УДК 517.55
ББК
П 56
Р.Г. Письменный

Факторизационная теорема

(Рецензирована)

Аннотация

В работе рассмотрено развитие известной теоремы И.Ф. Красичкова-Терновского о представлении целой функции экспоненциального типа в виде произведения двух целых функций одинакового роста.

Ключевые слова: целая функция, экспоненциальный тип, уточненный порядок, факторизационная теорема, эквивалентные множители.

Обозначения и основной результат

Известная факторизационная теорема И.Ф. Красичкова–Терновского доказана в работе [3, теорема 4.2]. В статье В.С. Азарина [1] дано альтернативное доказательство этой теоремы и показано, что она остается справедливой при переходе к функциям конечного порядка $\rho > 0$. В данной статье приведено доказательство факторизационной теоремы для целых функций уточненного порядка $\rho(t) \to \rho$ $(0 \le \rho < +\infty)$. В принципиально важном случае $\rho = 0$, предполагая выполненным дополнительное условие $t^{\rho(t)} \ge A \ln Bt$, $A, B > 0$, $t > t_0$.

Выберем неотрицательную функцию μ, определенную на луче $t \ge 0$. Считаем, что она возрастает, стремится к $+\infty$, дифференцируема в окрестности $+\infty$ и

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{\mu'(t)t}{\mu(t)} = \rho < +\infty. \tag{1}$$

Отметим, что из условия (1) вытекает, что функция $\rho(t) = \frac{\ln \mu(t)}{\ln t}$ является уточнённым порядком. Верно и обратное, то есть для любого уточненного порядка $\rho(t) \to \rho$ функция $\mu(t) = t^{\rho(t)}$ удовлетворяет соотношению (1).

Две функции f_1, f_2 комплексной переменной называются *μ-эквивалентными* (в обозначениях $f_1 \sim f_2$), если существует множество кружков $E = \{e_i\}$ нулевой линейной плотности такое, что $\ln|f_1(z)| - \ln|f_2(z)| = o(\mu(|z|))$, $z \to \infty$, $z \notin E$.

Пусть $\Lambda = \{\lambda_i\}$ — последовательность отличных от нуля комплексных чисел с единственной предельной точкой в бесконечности. Последовательности Λ соответствует каноническое произведение

$$G(z, p; \Lambda) = \prod G\left(\frac{z}{\lambda_i}, p\right),$$

где $G\left(\frac{z}{\lambda_i}, 0\right) = \left(1 - \frac{z}{\lambda_i}\right)$, $G\left(\frac{z}{\lambda_i}, p\right) = \left(1 - \frac{z}{\lambda_i}\right) \exp\left\{\frac{z}{\lambda_i} + ... + \frac{1}{p}\left(\frac{z}{\lambda_i}\right)^p\right\}$.

Будем предполагать, что выбранная последовательность Λ удовлетворяет условию

$$\int_0^r \frac{n(t; \Lambda)}{t} dt \le \omega(r)\mu(r), \tag{2}$$

где $\omega(t)$ интегрируема по Риману, равна нулю в некотором интервале $[0, t_0)$ и подчинена условию $\overline{\lim\limits_{t \to +\infty}}\, \omega(t) \le c$ $(0 < c < \infty)$. Здесь $n(t; \Lambda)$ — число точек λ_i (с учетом их кратностей) в круге $\{z : |z| \le t\}$.

Теорема 0.1 (факторизационная) *Если последовательность Λ удовлетворяет условию (2), то ее можно разбить на две подпоследовательности $A = \{a_i\}$ и $B = \{b_i\}$ таким образом, что при $\rho \notin \mathbf{N}$*

$$G(z,p;A) \sim G(z,p;B),$$

а при $\rho \in \mathbf{N}$ и некотором $\alpha \in \mathbf{C}$

$$G(z,p;A)e^{\alpha z^\rho} \sim G(z,p;B)e^{-\alpha z^\rho}.$$

Из этой теоремы, используя представление Адамара для целых функций конечного порядка, получаем следующее утверждение.

