УДК 517.97
ББК 22.161.67
М 22

Д.К. Мамий, А.В. Лаврентьев, М.Х. Уртенов

Итерационные методы решения сингулярно возмущенных операторных уравнений Фредгольма*

(Рецензирована)

Аннотация

В работе предлагаются специальные итерационные методы решения сингулярно возмущенных операторных уравнений Фредгольма. В случае, когда однородное уравнение имеет нетривиальное решение, текущее приближение полностью определяется из условия разрешимости уравнения для следующего приближения. Получены оценки скорости сходимости.

Ключевые слова: *уравнения Фредгольма, решение, итерационное приближение, оператор, банахово пространство.*

D.K. Mamiy, A.V. Lavrent'ev, M.H. Urtenov

Iterative methods of solution of the Fredholm singular perturbed functional equations

Abstract

Special iterative methods of solving the Fredholm singular perturbed functional equations are offered. The current approximation is defined completely from resolvability of the equation for the next approximation in the case when the similar equation has a nontrivial solution. Estimations of convergence velocity have been obtained.

Key words: *Fredholm equations, solution, iterative approximation, operator, Banach space/*

В данной работе, являющейся продолжением [1], для сингулярно возмущенных операторных уравнений Фредгольма

$$T(x) + Z_\mu(x) = f,$$

в указанных в [1] условиях на T и Z_μ, предлагаются различные итерационные методы решения.

Пусть B – некоторое банахово пространство над R с нормой $\|\cdot\|_B$, а $L(B, B)$ – пространство линейных непрерывных операторов $B \to B$ с нормой

$$\|T\|_L = \max_{\|x\| \le 1} \|T(x)\|, x \in B, T \in L(B, B),$$

B^* – пространство сопряженное к B, T^* – оператор сопряженный к T.

Определим для сингулярно возмущенного операторного уравнения Фредгольма последовательные приближения

$$x_0 \in B \text{ – некоторый элемент,} \tag{1}$$

$$T(x_{k+1}) = -Z_\mu(x_k) + S, \; k = 0,1,... \tag{2}$$

1-й случай. Пусть уравнение $T(x)=0$ имеет лишь тривиальное решение, тогда уравнение $T(x)=S$ имеет решение для любого $S \in B$ (T – удовлетворяет первой части альтернативы Фредгольма), следовательно, T^{-1} существует. Так как T – линейный непрерыв-

---

Работа выполнена при финансовой поддержке Федерального агентства по образованию и науке РФ в рамках темы 1.4.08 Единого заказ/наряда.

ный оператор, а B – банахово пространство, то T^{-1} непрерывный линейный оператор. Следовательно, последовательные приближения (2) можно переписать в виде

$$x_{k+1} = -T^{-1}(Z_\mu(x_k)) + T^{-1}(s). \tag{3}$$

В силу условия $\lim\limits_{M \to M_0} \|Z_M\|_L = 0$ и ограниченности оператора T^{-1} существует такая окрестность U_{μ_0} точки μ_0, что оператор $\tilde{Z}_\mu = T^{-1}Z_\mu : B \to B$ является оператором сжатия с постоянной $q(\mu) = \|T^{-1}Z_\mu\|_L < \bar{q} < 1$ при $\mu \in U_{\mu_0} \cap U_0$. Более того $\lim\limits_{\mu \to \mu_0} q(\mu) = 0$.

Из теоремы о сжатых отображениях получаем справедливость следующей теоремы.

Теорема 1. Пусть $T(x)$=0 имеет лишь тривиальное решение. Тогда существует такая окрестность U_{μ_0} точки μ_0, что при каждом фиксированном $\mu \in U_{\mu_0} \cap U_0$ сингулярно возмущенное операторное уравнение Фредгольма имеет единственное решение x_μ, последовательные приближения x_k определены для любого k=1, 2, … при любых при $\mu \in U_{\mu_0} \cap U_0$, $x_0 \in B$ и сходятся к x_μ, причем справедливы оценки

$$\|x_k - x_\mu\|_B \le cq^{k+1}(\mu), k = 1,2,..., \mu \in U_{\mu_0} \cap U_0. \tag{4}$$

Замечание. Из оценки (4) видно, что последовательные приближения x_k сходятся к x_μ равномерно относительно $\mu \in U_{\mu_0} \cap U_0$ при $k \to \infty$ и при любом фиксированном k являются асимптотическими приближениями при $\mu \to \mu_0$.

2-й случай. Пусть справедлива вторая часть альтернативы Фредгольма, а именно: уравнение $T(x)$=0 имеет n линейно независимых решений $x^{(1)}, \ldots, x^{(n)}$. Тогда и уравнение $T^*(x)$=0 имеет n линейно независимых решений $g^{(1)}, \ldots, g^{(n)}$. В этом случае для разрешимости уравнения (4) необходимо и достаточно, чтобы

$$g^{(i)}(s)=0, \quad i=1, \ldots, n, \tag{5}$$

и тогда общее решение уравнения (4) имеет вид $x = x^* + \sum\limits_{i=1}^{n} c^{(i)}x^{(i)}$, где x^* – любое решение неоднородного уравнения (4), а $c^{(i)}$ – произвольные постоянные.

