УДК 517.958:532:519.711.3
ББК 22.181
Ш 96
М.М. Шумафов, Р. Цей

Алгоритм решения задачи определения фильтрационно-ёмкостных параметров газоносного пласта методом модулирующих функций

(Рецензирована)

Аннотация

В работе приводится общая схема решения задачи определения фильтрационно-ёмкостных параметров газоносного пласта методом модулирующих функций. Применение метода иллюстрируется на примере решения обратной задачи для дифференциального уравнения, описывающего процесс неустановившейся фильтрации газа в пористой среде.

Ключевые слова: обратная задача, математическое моделирование, идентификация, дифференциальные уравнения, модулирующие функции, теория фильтрации, фильтрационные и ёмкостные параметры, газоносный пласт.

Введение

Как хорошо известно, одним из эффективных способов изучения математическими методами процессов, протекающих в окружающем нас мире, является моделирование этих процессов в виде **дифференциальных уравнений.** При этом, как правило, получаемые дифференциальные уравнения содержат коэффициенты, связанные с физическими характеристиками (параметрами) среды, в которой протекают эти процессы.

Подавляющее большинство существующих методов определения этих параметров (и, вообще, параметров систем, описываемых дифференциальными уравнениями) основано на использовании решений уравнений. В частности, это относится и к **обратным задачам теории фильтрации.**

Однако всем этим методам присущи серьезные недостатки (см., например, [1,2]). К недостаткам следует отнести следующее: низкая точность определяемых параметров, трудности обработки опытных данных, большое количество расчетных схем и формул, сложная структура формул, неохватность расчетными формулами сложных случаев фильтрации. Главный из недостатков – низкая точность определяемых параметров.

Одной из актуальных задач теории фильтрации является задача определения параметров нефтегазоносного пласта по натурным наблюдениям значений давления, насыщенности и др. с помощью контрольных скважин. Задаче определения фильтрационных и емкостных параметров газоносного пласта было посвящено немало работ. Обзор этих работ можно найти в [2].

В настоящей работе приводится общая схема решения задачи определения фильтрационно-ёмкостных параметров газоносного пласта **методом модулирующих функций** (далее, М-метод).

Идея применения М-метода для решения обратных задач восходит к работам **Дж. Лоэба** и **Г. Кахена** (J. Loeb, G. Cahen) [3, 4]. Возможность применения М-метода для решения задач нефтегазовой науки впервые была высказана **В.Б. Георгиевским** и им были разработаны унифицированные алгоритмы для решения обратных задач подземной гидрогазодинамики [1]. В работах [5,6] сделана программная реализация на основе унифицированных алгоритмов, разработанных в работах В.Б. Георгиевского [см., например, 1]. В работе [7] метод модулирующих функций обобщен на случай любой степени полиномов разложения неизвестных параметров газоносного пласта.

М-метод позволяет определить параметры модели **без использования решения краевых задач.** Идея М-метода состоит в том, что дифференциальное уравнение умножается на специальные «модулирующие» функции и интегрируется по частям. В результате, происходит «освобождение» от операции дифференцирования решения (исходного дифференциального уравнения) и «переход» этой операции к модулирующим функциям, которые можно выбирать достаточно гладкими. В итоге, исходное дифференциальное уравнение заменяется его интегральным аналогом.

Особо отметим, что в полученных выражениях отсутствуют производные от экспериментальных функций, что позволяет ликвидировать трудности, связанные с непосредственным дифференцированием экспериментальных функций. Эти трудности проистекают из-за того, что **операция дифференцирования экспериментальных функций является некорректной.**

Алгоритм определения фильтрационно-ёмкостных параметров

Приведем общую схему решения задачи определения фильтрационно-ёмкостных параметров пласта методом модулирующих функций на примере решения обратной задачи для дифференциального уравнения, описывающего процесс неустановившейся фильтрации газа в неоднородной по коллекторским свойствам пористой среде.

Дано дифференциальное уравнение (1), описывающее процесс неустановившейся фильтрации газа в неоднородной по коллекторским свойствам пористой среде (в безразмерном виде) [8]

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[A(x,y,p)\frac{\partial p^2}{\partial x}\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[A(x,y,p)\frac{\partial p^2}{\partial y}\right]=B(x,y)\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{p}{z(p)}\right)+2Q(x,y,t)h(x,y)\,p_{am}, \quad (1)$$

где $A(x,y,p)=\dfrac{k(x,y)h(x,y)}{\mu(p)z(p)}$, $B(x,y)=2\alpha(x,y)m(x,y)h(x,y)$, $k(x,y)$ – коэффициент проницаемости, $m(x,y)$ – коэффициент пористости, $h(x,y)$ – эффективная толщина пласта, $\alpha(x,y)$ – коэффициент газонасыщенности, $p(x,y,t)$ – давление в точке пласта (x,y) в момент времени t, $\mu(p)$ и $z(p)$ – соответственно коэффициенты динамической вязкости и сверхпроницаемости газа при давлении p и пластовой температуре, $Q(x,y,t)$ – объемный расход газа, отнесенный к единице площади пласта в точке пласта (x,y) в момент времени t к $p_{\text{ат}}$ (атмосферное давление) и $T_{\text{пл}}$ (пластовая температура).

