УДК 517.958:532:519.711.3
ББК 22.181
Ш 96
М.М. Шумафов, Р. Цей

Метод модулирующих функций и его применение при решении обратных задач

(Рецензирована)

Аннотация

В работе проводится краткий анализ методов решения обратных задач. Излагается сущность метода модулирующих функций, проводится сравнительный анализ с другими существующими методами решения обратных задач. На примерах решения некоторых обратных задач методом модулирующих функций показана эффективность данного метода.

Ключевые слова: обратная задача, теория фильтрации, математическое моделирование, идентификация, дифференциальные уравнения, модулирующие функции.

Введение

Хорошо известно, какую важную роль играют **обратные задачи** математической физики в различных областях науки. Основы теории и практики исследования обратных задач математической физики были заложены и развиты в фундаментальных работах многих исследователей (см., например, обзоры [1, 2]). Напомним, что к **прямым задачам** математической физики относят задачи нахождения следствий заданных причин, а к обратным – задачи отыскания неизвестных причин заданных следствий. Обратные задачи возникают в приложениях и имеют важное значение при решении вопросов математического моделирования в сложных системах. Это, в частности, относится и к процессам, связанным с добычей нефти и газа – одним из самых приоритетных направлений в энергетике.

Весьма часто описание сложных систем затруднено тем обстоятельством, что отсутствуют теоретические предпосылки, которые позволили бы построить адекватную математическую модель рассматриваемого процесса. Это означает, что необходимо выписать систему соответствующих уравнений (как правило, дифференциальных), указать значения параметров рассматриваемой системы и задать начально-граничные условия. В подобных ситуациях проводится процедура **идентификации** математической модели процесса. Эта процедура позволяет, решая обратные задачи с использованием информации об экспериментальных данных исследуемого процесса, выбрать адекватную модель и оценить параметры этой модели.

При моделировании процессов во многих случаях (например, в задачах нефтегазодобычи) структура модели может быть определена априори и задача состоит только в оценке неизвестных параметров. В последнем случае говорят о задаче идентификации в узком смысле слова.

Одной из актуальных задач нефтегазовой науки является задача определения параметров нефтегазоносного пласта по натурным наблюдениям значений давления, насыщенности и др. с помощью контрольных скважин. Именно эту задачу мы будем рассматривать в дальнейшем. Основными характеристиками газоносного пласта являются **фильтрационные и емкостные параметры.** Задаче определения фильтрационных и емкостных параметров газоносного пласта было посвящено большое количество работ, обзор которых имеется, например, в [1]. При этом в разных работах использовались различные методы решения обратных задач.

Идея применения метода модулирующих функций для решения обратных задач восходит к работам **Дж. Лоэба** и **Г. Кахена** (J. Loeb, G. Cahen) [3, 4]. Возможность применения метода модулирующих функций для решения задач нефтегазовой науки впервые была высказана **В.Б. Георгиевским** и им были разработаны унифицированные алгоритмы для решения обратных задач подземной гидрогазодинамики [5]. В работах [6, 7] сделана программная реализация на основе унифицированных алгоритмов, разработанных в работах В.Б. Георгиевского [см., например, 5]. В работе [8] метод модулирующих функций обобщен на случай любой степени полиномов разложения неизвестных параметров газоносного пласта.

Однако унифицированные алгоритмы В.Б. Георгиевского не получили широкого применения для решения прикладных задач, за исключением работ [6-8].

Цель настоящей статьи – показать на примерах эффективность метода модулирующих функций при решении обратных задач, а также привлечь внимание исследователей, работающих в разных отраслях науки, к этому методу как весьма гибкому и эффективному при решении разнообразных прикладных задач. Отметим также, что основным достоинством данного метода является его простота.

Основные недостатки существующих методов определения фильтрационных параметров

Подавляющее большинство существующих методов определения параметров систем (например, метод стохастической аппроксимации и методы теории чувствительности, используемые в регрессионном анализе, методы, основанные на применении преобразований Лапласа, метод детерминированных моментов и др.), описываемых дифференциальными уравнениями, основано на использовании решений уравнений. Разработке методов посвящено весьма большое число работ. Однако всем этим методам присущи серьезные недостатки [1, 5].

К недостаткам существующих методов определения фильтрационных параметров следует отнести следующее:

– низкая точность определяемых параметров,
– трудности обработки опытных данных,
– необходимость организации опытных работ по специальной схеме,
– невозможность интерпретации сложных случаев фильтрационного движения,
– невозможность использования огромной информации, доставляемой режимными наблюдениями, геофизическими исследованиями и др.

Главный из этих недостатков – низкая точность определяемых параметров.

Причиной тому является абстрагирование от реальных условий и схематизация натурного движения. Тем самым, априори в основу математической модели закладываются параметры, определяемые подчас с заведомой большой погрешностью.

Имеются также и другие недостатки этих методов. Например:

– число расчетных схем и формул велико,
– структура формул во многих случаях сложна,
– расчетные формулы не универсальны и не охватывают сложные случаи фильтрации.

Все эти недостатки не могут быть устранены, используя принципы, опирающиеся на решении прямых краевых задач [5].

Отметим, что в ряде работ [9-12 и др.] в теории разработки газовых месторождений исследовались задачи однофазной и двухфазной фильтрации. В этих работах использовались и развивались методы определения фильтрационных параметров в вариационной постановке. Показателем качества идентификации параметров пласта выступал некоторый функционал J(K), представляющий сумму квадратов отклонений между расчетными и измеренными давлениями. Однако и в этих работах использовались также алгоритмы решения обратных задач, базирующиеся на алгоритмах решения прямых задач.