Следствие 1 (теорема о расщеплении) *Если последовательность $\Lambda = \{\lambda_i\}$ нулей целой функции f удовлетворяет условию (2) и*

$$\varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\ln\ln M_f(r)}{\ln \mu(r)} < \infty,$$

то функцию f можно расщепить на произведение двух эквивалентных множителей $f = f_1 f_2$, где $f_1 \sim f_2$.

Промежуточные результаты

Последовательность комплексных чисел $\Gamma = \{\gamma_i\}$ называется *d-близкой* к последовательности $\Lambda = \{\lambda_i\}$, если $|\gamma_i - \lambda_i| \le d|\lambda_i|$, $i = 1, 2, ...$

Пусть Γ — последовательность, d-близкая к Λ ($0 < d \le \frac{1}{2}$) и Λ удовлетворяет условию (2). Нетрудно показать, что Γ удовлетворяет аналогичному (2) условию

$$\int_0^r \frac{n(t;\Gamma)}{t}dt \le \Omega(r)\mu(r). \tag{3}$$

Множеством кружков E называется объединение счетной совокупности кружков $o_i = \{z : |z - h_i| \le \rho_i\}$ $(i = 1, 2, ...)$, причем предполагается, что в ограниченной части комплексной плоскости может содержаться лишь конечное число кружков o_i. Множество кружков E *центрировано* множеством P, если каждая точка P принадлежит по крайней мере одному кружку множества E и каждый кружок множества E содержит по крайней мере одну точку из P. *Переменной линейной плотностью* множества кружков E называется функция

$$p_E(r) = \frac{1}{r}\sum_{|h_i|\le r} \rho_i \ (r > 0),$$

линейной плотностью множества E называется величина

$$p_E = \varlimsup_{r\to+\infty} p_E(r).$$

Множество G называется *σ-удаленным* от множества P, если

$$\inf_{h\in P} |h - z| > \sigma\,|z|$$

для любой точки $z \in G$.

Адаптируя доказательство теоремы B из [2], получаем доказательство следующей теоремы. При $\rho = 0$ дополнительно предполагая, что для любых $A, B > 0$ при всех достаточно больших t выполняется неравенство

$$\mu(t) \ge A\ln Bt. \tag{4}$$

Теорема 0.2 *Пусть $f(z)$ — целая функция, удовлетворяющая условию*

$$\overline{\lim_{r\to+\infty}}\frac{\ln M_f(r)}{\mu(r)}\le c \quad (0<c<\infty), \tag{5}$$

и $0<\alpha<1$, $0<\beta\le 1$. Тогда любой целой функции $g(z)$, удовлетворяющей условию

$$\overline{\lim_{r\to+\infty}}\frac{\ln\ln M_g(r)}{\ln\mu(r)}<\infty, \tag{6}$$

с последовательностью корней $\Gamma=\{\gamma_i\}$ $(i=1,2,...)$, d-близкой $\left(0\le d<\frac{1}{2}\right)$ к последовательности корней $\Lambda=\{\lambda_i\}$ $(i=1,2,...)$ функции $f(z)$, можно поставить в соответствие множество кружков E_g со свойствами:

1) *множество E_g центрировано с множеством $\Gamma\bigcup\Lambda$,*

2) *линейная плотность множества E_g не превосходит βd^{α^2},*

3) *при $z\notin E_g$*

$$\ln|g(z)|-\ln|f(z)|=O_\rho(c)\frac{d^{1-\alpha}}{\alpha\beta\sin\pi\alpha}\mu(|z|),$$

если $\rho\notin\mathbf{N}$, и

$$\left|\ln|g(z)|-\ln|f(z)|-\mathrm{Re}\left[\left(a_g-a_f\right)z^p+\sum_{0<\lambda_i\le|z}\left(\frac{z}{\gamma_i}\right)^p-\left(\frac{z}{\lambda_i}\right)^p\right]\right|=$$

$$=O_\rho(c)\frac{d^{1-\alpha}}{\alpha\beta\sin\pi\alpha}\mu(|z|),$$

если $\rho\in\mathbf{N}$.