Составим матрицу $H_\mu = (g^{(j)}(Z_\mu(x^{(i)})))_{i,j}^n = 1$. Будем предполагать существование такой окрестности точки μ_0, что $\det H_\mu \neq 0$ при $\mu \in U_{\mu_0} \cap U_0$. Осуществим выбор нулевого приближения x_0 в виде

$$x_0 = \sum_{i=1}^{n} c_0^{(i)} x^{(i)}, \tag{6}$$

тогда для x_1 получим уравнение

$$T(x)=S_0,$$

где $S_0 = -\sum\limits_{i=1}^{n} c_0^{(i)} Z_\mu(x^{(i)}) + S$.

Это уравнение имеет решение

$$x_1 = x_1^* + \sum_{i=1}^{n} c_1^{(i)} x^{(i)},$$

если только

$$g^{(j)}(S_0)=0, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{7}$$

Обозначая $h=(g^{(i)}(s))_{i=1}^n$; $C_0 = (C_0^{(i)})_{i=1}^n$, систему (7) запишем в виде $H_\mu C_0=h$, откуда определим

$$C_0 = H_\mu^{-1} h. \tag{8}$$

Таким образом:

1) x_0 определено полностью;

2) уравнение для x_1 разрешимо.

Пусть уже определены $x_0, \ldots, x_k$, причем

$$x_k = x_k^* + \sum_{i=1}^{n} c_k^{(i)} x^{(i)} , \quad (9)$$

где x_k^* – некоторое решение неоднородного уравнения

$$T(x)=S_{k-1} , \quad (10)$$

где $S_{k-1} = Z_\mu(x_{k-1}) + S,$ $c_k^{(i)}$ пока не определены. Обозначим $c_i = (c_i^{(j)})_{j=1}^{n},$ $h_0=0,$ $h_i = (g^{(j)}(Z_\mu(x_i^*)))_{j=1}^{n}, i = 1, 2, \ldots$ и предположим $c_{k-1} = H_\mu^{-1}h - H_\mu^{-1}h_{k-1}$.

Определим c_k и x_{k+1}. Для x_{k+1} получаем уравнение

$$T(x) = S_k,$$

где $S_k = -Z_\mu(x_k^*) - \sum_{i=1}^{n} c_k^{(i)} Z_\mu(x^{(i)}) + S$. Это уравнение имеет решение

$$x_{k+1} = x_{k+1}^* + \sum_{i=1}^{n} c_{k+1}^{(i)} x^{(i)} ,$$

если только

$$g^{(i)}(S_k)=0, \quad j = 1, \ldots , n . \quad (11)$$

В векторной форме система (11) запишется в виде $H_\mu C_k=h-h_k$, откуда следует

$$C_k = H_\mu^{-1}h - H_\mu^{-1}h_k . \quad (12)$$

Таким образом, справедлива теорема 2.

Теорема 2. Пусть:

1. Уравнение $T(x)=0$ имеет n линейно независимых решений $x^{(1)}, \ldots, x^{(n)}$.

2. Существует такая окрестность U_{μ_0} точки μ_0, что

$$\det H_\mu \neq 0 \text{ при } \mu \in U_{\mu_0} \cap U_0 . \quad (13)$$

Тогда последовательные приближения, определенные равенствами (6), (8), (9), (12), существуют для любого $k=0,1, \ldots$

Прежде чем доказывать существование единственного решения x_μ сингулярно возмущенного операторного уравнения Фредгольма и сходимость к нему последовательных приближений x_k, определенных выше, рассмотрим некоторые свойства операторного уравнения Фредгольма (4) и возмущенного операторного уравнения Фредгольма (6), предполагая выполненным условие 1 теоремы 2. Согласно альтернативе Фредгольма уравнение $T^*(g)=0$ имеет также ровно n линейно независимых решений

$$g^{(1)}, \ldots , g^{(n)} .$$

Из теоремы о биортогонализации [2] следует существование элементов $y^{(1)}, \ldots , y^{(n)} \in B$ и $f_1, \ldots, f_n \in B^*$, таких что

$$f_j(x^{(i)}) = g_j(y^{(i)}) = \delta_{ij} , \quad i, j = 1,\ldots,n,$$

где δ_{ij} – символ Кронекера.

Из теоремы 1 из [2, с. 500] следует, что оператор T представим в виде

$$T(x)=W_1(x)+V_1(x),$$

где оператор W_1 имеет непрерывный обратный оператор, а $V_1(x) = -\sum_{i=1}^{n} f_i(x) y^{(i)}$ является конечномерным оператором.