Таким образом, можно сказать, что причины всех существующих недостатков применяемых методов коренятся в исходном принципе построения этих методов, а именно – в использовании решений краевых задач.

В связи со сказанным выше возникает проблема определения фильтрационных параметров без использования решений уравнений фильтраций. Поставленная в таком плане задача определения фильтрационных параметров требует решения ряда других вопросов. Главный из них – это разработка методики определения коэффициентов дифференциальных уравнений без использований решений уравнений фильтрации.

Следует отметить, что определение параметров как коэффициентов дифференциальных уравнений часто применялось в разных областях науки: теории автоматического управления, геофизике, гидрогеологии и др. Однако во всех случаях определение параметров носило частный, эпизодический характер.

Основная идея методики определения фильтрационных параметров без использования аналитических и численных решений краевых задач состоит в том, что уравнения фильтрации заменяются интегральными аналогами, из которых составляются алгебраические или интегральные уравнения относительно искомых параметров. При этом основными достоинствами этого подхода являются следующие: 1) вывод расчетной формулы состоит из стандартных преобразований; 2) формула унифицирована для любых конкретных условий, типов определяемых параметров; 3) расчет по формулам требует стандартных операций.

Метод модулирующих функций (М-метод)

Метод модулирующих функций (далее, М-метод) впервые был описан в работах [3, 4] в связи с решением задачи идентификации объектов автоматического управления. Это весьма гибкий и удобный своей компактностью метод. Этот метод позволяет определить параметры модели **без использования решения краевых задач.**

Идея М-метода состоит в том, что дифференциальное уравнение умножается на специальные «модулирующие» функции и интегрируется по частям. В результате, происходит «освобождение» от операции дифференцирования решения (исходного дифференциального уравнения) и «переход» этой операции к модулирующим функциям, которые можно выбирать достаточно гладкими. В итоге, исходное дифференциальное уравнение заменяется его интегральным аналогом.

Особо отметим, что в полученных выражениях отсутствуют производные от экспериментальных функций, что позволяет ликвидировать трудности, связанные с непосредственным дифференцированием экспериментальных функций. Эти трудности проистекают из-за того, что **операция дифференцирования экспериментальных функций является некорректной.** Последнее означает, что две функции, «близкие» по ординатам, вообще говоря, могут быть не «близки» по значениям производных.

Проиллюстрируем силу М-метода на примерах.

Пример 1. Начнем с простого примера. Пусть задано простейшее дифференциальное уравнение

$$y' = f(x) \qquad (y' = dy/dx), \tag{1}$$

где $f(x)$ – заданная на некотором интервале (a, b) непрерывная функция.

Умножим обе части уравнения (1) на гладкую (непрерывно дифференцируемую) на интервале $(a,\ b)$ функцию $\varphi(x)$. Далее, проинтегрируем полученное уравнение по отрезку $[x_0, x_1] \subset (a, b)$:

$$\int_{x_0}^{x_1} y' \varphi(x) dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x) \varphi(x) dx . \qquad (2)$$

Применяя к левой части равенства (2) формулу интегрирования по частям, получим:

$$y(x)\varphi(x)\Big|_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} y(x) \varphi'(x) dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x) \varphi(x) dx . \qquad (3)$$

Поскольку $\varphi(x)$ – произвольная гладкая функция, выберем ее такой, что $\varphi(x_0) = \varphi(x_1) = 0$. Тогда из (3) имеем:

$$-\int_{x_0}^{x_1} y(x) \varphi'(x) dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x) \varphi(x) dx . \qquad (4)$$

Соотношение (4) является интегральным аналогом дифференциального уравнения (1). Как видим, в (4) операция дифференцирования «перешла» от решения $y(x)$ к «модулирующей» функции $\varphi(x)$.

Пример 2. Пусть задано уравнение

$$y'' = f(x) \qquad (y'' = d^2 y / dx^2), \qquad (5)$$

где $f(x)$ – заданная на некотором интервале $(a,\ b)$ непрерывная функция.

Как в примере 1, умножим обе части уравнения (5) на дважды непрерывно дифференцируемую функцию $\varphi(x)$ и проинтегрируем по отрезку $[x_0, x_1] \subset (a, b)$:

$$\int_{x_0}^{x_1} y''(x) \varphi(x) dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x) \varphi(x) dx . \qquad (6)$$

Применим к левой части равенства (6) формулу интегрирования по частям два раза:

$$y'(x)\varphi(x)\Big|_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} y'(x) \varphi'(x) dx = y'(x)\varphi(x)\Big|_{x_0}^{x_1} - \left[y(x)\varphi'(x)\Big|_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} y(x) \varphi''(x) dx \right]. \qquad (7)$$

Выбирая функцию $\varphi(x)$ такой, что $\varphi(x_0) = \varphi(x_1) = 0$ и $\varphi'(x_0) = \varphi'(x_1) = 0$, из (6), (7) получим:

$$\int_{x_0}^{x_1} y(x) \varphi''(x) dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x) \varphi(x) dx . \qquad (8)$$

Соотношение (8) есть интегральный аналог дифференциального уравнения (5).