Последовательность $\Gamma=\{\gamma_i\}$ называется *эквивалентной* последовательности $\Lambda=\{\lambda_i\}$(в обозначениях $\Gamma\sim\Lambda$), если для любого $\varepsilon>0$ найдется номер $i(\varepsilon)$ такой, что $|\gamma_i-\lambda_i|\le\varepsilon\,|\lambda_i|$, при $i>i(\varepsilon)$. Отношение эквивалентности сохраняется при объединении эквивалентных последовательностей.

Лемма 0.1 *Пусть эквивалентные последовательности Γ и Λ удовлетворяют условиям (2) и (3) соответственно. Тогда при $\rho\notin\mathbf{N}$*

$$G(z,p;\Gamma)\sim G(z,p;\Lambda),$$

а при $\rho\in\mathbf{N}$

$$G^*(z,p;\Gamma\mid\Lambda)\sim G^*(z,p;\Lambda),$$

где

$$G^*(z,p;\Lambda)=\prod_{|\lambda_i|\le|z|}G\left(\frac{z}{\lambda_i},p-1\right)\prod_{|\lambda_i|>|z|}G\left(\frac{z}{\lambda_i},p\right),$$

$$G^*(z,p;\Gamma\mid\Lambda)=\prod_{|\lambda_i|\le|z|}G\left(\frac{z}{\gamma_i},p-1\right)\prod_{|\lambda_i|>|z|}G\left(\frac{z}{\gamma_i},p\right).$$

Пусть $d_n \to 0$ $(0 < d_n \le \frac{1}{2})$ при $n \to \infty$. Для любого номера n найдется номер k_n такой, что урезанная последовательность $\Gamma_{k_n} = \{\gamma_i\}$ $(i \ge k_n)$ является d_n-близкой к урезанной последовательности $\Lambda_{k_n} = \{\lambda_i\}$ $(i \ge k_n)$. Таким образом, согласно теореме 0.2, существует множество кружков $E^{(n)} = \left\{E_i^{(n)}\right\}$ линейной плотности не превосходящей $\delta_n = \beta d_n^{\alpha^2}$, такое, что при $z \notin E_i^{(n)}$:

$$|\ln|G(z,p;\Gamma_{k_n})| - \ln|G(z,p;\Lambda_{k_n})|| \le \varepsilon_n \mu(|z|), \tag{7}$$

если $\rho \notin \mathbf{N}$, и

$$|\ln|G^*(z,p;\Gamma_{k_n}|\Lambda_{k_n})| - \ln|G^*(z,p;\Lambda_{k_n})|| \le \varepsilon_n \mu(|z|), \tag{8}$$

если $\rho \in \mathbf{N}$. Здесь $\varepsilon_n = O_\rho(c)\frac{d_n^{1-\alpha}}{\alpha\beta\sin\pi\alpha} \to 0$ при $n \to \infty$. Если r_n достаточно велико, то при $|z| \ge r_n$

$$\begin{aligned} |\ln|G(z,p;\Gamma)| - \ln|G(z,p;\Gamma_{k_n})|| &\le \varepsilon_n \mu(|z|), \\ |\ln|G(z,p;\Lambda_{k_n})| - \ln|G(z,p;\Lambda)|| &\le \varepsilon_n \mu(|z|), \end{aligned} \tag{9}$$

если $\rho \notin \mathbf{N}$, и

$$\begin{aligned} |\ln|G^*(z,p;\Lambda)| - \ln|G^*(z,p;\Lambda_{k_n})|| &\le \varepsilon_n \mu(|z|), \\ |\ln|G^*(z,p;\Gamma|\Lambda)| - \ln|G^*(z,p;\Gamma_{k_n}|\Lambda_{k_n})|| &\le \varepsilon_n \mu(|z|), \end{aligned} \tag{10}$$