Требуется определить коэффициенты $A(x,y,p)$ и $B(x,y)$ – «обобщенные» фильтрационные параметры.

Шаг 1. Разложить искомые функции $A(x,y,p)$ и $B(x,y)$ по формуле Тейлора. Отбросив остаточные члены, получаем следующее приближенное равенство

$$A(x,y,p)\approx\sum_{i,j,k=0}^{N_A}a_{ijk}x^i y^j p^k \qquad B(x,y)\approx\sum_{m,n=0}^{N_B}b_{mn}x^m y^n\ . \quad (2)$$

Здесь N_A и N_B – степени аппроксимации параметров $A(x,y,p)$ и $B(x,y)$ многочленами Тейлора. Тогда имеем

$$\begin{aligned} A(x,y,p)\frac{\partial p^2}{\partial x}&=\sum_{i,j,k=0}^{N_A}a_{ijk}x^i y^j p^k\frac{\partial p^2}{\partial x}=\sum_{i,j,k=0}^{N_A}\frac{2}{k+2}a_{ijk}x^i y^j\frac{\partial p^{k+2}}{\partial x}, \\ A(x,y,p)\frac{\partial p^2}{\partial y}&=\sum_{i,j,k=0}^{N_A}\frac{2}{k+2}a_{ijk}x^i y^j\frac{\partial p^{k+2}}{\partial y}+\cdots. \end{aligned} \quad (3)$$

Далее следует заменить выражения в квадратных скобках в (1) соответственно их приближенными значениями (3).

Шаг 2. Умножить полученное уравнение (1) на гладкие, непрерывные функции – модулирующие функции $\varphi_s(x), \varphi_s(y), \varphi_s(t)$ (причем $\varphi_s(x)$ и $\varphi_s(y)$ – дважды непрерывно дифференцируемые функции и $\varphi_s(t)$ – непрерывно дифференцируемая функция). Модулирующие функции $\varphi_s(x), \varphi_s(y), \varphi_s(t)$ можно, например, в виде

$$\varphi_s(x) = x^s (x - x_1)^2 (x_2 - x)^2,\ x_1 \le x \le x_2,$$
$$\varphi_s(y) = y^s (y - y_1)^2 (y_2 - y)^2,\ y_1 \le y \le y_2,$$
$$\varphi_s(t) = t^s (t - t_1)(t_2 - t),\ t_1 \le t \le t_2.$$

Далее следует проинтегрировать полученные уравнения в соответствующих пределах. Степень точности определения искомых параметров $A(x,y,p)$ и $B(x,y)$ определяется числом членов разложения $A(x,y,p)$ и $B(x,y)$ в степенные ряды. Для увеличения точности определения $A(x,y,p)$ и $B(x,y)$ следует брать многочлены более высокой степени (т.е. увеличить верхние границы аппроксимации N_A и N_B). Тем самым увеличится и верхнее значение индекса s, нумерующего модулирующие функции $\varphi_s(x), \varphi_s(y), \varphi_s(t)$.

Шаг 3. Применить формулу интегрирования по частям к тем интегралам, в которых присутствуют производные экспериментальной функции $p(x,y,t)$ необходимое число раз, что приведет от дифференцирования экспериментальной функции (которая является некорректной операцией) к дифференцированию гладких модулирующих функций. Имеем:

$$\sum_{i,j,k=0}^{N_A} \frac{2}{k+2} a_{ijk} \int_V p^{k+2} (x^i \varphi_s'(x))' y^j \varphi_s(y) \varphi_s(t) dV + \sum_{i,j,k=0}^{N_A} \frac{2}{k+2} a_{ijk} \int_V p^{k+2} (y^j \varphi_s'(y))' x^i \varphi_s(x) \varphi_s(t) d$$
$$+ \sum_{m,n=0}^{N_B} b_{mn} \int_V \frac{p}{z(p)} x^m y^n \varphi_s(x) \varphi_s(y) \varphi_s'(t) dV = 2 \int_V Q(x,y,t) h(x,y) \varphi_s(x) \varphi_s(y) \varphi_s(t) dV,$$

$$(i, j, k = 0,1,..., N_A;\ 0 \le i + j + k \le N_A),$$
$$(m, n = 0,1,..., N_B;\ 0 \le m + n \le N_B),$$
$$(s = 0,1,..., S),$$
$$V = [x_1, x_2] \times [y_1, y_2] \times [t_1, t_2],\ dV = dxdydt.$$