Пример 3. Пусть задано уравнение

$$y^{(n)} = f(x) \qquad (y^{(n)} = d^n y / dx^n). \qquad (9)$$

Поступая аналогично как в примерах 1 и 2, умножим обе части уравнения (9) на достаточно гладкую функцию $\varphi(x)$ (имеющей непрерывно производные до n порядка включительно) и проинтегрируем левую часть полученного соотношения по отрезку $[x_0, x_1] \subset (a,b)$. Выбирая «модулирующую» функцию $\varphi(x)$, удовлетворяющей условиям

$$\frac{d^k\varphi(x_0)}{dx^k} = 0\,, \quad \frac{d^k\varphi(x_1)}{dx^k} = 0\,, \quad (k=0,1,...,n-1)$$

и применяя формулу интегрирования по частям n раз, получим интегральный аналог уравнения (9):

$$(-1)^n \int_{x_0}^{x_1} y \frac{d^n\varphi(x)}{dx^n} dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\varphi(x)dx\,.$$

Определение постоянных коэффициентов в дифференциальных уравнениях

Теперь применим использованную в примерах 1-3 методику для решения простейших обратных коэффициентных задач.

Пример 4. Рассмотрим задачу определения коэффициента k в уравнении

$$y' = ky \qquad (y' = dy/dx)\,. \tag{10}$$

Уравнение (10) – это уравнение нормального размножения, если $k>0$, и – уравнение радиоактивного распада, если $k<0$.

Умножим обе части уравнения (10) на гладкую (непрерывно дифференцируемую) на интервале (a, b) функцию $\varphi(x)$ и проинтегрируем полученное уравнение по отрезку $[x_0, x_1] \subset (a,b)$. Имеем:

$$\int_{x_0}^{x_1} y'\varphi(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} ky\varphi(x)dx\,. \tag{11}$$

Применяя к левой части равенства (11) формулу интегрирования по частям, получим:

$$y(x)\varphi(x)\Big|_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} y(x)\varphi'(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} ky(x)\varphi(x)dx\,. \tag{12}$$

Поскольку $\varphi(x)$ – произвольная гладкая функция, выберем ее такой, что $\varphi(x_0) = \varphi(x_1) = 0$. Тогда из (12) имеем:

$$-\int_{x_0}^{x_1} y\varphi'(x)dx = k\int_{x_0}^{x_1} y\varphi(x)dx\,. \tag{13}$$

Из равенства (13) определяем коэффициент k:

$$k = -\frac{\int_{x_0}^{x_1} y\varphi'(x)dx}{\int_{x_0}^{x_1} y\varphi(x)dx}\,.$$

Пример 5. Определить коэффициент k в уравнении взрыва

$$y' = ky^2 \qquad (y' = dy/dx). \tag{14}$$

Как и в примере 4, умножим обе части уравнения (14) на гладкую (непрерывно дифференцируемую) на интервале (a, b) функцию $\varphi(x)$ и проинтегрируем полученное уравнение по отрезку $[x_0, x_1] \subset (a, b)$. Имеем:

$$\int_{x_0}^{x_1} y'\varphi(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} ky^2\varphi(x)dx. \tag{15}$$

Применяя к левой части равенства (15) формулу интегрирования по частям, и выбирая «модулирующую» функцию $\varphi(x)$ такой, что $\varphi(x_0) = \varphi(x_1) = 0$, получим

$$-\int_{x_0}^{x_1} y\varphi'(x)dx = k\int_{x_0}^{x_1} y^2\varphi(x)dx. \tag{16}$$

Из равенства (16) определяем коэффициент k:

$$k = -\frac{\int_{x_0}^{x_1} y\varphi'(x)dx}{\int_{x_0}^{x_1} y^2\varphi(x)dx}.$$

Пример 6. Определить коэффициент ω^2 в уравнении колебаний маятника

$$y'' + \omega^2 y = 0 \quad (y'' = d^2y/dx^2). \tag{17}$$

Поступая аналогично, как и в примере 2, получим

$$\int_{x_0}^{x_1} y\varphi''(x)dx = -\omega^2\int_{x_0}^{x_1} y\varphi(x)dx. \tag{18}$$

Из равенства (18) определяем коэффициент ω^2:

$$\omega^2 = -\frac{\int_{x_0}^{x_1} y\varphi''(x)dx}{\int_{x_0}^{x_1} y\varphi(x)dx}.$$

Теперь продемонстрируем применение М-метода для определения коэффициентов в дифференциальных уравнениях с частными производными.

Пример 7. Определить коэффициент a^2 в уравнении свободных малых колебаний струны

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \qquad (U = U(x,t)). \tag{19}$$

Умножим обе части уравнения (19) на дважды непрерывно дифференцируемые функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(t)$ и проинтегрируем соответственно по отрезкам $x_0 \le x \le x_1$, $t_0 \le t \le t_1$:

$$\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}\varphi_1(x)\varphi_2(t)dxdt = a^2\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\varphi_1(x)\varphi_2(t)dxdt\,. \tag{20}$$

Уравнение (20) можно записать еще так:

$$\int_{x_0}^{x_1}\varphi_1(x)\int_{t_0}^{t_1}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}\varphi_2(t)dtdx = a^2\int_{t_0}^{t_1}\varphi_2(t)\int_{x_0}^{x_1}\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\varphi_1(x)dxdt\,. \tag{21}$$

Выберем модулирующие функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(t)$ такими, чтобы

$$\varphi_1(x_0)=\varphi_1(x_1)=0\,,\ \varphi_2(t_0)=\varphi_2(t_1)=0\,,\quad \varphi_1'(x_0)=\varphi_1'(x_1)=0\,,\ \ \varphi_2'(t_0)=\varphi_2'(t_1)=0\,. \tag{22}$$

Применим к интегралам $\int_{t_0}^{t_1}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}\varphi_2(t)dt$ и $\int_{x_0}^{x_1}\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\varphi_1(x)dx$ по два раза формулу интегрирования по частям. Имеем:

$$\int_{t_0}^{t_1}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}\varphi_2(t)dt = \int_{t_0}^{t_1}U\,\frac{\partial^2\varphi_2(t)}{\partial t^2}dt\,,\qquad \int_{x_0}^{x_1}\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\varphi_1(x)dx = \int_{x_0}^{x_1}U\,\frac{\partial^2\varphi_1(x)}{\partial x^2}dx\,. \tag{23}$$