если $\rho \in \mathbf{N}$. Пусть $E_n = \left\{e_i^{(n)}\right\}$ — множество кружков, полученное добавлением к $E^{(n)}$ круга $|z| \le r_n$. Линейная плотность при этом не меняется и, значит, по-прежнему не превосходит δ_n. Из неравенств (7), (8), (9) и (10) следует, что

$$|\ln|G(z,p;\Gamma)| - \ln|G(z,p;\Lambda)|| \le 3\varepsilon_n \mu(|z|), \quad z \notin e_i^{(n)}, \tag{11}$$

если $\rho \in \mathbf{N}$, и

$$|\ln|G^*(z,p;\Gamma|\Lambda)| - \ln|G^*(z,p;\Lambda)|| \le 3\varepsilon_n \mu(|z|), \quad z \notin e_i^{(n)}, \tag{12}$$

если $\rho \notin \mathbf{N}$. Теперь задача заключается в следующем: из "частей" множеств кружков E_n составить новое множество кружков $E = \{e_i\}$ нулевой линейной плотности, такое, что при $z \to \infty$, $z \notin e_i$

$$|\ln|G(z,p;\Gamma)| - \ln|G(z,p;\Lambda)|| \le o\left(\mu(|z|)\right), \tag{13}$$

если $\rho \in \mathbf{N}$, и

$$|\ln|G^*(z,p;\Gamma|\Lambda)| - \ln|G^*(z,p;\Lambda)|| \le o\left(\mu(|z|)\right) \tag{14}$$

если $\rho \notin \mathbf{N}$.

Для этой цели воспользуемся процедурой из работы [2, доказательство леммы]. Пусть R_1 столь велико, что $P_{E_1}(r) + P_{E_2}(r) < 2(\delta_1 + \delta_2)$ при $r \ge R_1$ и, кроме того, окружность $|z| = R_1$ не пересекает кружки из E_1 и E_2. Такое r_1 всегда можно подобрать, если δ_1, δ_2 достаточно малы. Обозначим через Q_1 множество кружков из E_1, принадлежащих кругу $|z| \le R_1$. Выбираем теперь R_2 так, что

$$P_{Q_1}(r) + P_{E_2}(r) + P_{E_3}(r) < 2(\delta_2 + \delta_3) \quad \text{при } r \ge R_2$$

и окружность $|z| = R_2$ не пересекает кружки из E_2 и E_3. Пусть Q_2 — множество кружков из E_2, принадлежащих кольцу $R_1 \le |z| \le R_2$. Подбираем R_3 так, что

$$P_{Q_1}(r) + P_{Q_2}(r) + P_{E_3}(r) + P_{E_4}(r) < 2(\delta_3 + \delta_4) \quad \text{при } r \ge R_3$$

и окружность $|z| = R_3$ не пересекает кружки из E_3 и E_4. Пусть Q_3 — множество кружков из E_3, принадлежащих кольцу $R_2 \le |z| \le R_3$, и т.д. Рассмотрим объединение $E = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} Q_i$. Линейная плотность этого множества кружков равна нулю. Действительно, при $R_i \le r \le R_{i+1}$ имеем

$$P_E(r) \le P_{Q_1}(r) + \dots + P_{Q_{i+1}}(r) \le$$
$$\le P_{Q_1}(r) + \dots + P_{Q_{i-1}}(r) + P_{E_i}(r) + P_{E_{i+1}}(r) \le 2(\delta_i + \delta_{i+1}).$$

Значит $P_E(r) \to 0$ при $r \to \infty$. Проверим оценки (13), (14). Пусть $z \notin E$ и $R_{n-1} \le |z| \le R_n$. Тогда $z \notin E_n$, и, значит, при этих z имеют место оценки (11), (12). Так как это имеет место при всех n, то отсюда и следуют оценки (13), (14). Лемма доказана.

Доказательство факторизационной теоремы. Приступим к доказательству теоремы о расщеплении. Суть дальнейших построений сводится к следующему: комплексная плоскость специальным образом разбивается на "малые" ячейки; каждая группа точек λ_i, попадающих в отдельную ячейку, разбивается на две части, различающиеся по числу содержащихся в них членов самое большее на единицу: одна из этих частей относится к A, другая к B; последовательности A и B составленные таким образом будут искомыми.

