познания позволил предположить возможность реализации преемственности между двумя образовательными ступенями. Реализация преемственности в развивающем обучении возможна при участии развивающей направленности всего курса «Математика» в рамках единой целевой и содержательно-методической концепции.

Разработка методики изучения натуральных чисел и дробей, обеспечивающей непрерывность и преемственность курса «Математика» в начальных и 5-6 классах школы, осуществлялась на основе анализа психолого-педагогической и методической литературы. Выделена специфика понятия преемственности как необходимого условия развития, призванного сыграть значительную положительную роль при построении содержательно-целевого не-

прерывного образования в русле единой концепции развивающего обучения.

Примечания:

1. Аббасов С.Х. Пути обеспечения преемственности при обучении математике в начальной школе и 5-6 классах средней школы. М., 1991.
2. Ананьев Б.Г. О преемственности в обучении. М., 1998.
3. Дорофеев Г.В. Гуманитарно-ориентированный курс – основа учебного предмета «Математика» в школе // Математика в школе, 1997, № 4.
4. Математика: Учебник для 6 класса общеобразовательных учреждений / Н.Я. Виленкин и др. М., 1997.
5. Стойлова Л.П. Математика. М., 2000.
6. Число // Математическая энциклопедия: Гл. ред. И.М. Виноградов. Т.5. М., 1984.