Тогда из соотношений (21)-(23) получим

$$\int_{x_0}^{x_1}\varphi_1(x)\int_{t_0}^{t_1}U\,\frac{\partial^2\varphi_2(t)}{\partial t^2}dtdx = a^2\int_{t_0}^{t_1}\varphi_2(t)\int_{x_0}^{x_1}U\,\frac{\partial^2\varphi_1(x)}{\partial x^2}dxdt\,,\ \text{или}$$

$$\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}U\varphi_1(x)\varphi_2''(t)dxdt = a^2\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}U\varphi_1''(x)\varphi_2(t)dxdt\,. \tag{24}$$

Из равенства (24) теперь определяем коэффициент a^2:

$$a^2 = \frac{\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}U\varphi_1(x)\varphi_2''(t)dxdt}{\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}U\varphi_1''(x)\varphi_2(t)dxdt}\,.$$

Пример 8. Определить коэффициент a в уравнении теплопроводности

$$a\left[\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right]=\frac{\partial U}{\partial t}\,. \tag{25}$$

Умножим обе части уравнения (25) на дважды непрерывно дифференцируемые функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(y)$ и непрерывно дифференцируемую функцию $\varphi_3(t)$. Полученное уравнение проинтегрируем соответственно по отрезкам $x_0 \le x \le x_1$, $y_0 \le y \le y_1$, $t_0 \le t \le t_1$:

$$\begin{gathered} a\left[\int_{t_0}^{t_1}\varphi_3(t)\int_{y_0}^{y_1}\varphi_2(y)\int_{x_0}^{x_1}\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\varphi_1(x)dxdydt + \int_{t_0}^{t_1}\varphi_3(t)\int_{x_0}^{x_1}\varphi_1(x)\int_{y_0}^{y_1}\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\varphi_2(y)dydxdt\right] = \\ = \int_{y_0}^{y_1}\varphi_2(y)\int_{x_0}^{x_1}\varphi_1(x)\int_{t_0}^{t_1}\frac{\partial U}{\partial t}\varphi_3(t)dtdxdy. \end{gathered} \tag{26}$$

Выбирая модулирующие функции $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(y)$, $\varphi_3(t)$ такими, что

$$\varphi_1(x_0)=\varphi_1(x_1)=0,\quad \varphi_2(y_0)=\varphi_2(y_1)=0,\quad \varphi_3(t_0)=\varphi_3(t_1)=0,$$
$$\varphi_1'(x_0)=\varphi_1'(x_1)=0,\quad \varphi_2'(y_0)=\varphi_2'(y_1)=0,$$

и применяя в (26) формулу интегрирования по частям к интегралам $\int_{x_0}^{x_1}\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\varphi_1(x)dx$ и $\int_{y_0}^{y_1}\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\varphi_2(y)dy$ два раза, а к интегралу $\int_{t_0}^{t_1}\frac{\partial U}{\partial t}\varphi_3(t)dt$ – один раз, получим:

$$a\left[\int_{t_0}^{t_1}\int_{y_0}^{y_1}\int_{x_0}^{x_1}U\varphi_1''\varphi_2\varphi_3\,dxdydt+\int_{t_0}^{t_1}\int_{y_0}^{y_1}\int_{x_0}^{x_1}U\varphi_1\varphi_2''\varphi_3\,dxdydt\right]=-\int_{t_0}^{t_1}\int_{y_0}^{y_1}\int_{x_0}^{x_1}U\varphi_1\varphi_2\varphi_3'\,dxdydt\,. \qquad (27)$$

Из равенства (27) определяем коэффициент a:

$$a=-\frac{\int_{t_0}^{t_1}\int_{y_0}^{y_1}\int_{x_0}^{x_1}U\varphi_1\varphi_2\varphi_3'\,dxdydt}{\int_{t_0}^{t_1}\int_{y_0}^{y_1}\int_{x_0}^{x_1}U\varphi_1''\varphi_2\varphi_3\,dxdydt+\int_{t_0}^{t_1}\int_{y_0}^{y_1}\int_{x_0}^{x_1}U\varphi_1\varphi_2''\varphi_3\,dxdydt}\,.$$

Определение переменных коэффициентов в дифференциальных уравнениях

В рассмотренных выше примерах интегральный аналог дифференциального уравнения является одним алгебраическим уравнением относительно постоянного коэффициента. Для определения же переменного коэффициента или нескольких коэффициентов необходимо составить систему **независимых** алгебраических уравнений, число которых должно соответствовать числу определяемых параметров. Независимость алгебраических уравнений можно достичь, используя различное количество информации при составлении интегральных аналогов уравнений (например, можно варьировать области интегрирования по любым координатам или изменять вид модулирующих функций и т.д.).

Рассмотрим примеры применения М-метода для определения переменных коэффициентов дифференциальных уравнений.

Пример 9. Определить коэффициент $k(x)$ в уравнении

$$y'=k(x)y \qquad x\in(a,b)\subset R\,. \qquad (28)$$

Предполагая функцию $k(x)$ достаточно гладкой, разложим ее по формуле Тейлора:

$$k(x)=k_0+k_1x+k_2x^2+\cdots+k_nx^n+R(x)\,, \qquad (29)$$

где $R(x)$ – остаточный член.