Приступим к реализации намеченного плана. Подбираем убывающую последовательность σ_n, $1 \ge \sigma_n > 0$ такую, чтобы

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n \sigma_{n+1} < \infty. \tag{15}$$

При натуральном ρ предполагаем дополнительно, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n^{-1} \prod_{i=1}^{n} (1+\sigma_i)^{-\frac{\rho}{2}} < \infty. \tag{16}$$

Можно, например, положить $\sigma_n = n^{-q}$ ($\frac{1}{2} < q < 1$). Действительно,

$$\prod_{i=1}^{n} (1+\sigma_i)^{-\frac{\rho}{2}} = \exp\left\{-\frac{\rho}{2}\sum_{i=1}^{n} \ln\left(1+i^{-q}\right)\right\} \le \exp\left\{-\frac{\rho}{4}\sum_{i=1}^{n} i^{-q}\right\},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n^{-1} \prod_{i=1}^{n} (1+\sigma_i)^{-\frac{\rho}{2}} \le$$
$$\le \sum_{n=1}^{\infty} n^q \exp\left\{-\frac{\rho}{4}\sum_{i=1}^{n} i^{-q}\right\} \le \sum_{n=1}^{\infty} n^q \exp\left\{-\frac{\rho}{4} n^{1-q}\right\}.$$

Пусть

$$r_0 = 0, r_1 = t(1+\sigma_1), \dots, r_n = t(1+\sigma_1)\cdots(1+\sigma_n), \dots .$$

Параметр $t > 0$ подбирается так, чтобы окружности $|z| = r_n$ не пересекали точек λ_i. Эти окружности разбивают комплексную плоскость на кольца $R_n = \{z : r_n < |z| \le r_{n+1}\}$,

$i = 0, 1, \ldots$. Отрезками лучей, исходящими из начала, разбивается каждое кольцо R_n на $[\sigma_n^{-1}]$ одинаковых кольцевых секторов, причем так, чтобы стороны этих секторов не пересекали точек λ_i. Эти кольцевые секторы будем называть ячейками. Перенумеруем ячейки внутри колец и обозначим через $\Delta_{s,q}$ q-ую ячейку s-го кольца. Исследуем свойства такого разбиения.

а) Пусть d_s — диаметр ячеек s-го кольца. Расстояние между окружностями s-го кольца равно $r_{s+1} - r_s = r_s(1 + \sigma_{s+1}) - r_s = \sigma_{s+1} r_s \leq \sigma_s r_s$; большая дуга сектора $\Delta_{s,q}$ равна $\frac{2\pi r_{s+1}}{[\sigma_s^{-1}]} = O(\sigma_s r_s)$. Таким образом для диаметра d_s имеем оценку $d_s = O(\sigma_s r_s)$ $(s \to \infty)$.

б) Обозначим через N_k число точек λ_i, содержащихся в k-ом кольце. Утверждаем, что при натуральном ρ выполняется неравенство $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\sigma_k N_k}{r_k^\rho} < \infty$. Пусть $n(t)$ обозначает число точек λ_i в круге $|z| \leq t$. Используя преобразование Абеля имеем:

$$\sum_{k=1}^{\infty} N_k \frac{\sigma_k}{r_k^\rho} = -n(r_1)\frac{\sigma_1}{r_1^\rho} + \sum_{k=2}^{\infty} n(r_k)\left(\frac{\sigma_{k-1}}{r_{k-1}^\rho} - \frac{\sigma_k}{r_k^\rho}\right) =$$

$$= -n(r_1)\frac{\sigma_1}{r_1^\rho} + \sum_{k=2}^{\infty} n(r_k)\left(\frac{\sigma_{k-1}(\sigma_k+1)^\rho}{r_k^\rho} - \frac{\sigma_k}{r_k^\rho}\right) =$$

$$= -n(r_1)\frac{\sigma_1}{r_1^\rho} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{n(r_k)}{r_k^\rho}\left(\sigma_{k-1}\sum_{j=1}^{\rho}\binom{\rho}{j}\sigma_k^j + \sigma_{k-1} - \sigma_k\right) \leq$$

$$\leq -n(r_1)\frac{\sigma_1}{r_1^\rho} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{n(r_k)}{r_k^\rho}\left((2^\rho - 1)\sigma_{k-1}\sigma_k + \sigma_{k-1} - \sigma_k\right).$$