Шаг 4. Получить систему алгебраических уравнений относительно неизвестных a_{ijk}, b_{mn} – коэффициентов разложения $A(x,y,p)$ и $B(x,y)$.

$$\sum_{i,j,k=0}^{N_A} \frac{2}{k+2} a_{ijk} \int_V P^{k+2} \left[(x^i \varphi_s'(x))' y^j \varphi_s(y) + (y^j \varphi_s'(y))' x^i \varphi_s(x) \right] \varphi_s(t) dV +$$
$$+ \sum_{m,n=0}^{N_B} b_{mn} \int_V \frac{P}{z(P)} x^m y^n \varphi_s(x) \varphi_s(y) \varphi_s'(t) dV =$$
$$= 2 \int_V Q(x,y,t) h(x,y) \varphi_s(x) \varphi_s(y) \varphi_s(t) dV, \qquad (4)$$

$$(i, j, k = 0,1,..., N_A;\ 0 \le i + j + k \le N_A),$$
$$(m, n = 0,1,..., N_B;\ 0 \le m + n \le N_B),$$
$$(s = 0,1,..., S).$$

Шаг 5. Вычислить тройные интегралы $\int\limits_V$ – коэффициенты системы уравнений (4) сведением их к повторным и применением к последним квадратурных формул (например, Ньютона-Котеса, Гаусса, Монте-Карло, метод сплайнов и др.).

Шаг 6. Решить систему уравнений (4) хорошо известными методами (прямыми методами: Ньютона, исключения Гаусса, или итерационными методами: Якоби, Гаусса-Зейделя и др.).

Шаг 7. Записать найденные значения неизвестных коэффициентов a_{ijk}, b_{mn} в разложениях (2) искомых «обобщенных» фильтрационных параметров $A(x,y,p)$ и $B(x,y)$.

Заключение

В статье приведен алгоритм решения задачи определения фильтрационно-ёмкостных параметров пласта методом модулирующих функций на примере решения обратной задачи для дифференциального уравнения, описывающего процесс неустановившейся фильтрации газа в неоднородной по коллекторским свойствам пористой среде.

Следуя данной схеме, можно построить алгоритмы для решения и других обратных коэффициентных задач. Следует напомнить, что при применении М-метода отсутствует принципиальный источник погрешности – использование решений прямых краевых задач. Теоретически, М-метод не имеет погрешности в том смысле, что все используемые в нем преобразования эквивалентны. Источником погрешностей могут служить численные методы решения интегралов, а также аппроксимация экспериментальной функции. Но эти погрешности можно свести к минимуму, повысив точность вычислений с использованием вычислительных мощностей современных ПЭВМ.

Описанный выше алгоритм, основанный на М-методе, эффективен и прост для решения различных прикладных задач.

Примечания:

1. Георгиевский В.Б. Унифицированные алгоритмы для определения фильтрационных параметров. Справочник. – Киев: Наукова думка, 1971. – 328 с.
2. Мирзаджанзаде А.Х., Хасанов М.М., Бахтизин Р.Н. Моделирование процессов нефтегазодобычи. Нелинейность, неравновесность, неопределенность. – Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004. – 368 с.
3. Loeb J., Cahen G. Extraction, a partik des enregistrements de mesures, des parametres dynamiques d um system. // Automatisme. – 1963. – № 12. – PP. 17-28.
4. Loeb J., Cahen G. More about process identification. // Trans. on Automatic Control. – 1965. – PP. 359-361.
5. Лукнер Л., Шестаков В.М. Моделирование геофильтрации. – М.: Недра, 1976. – 407 с.
6. Трофимов В.В., Батищева Г.А. Реализация на ЭВМ унифицированных алгоритмов В.Б. Георгиевского. – Об. научн. тр. ЮжНИИгидротех. и мелиор., 1976, вып. 9. – С. 111-114.
7. Юдин А.И., Юдина О.К. Расчет фильтрационно-ёмкостных параметров по промысловым данным эксплуатации газового месторождения // Термодинамика кооперативных процессов в гетерогенных средах. Тюмень, 1985. – С. 80-85.
8. Закиров С.Н., Лапук Б.Б. Проектирование и разработка газовых месторождений. – М.: Недра, 1974. – С. 39.