Ограничиваясь первыми n+1 членами разложения и подставляя (29) в уравнение (28), получаем:

$$y'=k_0y+k_1xy+k_2x^2y+\cdots+k_nx^ny\,. \qquad (30)$$

Умножим уравнение (30) на непрерывно дифференцируемые модулирующие функции $\varphi_i(x)$ $(i=0,1,...,n)$ и проинтегрируем полученные уравнения по отрезку $[x_0,x_1]\subset(a,b)$:

$$
\begin{cases}
\int\limits_{x_0}^{x_1} y'\varphi_0(x)dx = \int\limits_{x_0}^{x_1}\left(k_0 y\varphi_0(x) + k_1 xy\varphi_0(x) + k_2 x^2 y\varphi_0(x) + \dots + k_n x^n y\varphi_0(x)\right)dx;\\
\int\limits_{x_0}^{x_1} y'\varphi_1(x)dx = \int\limits_{x_0}^{x_1}\left(k_0 y\varphi_1(x) + k_1 xy\varphi_1(x) + k_2 x^2 y\varphi_1(x) + \dots + k_n x^n y\varphi_1(x)\right)dx;\\
\dots\\
\int\limits_{x_0}^{x_1} y'\varphi_n(x)dx = \int\limits_{x_0}^{x_1}\left(k_0 y\varphi_n(x) + k_1 xy\varphi_n(x) + k_2 x^2 y\varphi_n(x) + \dots + k_n x^n y\varphi_n(x)\right)dx.
\end{cases} \tag{31}
$$

Полученную систему уравнений (31) можно переписать так:

$$
\int\limits_{x_0}^{x_1} y'\varphi_i(x)dx = \sum_{i=0}^{n} k_i \int\limits_{x_0}^{x_1} x^i y\varphi_i(x)dx \qquad (i = 0,1,\dots,n). \tag{32}
$$

Выбирая модулирующие функции $\varphi_i(x)$ такими, что

$$
\varphi_i(x_0) = \varphi_i(x_1) = 0 \quad (i = 0,1,\dots,n),
$$

и применяя к левым частям уравнений системы (32) формулу интегрирования по частям, получим

$$
\begin{cases}
-\int\limits_{x_0}^{x_1} y\varphi_0'(x)dx = k_0\int\limits_{x_0}^{x_1} y\varphi_0(x)dx + k_1\int\limits_{x_0}^{x_1} xy\varphi_0(x)dx + k_2\int\limits_{x_0}^{x_1} x^2 y\varphi_0(x)dx + \dots + k_n\int\limits_{x_0}^{x_1} x^n y\varphi_0(x)dx;\\
-\int\limits_{x_0}^{x_1} y\varphi_1'(x)dx = k_0\int\limits_{x_0}^{x_1} y\varphi_1(x)dx + k_1\int\limits_{x_0}^{x_1} xy\varphi_1(x)dx + k_2\int\limits_{x_0}^{x_1} x^2 y\varphi_1(x)dx + \dots + k_n\int\limits_{x_0}^{x_1} x^n y\varphi_1(x)dx;\\
\dots\\
-\int\limits_{x_0}^{x_1} y\varphi_n'(x)dx = k_0\int\limits_{x_0}^{x_1} y\varphi_n(x)dx + k_1\int\limits_{x_0}^{x_1} xy\varphi_n(x)dx + k_2\int\limits_{x_0}^{x_1} x^2 y\varphi_n(x)dx + \dots + k_n\int\limits_{x_0}^{x_1} x^n y\varphi_n(x)dx.
\end{cases} \tag{33}
$$

Система (33) есть система линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных $k_0, k_1, \dots, k_n$.

Решая эту систему одним из известных методов (например, методом исключения Гаусса), найдем искомые параметры – коэффициенты k_i $(i = 0,1,\dots,n)$ в разложении (29).

Отметим, что независимость уравнений системы (33) можно достичь, как было отмечено выше, например, варьируя вид модулирующих функций $\varphi_i(x)$.

Пример 10. Определить коэффициент $k(x)$ в уравнении

$$
y'' + k(x)y' + g(y) = f(x). \tag{34}
$$

Здесь предполагается, что функции $f(x)$ и $g(y)$ непрерывны, а функция $k(x)$ достаточно гладкая. Уравнение (34) – это уравнение движения маятника в сопротивляющейся среде с переменным коэффициентом трения $k(x)$ и с восстанавливающей силой $g(y)$ под действием силы $f(x)$.

Как и в примере 9, разлагая функцию *k(x)* по формуле Тейлора и умножая уравнение (34) на дважды непрерывно дифференцируемые модулирующие функции $\varphi_i(x)$ $(i = 0,1,\dots,n)$, а затем интегрируя полученные уравнения, получим:

$$\begin{cases} k_0 \int\limits_{x_0}^{x_1} y'\varphi_0(x)dx + k_1 \int\limits_{x_0}^{x_1} xy'\varphi_0(x)dx + \dots + k_n \int\limits_{x_0}^{x_1} x^n y'\varphi_0(x)dx = \\ = \int\limits_{x_0}^{x_1} f(x)\varphi_0(x)dx - \int\limits_{x_0}^{x_1} g(x)\varphi_0(x)dx - \int\limits_{x_0}^{x_1} y''\varphi_0(x)dx; \\ k_0 \int\limits_{x_0}^{x_1} y'\varphi_1(x)dx + k_1 \int\limits_{x_0}^{x_1} xy'\varphi_1(x)dx + \dots + k_n \int\limits_{x_0}^{x_1} x^n y'\varphi_1(x)dx = \\ = \int\limits_{x_0}^{x_1} f(x)\varphi_1(x)dx - \int\limits_{x_0}^{x_1} g(y)\varphi_1(x)dx - \int\limits_{x_0}^{x_1} y''\varphi_1(x)dx; \\ \dots \\ k_0 \int\limits_{x_0}^{x_1} y'\varphi_n(x)dx + k_1 \int\limits_{x_0}^{x_1} xy'\varphi_n(x)dx + \dots + k_n \int\limits_{x_0}^{x_1} x^n y'\varphi_n(x)dx = \\ = \int\limits_{x_0}^{x_1} f(x)\varphi_n(x)dx - \int\limits_{x_0}^{x_1} g(y)\varphi_n(x)dx - \int\limits_{x_0}^{x_1} y''\varphi_n(x)dx. \end{cases}$$