Последний ряд сходится, ибо ряды $\sum \sigma_{k-1}\sigma_k$ и $\sum(\sigma_{k-1} - \sigma_k)$ сходятся и отношение $\frac{n(r_k)}{r_k^\rho}$ ограничено.

в) Выберем в каждой ячейке $\Delta_{s,q}$ по одной точке $z_{s,q} \neq 0$. Утверждаем, что при натуральном ρ ряд $\sum\limits_{s,q} |z_{s,q}|^{-\frac{\rho}{2}}$ сходится. В самом деле в s-ом кольце содержится $[\sigma_s^{-1}]$ ячеек; поэтому принимая во внимание неравенства $|z_{s,q}| \geq r_s$ и условие (16) имеем:

$$\sum_{s,q} |z_{s,q}|^{-\frac{\rho}{2}} \leq \sum_s [\sigma_s^{-1}] r_s^{-\frac{\rho}{2}} \leq \frac{1}{t}\sum_s \sigma_s^{-1}(1+\sigma_1)^{-\frac{\rho}{2}}\cdots(1+\sigma_s)^{-\frac{\rho}{2}} < \infty.$$

Разбиваем последовательность Λ на группы $\Lambda_{s,q}$ точек λ_i, принадлежащих ячейкам $\Delta_{s,q}$. Каждую группу $\Lambda_{s,q}$ разбиваем на части $\Lambda'_{s,q}$, $\Lambda''_{s,q}$, $\Lambda'''_{s,q}$, требуется при этом, чтобы выполнялись условия: если группа $\Lambda_{s,q}$ содержит четное число, скажем $2k$, точек, то группы $\Lambda'_{s,q}$, $\Lambda''_{s,q}$ содержат каждая по k точек, а группа $\Lambda'''_{s,q}$ — пустая. Если группа $\Lambda_{s,q}$ содержит нечетное число $2k+1$ точек, то группы $\Lambda'_{s,q}$, $\Lambda''_{s,q}$ содержат каждая по k точек, а группа $\Lambda'''_{s,q}$ содержит одну точку. Из групп $\Lambda'_{s,q}$, $\Lambda''_{s,q}$, $\Lambda'''_{s,q}$ составим три последовательности $\Lambda' = \bigcup \Lambda'_{s,q}$, $\Lambda'' = \bigcup \Lambda''_{s,q}$, $\Lambda''' = \bigcup \Lambda'''_{s,q}$. Так как каждая ячейка содержит одинаковое число точек как из Λ' так и из Λ'', то эти две последовательности можно занумеровать таким образом, чтобы точки λ'_i, λ''_i из этих последовательностей с одинаковыми индексами принадлежали одной и той же ячейке. Так как в силу свойства а) разбиения, диаметр ячейки $\Delta_{s,q}$ равен $O(\sigma_s r_s)$ и $\sigma_s \to 0$ при $s \to \infty$, то последовательности Λ' и Λ'' эквивалентны. Поэтому по лемме 0.1

$$G(z, p; \Lambda') \sim G(z, p; \Lambda'')$$

при $\rho \notin \mathbf{N}$, и

$$G^*(z,\rho;\Lambda'|\Lambda'') \sim G^*(z,\rho;\Lambda'')$$

при $\rho \in \mathbf{N}$. Рассмотрим отношение $\frac{G(z,\rho;\Lambda')}{G(z,\rho;\Lambda'')}$ при $\rho \in \mathbf{N}$. Имеем

$$\ln\left|\frac{G(z,\rho;\Lambda')}{G(z,\rho;\Lambda'')}\right| = \mathrm{Re}\left\{\frac{z^\rho}{\rho}\sum_{|\lambda_i''|\le|z|}\left(\frac{1}{(\lambda_i')^\rho}-\frac{1}{(\lambda_i'')^\rho}\right)\right\}+$$

$$+\left\{\ln|G^*(z,\rho;\Lambda'|\Lambda'')| - \ln|G^*(z,\rho;\Lambda'')|\right\}.$$

По доказанному, второй член вне некоторого множества кружков нулевой линейной плотности равен $o(\mu(|z|))$. Мы утверждаем, что ряд в первом члене абсолютно сходится. В самом деле, учитывая, что λ_i', λ_i'' принадлежат одной и той же ячейке, имеем

$$\sum_i\left|\frac{1}{(\lambda_i')^\rho}-\frac{1}{(\lambda_i'')^\rho}\right| = \sum_i|\lambda_i''-\lambda_i'|\left|\frac{\sum_{j=0}^{\rho-1}(\lambda_i'')^j(\lambda_i')^{\rho-j-1}}{(\lambda_i'\lambda_i'')^\rho}\right| =$$

$$=\sum_i|\lambda_i''-\lambda_i'|\left|\sum_{j=0}^{\rho-1}(\lambda_i'')^{j-\rho}(\lambda_i')^{-j-1}\right| \le \rho\sum_k\frac{N_k d_k}{r_k^{\rho+1}} = \sum_k O\left(\frac{N_k\sigma_k}{r_k^\rho}\right).$$

В силу неравенства б) разбиения последний ряд сходится. Итак, заключаем, что $\frac{G(z,p;\Lambda')}{G(z,p;\Lambda'')} \sim e^{az^\rho}$, где

$$a = \begin{cases} 0 & \text{при } \rho \notin \mathbf{N}, \\ \frac{1}{\rho}\sum\left(\frac{1}{(\lambda_i')^\rho}-\frac{1}{(\lambda_i'')^\rho}\right) & \text{при } \rho \in \mathbf{N}. \end{cases}$$

Рассмотрим теперь каноническое произведение $G(z,p;\Lambda''')$. Каждая ячейка $\Delta_{s,q}$ содержит не более одной точки из Λ'''. Поэтому при $\rho \in \mathbf{N}$, как следует из свойства в) разбиения, ряд $\sum|\lambda_i'''|^{-\frac{\rho}{2}}$ сходится. Привлекая известный факт из теории целых функций конечного порядка, заключаем, что $G(z,p;\Lambda''') \sim e^{bz^\rho}$, где

$$b = \begin{cases} 0 & \text{при } \rho \notin \mathbf{N}, \\ \frac{1}{\rho}\sum\frac{1}{(\lambda_i''')^\rho} & \text{при } \rho \in \mathbf{N}. \end{cases}$$

Из вышеизложенного следует, что $\frac{G(z;\Lambda')G(z;\Lambda''')}{G(z;\Lambda'')} \sim e^{(a+b)z^\rho}$. Таким образом, если обозначить через A объединение Λ' и Λ''', а через B — последовательность Λ'' и положить $\alpha = -\frac{a+b}{2}$, то будем иметь $G(z;A)e^{\alpha z^\rho} \sim G(z;B)e^{-\alpha z^\rho}$. Тем самым теорема доказана.

Примечания:

1. Азарин В.С. О разложении целой функции конечного порядка на сомножители, имеющие заданный рост // Математический сборник. 1973. Т.90. №2. С. 229 – 230.

2. Красичков И.Ф. Сравнение целых функций конечного порядка по распределению их корней // Математический сборник. 1966. Т.70(112), №2. С. 198–230.

3. Красичков–Терновский И.Ф. Инвариантные подпространства аналитических функций. I. Спектральный синтез на выпуклых областях // Математический сборник. 1972. Т. 87(129), № 4. С. 459 – 489.