Выбирая модулирующие функции $\varphi_i(x)$ такими, что

$$\varphi_i(x_0) = \varphi_i(x_1) = 0, \quad \varphi_i'(x_0) = \varphi_i'(x_1) = 0 \quad (i = 0,1,\dots,n)$$

и применяя к интегралам $\int\limits_{x_0}^{x_1} y''\varphi_n(x)dx$ формулу интегрирования по частям два раза, а к интегралам $k_i \int\limits_{x_0}^{x_1} x^i y'\varphi_i dx$ $(i = 0,1,\dots,n)$ – один раз, получим

$$\begin{cases} k_0 \int\limits_{x_0}^{x_1} y\varphi_0'(x)dx + k_1 \int\limits_{x_0}^{x_1} xy\varphi_0'(x)dx + \dots + k_n \int\limits_{x_0}^{x_1} x^n y\varphi_0'(x)dx = \\ = \int\limits_{x_0}^{x_1} y\varphi_0''(x)dx - \int\limits_{x_0}^{x_1} f(x)\varphi_0(x)dx + \int\limits_{x_0}^{x_1} g(y)\varphi_0(x)dx; \\ k_0 \int\limits_{x_0}^{x_1} y\varphi_1'(x)dx + k_1 \int\limits_{x_0}^{x_1} xy\varphi_1'(x)dx + \dots + k_n \int\limits_{x_0}^{x_1} x^n y\varphi_1'(x)dx = \\ = \int\limits_{x_0}^{x_1} y\varphi_1''(x)dx - \int\limits_{x_0}^{x_1} f(x)\varphi_1(x)dx + \int\limits_{x_0}^{x_1} g(y)\varphi_1(x)dx; \\ \dots \\ k_0 \int\limits_{x_0}^{x_1} y\varphi_n'(x)dx + k_1 \int\limits_{x_0}^{x_1} xy\varphi_n'(x)dx + \dots + k_n \int\limits_{x_0}^{x_1} x^n y\varphi_n'(x)dx = \\ = \int\limits_{x_0}^{x_1} y\varphi_n''(x)dx - \int\limits_{x_0}^{x_1} f(x)\varphi_n(x)dx + \int\limits_{x_0}^{x_1} g(y)\varphi_n(x)dx. \end{cases} \quad (35)$$

Получили, как и в примере 9, систему алгебраических уравнений относительно неизвестных k_i $(i = 0,1,\ldots,n)$. Решая ее, находим искомые коэффициенты k_i разложения функции $k(x)$.

Рассмотрим теперь более содержательный пример.

Пример 11. Определить коэффициент $k(x,y)$ в уравнении фильтрации

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[k(x,y)\frac{\partial P^2}{\partial x}\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[k(x,y)\frac{\partial P^2}{\partial y}\right]=2\mu\frac{\partial P}{\partial t}. \tag{36}$$

Здесь P – давление в точке пласта с координатами (x, y) в момент времени t, $k(x,y)$ – коэффициент проницаемости, μ – коэффициент динамической вязкости газа.

Как и выше, разложим функцию $k(x,y)$ по формуле Тейлора

$$k(x,y)=k_0+k_1x+k_2y+k_3xy+k_4x^2+k_5y^2+\cdots. \tag{37}$$

После подстановки (37) в уравнение (36) получим

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[k_0(P^2)'_x+k_1x(P^2)'_x+k_2y(P^2)'_x+k_3xy(P^2)'_x+k_4x^2(P^2)'_x+k_5y^2(P^2)'_x+\ldots\right]+$$
$$+\frac{\partial}{\partial y}\left[k_0(P^2)'_y+k_1x(P^2)'_y+k_2y(P^2)'_y+k_3xy(P^2)'_y+k_4x^2(P^2)'_y+k_5y^2(P^2)'_y+\ldots\right]=$$
$$=2\mu\frac{\partial P}{\partial t}. \tag{38}$$

Далее имеем

$$\begin{aligned}&\left\{k_0(P^2)''_{xx}+k_1(x(P^2)'_x)'_x+k_2y(P^2)''_{xx}+\ldots\right\}+\\&+\left\{k_0(P^2)''_{yy}+k_1x(P^2)''_{yy}+k_2(y(P^2)'_y)'_y+\ldots\right\}=2\mu(P^2)'_t\end{aligned}. \tag{39}$$

Умножим обе части уравнения (39) на гладкие функции $\varphi_i(x), \varphi_i(y), \varphi_i(t)$ $(i = 0,1,\ldots,n)$ (причем $\varphi_i(x)$ и $\varphi_i(y)$ – функции класса C^2, $\varphi_i(t)$ – функции класса C^1) и проинтегрируем полученное уравнение соответственно по отрезкам $x_0 \le x \le x_1$, $y_0 \le y \le y_1$, $t_0 \le t \le t_1$. Имеем:

$$\int_{t_0}^{t_1}\int_{y_0}^{y_1}\varphi_i(t)\varphi_i(y)dydt\cdot\left[k_0\int_{x_0}^{x_1}(P^2)''_{xx}\varphi_i(x)dx+k_1\int_{x_0}^{x_1}(x(P^2)'_x)'_x\varphi_i(x)dx+k_2\int_{x_0}^{x_1}y(P^2)''_{xx}\varphi_i(x)dx+\ldots\right]+$$
$$+\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\varphi_i(t)\varphi_i(x)dxdt\cdot\left[k_0\int_{y_0}^{y_1}(P^2)''_{yy}\varphi_i(y)dy+k_1\int_{y_0}^{y_1}x(P^2)''_{yy}\varphi_i(y)dy+k_2\int_{y_0}^{y_1}(y(P^2)'_y)'_y\varphi_i(y)dy+\ldots\right]=$$
$$=2\mu\int_{y_0}^{y_1}\int_{x_0}^{x_1}\varphi_i(y)\varphi_i(x)dxdy\int_{t_0}^{t_1}P'_t\varphi_i(t)dt \qquad (i=0,1,\ldots,n).$$

Выбирая модулирующие функции $\varphi_i(x)$, $\varphi_i(y)$, $\varphi_i(t)$, удовлетворяющие условиям

$$\varphi_i(x_0)=\varphi_i(x_1)=0, \qquad \varphi_i(y_0)=\varphi_i(y_1)=0, \quad \varphi_i(t_0)=\varphi_i(t_1)=0,$$
$$\varphi'_i(x_0)=\varphi'_i(x_1)=0, \qquad \varphi'_i(y_0)=\varphi'_i(y_1)=0, \quad (i=0,1,\ldots,n)$$

и применяя формулу интегрирования по частям по два раза к тем интегралам, в которых присутствуют $(P^2)''_{xx}$, $(P^2)''_{yy}$, а к интегралам, в которых присутствуют $(P^2)'_x$, $(P^2)'_y$, $(P^2)'_t$ – один раз, получим

$$\begin{gathered}
\int_{t_0}^{t_1}\int_{y_0}^{y_1}\varphi_i(t)\varphi_i(y)dydt\cdot\left[k_0\int_{x_0}^{x_1}P^2\varphi_i''(x)dx+k_1\int_{x_0}^{x_1}P^2\left(x\varphi_i'(x)\right)'dx+k_2\int_{x_0}^{x_1}yP^2\varphi_i''(x)dx+\ldots\right]+\\
+\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\varphi_i(t)\varphi_i(x)dxdt\cdot\left[k_0\int_{y_0}^{y_1}P^2\varphi_i''(y)dy+k_1\int_{y_0}^{y_1}xP^2\varphi_i''(y)dy+k_2\int_{y_0}^{y_1}P^2\left(y\varphi_i'(y)\right)'dy+\ldots\right]=\\
=-2\mu\int_{t_0}^{t_1}\int_{y_0}^{y_1}\int_{x_0}^{x_1}P\varphi_i(x)\varphi_i(y)\varphi_i'(t)dxdydt,\quad (i=0,1,\ldots,n).
\end{gathered}\tag{40}$$

Систему уравнений (40) можно переписать так:

$$\begin{gathered}
k_0\int_{t_0}^{t_1}\int_{y_0}^{y_1}\int_{x_0}^{x_1}P^2\left[\varphi_i''(x)\varphi_i(y)+\varphi_i''(y)\varphi_i(x)\right]\varphi_i(t)dxdydt+\\
+k_1\int_{t_0}^{t_1}\int_{y_0}^{y_1}\int_{x_0}^{x_1}P^2\left[(x\varphi_i'(x))'\varphi_i(y)+x\varphi_i''(y)\varphi_i(x)\right]\varphi_i(t)dxdydt+\\
+k_2\int_{t_0}^{t_1}\int_{y_0}^{y_1}\int_{x_0}^{x_1}P^2\left[(y\varphi_i'(y))'\varphi_i(x)+y\varphi_i''(x)\varphi_i(y)\right]\varphi_i(t)dxdydt+\\
+\cdots=-2\mu\int_{t_0}^{t_1}\int_{y_0}^{y_1}\int_{x_0}^{x_1}P\varphi_i(x)\varphi_i(y)\varphi_i'(t)dxdydt,\quad (i=0,1,\ldots,n).
\end{gathered}\tag{41}$$

Определение коэффициента $k(x,y)$ заключается в нахождении постоянных разложения $k_0, k_1, \ldots, k_n, \ldots$. Последние находятся из системы линейных алгебраических уравнений (41). Необходимую точность аппроксимации функции $k(x,y)$ соответствующим многочленом Тейлора можно обеспечить увеличением числа членов разложения в (37).

Замечание. В приведенных выше примерах в качестве модулирующих функций можно использовать, например, функции вида $\varphi(x)=(x-x_0)(x_1-x)$ в уравнениях, в которых присутствуют производные первого порядка и $\varphi(x)=(x-x_0)^2(x_1-x)^2$ – в уравнениях с производными второго порядка.

Примеры модулирующих функций

Универсальной модулирующей функцией является, например, функция:

$$\varphi(x)=\alpha(x)\exp\frac{-\beta(x)}{(x-x_0)(x_1-x)},\tag{42}$$

где $\alpha(x)$, $\beta(x)$ – функции, непрерывные вместе со своими производными вплоть до граничных точек x_0 и x_1.

Функция (42) вместе со своими производными любого порядка равна нулю на концах интервала (x_0, x_1) (в этом легко убедиться непосредственным вычислением). С помощью функций $\alpha(x)$, $\beta(x)$ можно придать любой «вес» экспериментальным функциям в области наблюдения. Схематически график функции (42) изображен на рис. 1.

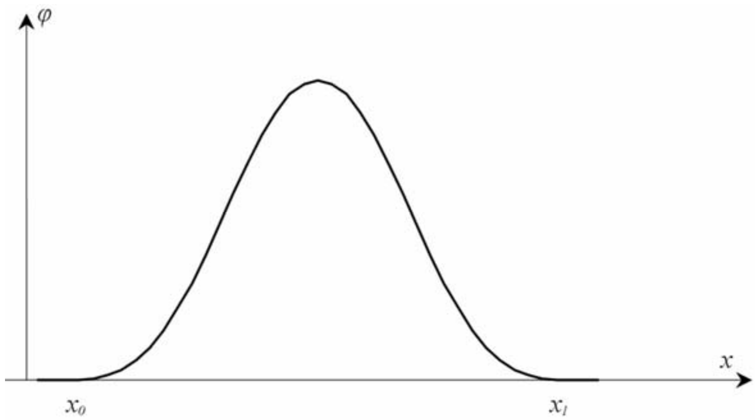

Рис. 1. Типичный график модулирующей функции.

Итак, модулирующая функция всегда может быть найдена и форма ее может быть выбрана почти любой.

Для дифференциальных уравнений фильтрации (т.е. уравнений, как правило, второго порядка) модулирующие функции для промежутка $[x_0, x_1]$ могут быть взяты весьма простого вида, например:

$$\kappa(x) = \alpha(x)(x - x_0)^2 (x_1 - x)^2, \qquad \kappa(x) = \alpha(x)\sin^2 \frac{\pi}{(x_1 - x_0)}(x - x_0),$$

где $\alpha(x)$ – любая непрерывная вплоть до точек x_0, x_1 функция. Множители $(x - x_0)^2 (x_1 - x)^2$ и $\sin^2 \frac{\pi}{(x_1 - x_0)}(x - x_0)$ обеспечивают выполнение условий (22). Множитель же $\alpha(x)$ обеспечивает необходимую форму модулирующей функции на отрезке $[x_0, x_1]$. В частности, можно взять $\alpha(x)=1$.

Для аргумента, по которому уравнение имеет первый порядок, модулирующие функции могут быть выбраны следующими:

$$\kappa(x) = \alpha(x)(x - x_0)(x_1 - x), \qquad \kappa(x) = \alpha(x)\sin \frac{\pi(x - x_0)}{(x_1 - x_0)}.$$

Заключение

Исходя из вышесказанного, можно сделать следующие выводы.

1. М-метод позволяет перейти от некорректной операции дифференцирования экспериментальной функции к корректной операции интегрирования.
2. В алгоритмах решения обратных задач с использованием М-метода отсутствует принципиальный источник погрешности – использование решений прямых краевых задач.
3. Преобразования, производимые при М-методе, эквивалентны исходному дифференциальному уравнению, и, теоретически, М-метод не имеет погрешности. Практически источником погрешностей могут служить численные методы решения интегралов, а также аппроксимация экспериментальной функции. Но эти погрешности можно свести к минимуму, повысив точность вычислений с использованием вычислительных мощностей современных ПЭВМ.
4. В данной работе на примерах проиллюстрирована эффективность метода модулирующих функций при решении обратных задач.

Отметим также, что одним из главных достоинств М-метода (наряду с эффективностью) является простота для его практического применения.

Примечания:

1. Мирзаджанзаде А.Х., Хасанов М.М., Бахтизин Р.Н. Моделирование процессов нефтегазодобычи. Нелинейность, неравновесность, неопределенность. – Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004. – 368 с.
2. Цей Р., Шумафов М.М. Математическое моделирование и обратные задачи // Вестник Адыгейского государственного университета. – 2008. – № 4(32). – С.18-24.
3. Loeb J., Cahen G. Extraction, a partik des enregistrements de mesures, des parametres dynamiques d um system. // Automatisme. – 1963. – № 12. – PP. 17-28.
4. Loeb J., Cahen G. More about process identification. // Trans. on Automatic Control. – 1965. – PP. 359-361.
5. Георгиевский В.Б. Унифицированные алгоритмы для определения фильтрационных параметров. Справочник. – Киев: Наукова думка, 1971. – 328 с.
6. Лукнер Л., Шестаков В.М. Моделирование геофильтрации. – М.: Недра,1976. – 407 с.
7. Трофимов В.В., Батищева Г.А. Реализация на ЭВМ унифицированных алгоритмов В.Б. Георгиевского. – Об. научн. тр. ЮжНИИгидротех. и мелиор., 1976, вып. 9. – С. 111-114.
8. Юдин А.И., Юдина О.К. Расчет фильтрационно-ёмкостных параметров по промысловым данным эксплуатации газового месторождения // Термодинамика кооперативных процессов в гетерогенных средах. Тюмень, 1985. – С. 80-85.
9. Закиров С.Н., Коршунова Л.Г., Нанивский Е.М. Решение двумерной обратной задачи теории разработки газовых месторождений – ЭИ ВНИИЭгазпрома, сер. Разработка и эксплуатация газовых и газоконденсатных месторождений. Вып. 12. – М., 1975.
10. Прогнозирование и регулирование разработки газовых месторождений. / Закиров С.Н., Васильев В.И., Гутников А.И. и др. – М.: Недра, 1984. – 295 с.
11. Закиров С.Н. Теория и проектирование разработки газовых и газоконденсатных месторождений. М.: Недра, 1989. – 334 с.
12. Палатник Б.М., Закиров И.С. Идентификация параметров газовых залежей при газовом и водонапорном режимах разработки. – Обз. инофрм. ВНИИЭгазпрома. Сер. Разработка и эксплуатация газовых и газоконденсатных месторождений. – М., 1990.