Обозначим $S=\{y\in B: g_i(y)=0, i = 1, \ldots , n\}$.

Лемма 1. Для любого $y\in S,$ $x' = W_1^{-1}(y)$ является частным решением уравнения $T(x)=y$.

Доказательство. Введем обозначения

$$B' = N(f_1,..., f_n), \quad B'' = L(\{x^{(1)},..., x^{(n)}\}).$$

Очевидно $B = B' \oplus B''$. Покажем, что для любого y уравнение $T(x) = y$ имеет решение $x' \in B'$. Существование решения $x \in B$ следует из альтернативы Фредгольма.
Полагая $x = x' + x''$, $x' \in B'$, $x'' \in B$, получаем

$$y = T(x' + x'') = T(x') + T(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x^{(i)}) = T(x'), \tag{14}$$

то есть $T(x') = y$.

С другой стороны $W_1(x') = T(x') - V_1(x') = T(x') + \sum_{i=1}^{n} f_i(x^{(i)}) y^{(i)} = T(x') = y.$

Таким образом, x' решение уравнения $W_1(x') = y$, откуда и следует

$$x' = W_1^{-1}(y). \tag{15}$$

Из (14), (15) следует доказательство леммы 1.

Теорема 3. Пусть выполнено условие 1 теоремы 2 и существуют такая окрестность при U_{μ_0} точки μ_0 и такая постоянная c, что $\|H_\mu\|_{matr} \geq c\|Z_\mu\|_L$ при $\mu \in U_{\mu_0} \cap U_0$. Тогда существует такая окрестность $\tilde{U}_{\mu_0}$ точки μ_0, что сингулярно возмущенное операторное уравнение Фредгольма имеет не более одного решения при каждом $\mu \in \tilde{U}_{\mu_0} \cap U_0$.

Доказательство проведем от противного. Пусть при некотором $s \in B$ сингулярно возмущенное операторное уравнение Фредгольма имеет решения $\tilde{x}_1$ и $\tilde{x}_2$, причем $\tilde{x}_1 \neq \tilde{x}_2$. Обозначим $\tilde{\eta} = \tilde{x}_1 - \tilde{x}_2$. Тогда $\tilde{\eta}$ решение уравнения $T(\tilde{\eta}) + Z_\mu(\tilde{\eta}) = 0$, которое перепишем в виде $T(\tilde{\eta}) = -Z_\mu(\tilde{\eta})$. Из альтернативы Фредгольма, рассматривая $-Z_\mu(\tilde{\eta})$ как свободный член и используя лемму 1, получим

$$\tilde{\eta} = -W_1^{-1}(Z_\mu(\tilde{\eta})) + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x^{(i)}; \tag{16}$$

$$g_i(Z_\mu(\tilde{\eta})) = 0, \ i = 1,..., n. \tag{17}$$

Из (16) следует

$$\|\tilde{\eta}\|_B \leq \|W_1^{-1}\|_L \|Z_\mu\|_L \|\tilde{\eta}\|_B + \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| \|x^{(i)}\|_B, \text{ или } (1 - \|W_1^{-1}\|_L \|Z_\mu\|_L) \|\tilde{\eta}\|_B \leq \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| \|x^{(i)}\|_B.$$

Так как $\lim_{\mu \to \mu_0} \|Z_\mu\|_L = 0$, то существует такая окрестность $\tilde{U}_{\mu_0}$ точки μ_0, что

$$\|W_1^{-1}\|_L \|Z_\mu\|_L < 1 \text{ при } \mu \in \tilde{U}_{\mu_0} \cap U_0.$$

Следовательно,

$$\|\tilde{\eta}\| \leq \frac{1}{1 - \|W_1^{-1}\|_L \|Z_\mu\|_L} \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| \|x^{(i)}\|_B < c, \tag{18}$$

с учетом (16) получаем

$$\tilde{\eta} \leq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x^{(i)} + 0(\|Z_\mu\|_L) < c. \tag{19}$$

Подставляя (19) в (17), имеем

$$0 = g_j(Z_\mu(\tilde{\eta})) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i g(Z_\mu(x^{(i)})) + 0(\|Z_\mu\|_L^2) < c,$$

откуда с учетом

$$\|H_\mu\|_{matr} = \|(g_j(Z_\mu(x^{(i)})))_{i,j=1}^n\|_{matr} \geq c\|Z_\mu\|_L,$$

при $\mu \in \widetilde{U}_{\mu_0} \cap U_0 \subset U_{\mu_0} \cap U_0$ получаем α_i=0, i=1, … , n. Но тогда из неравенства (18) следует $\|\widetilde{\eta}\| \leq 0$, то есть $\widetilde{\eta} = 0$. Полученное противоречие и доказывает теорему.

Теорема 4. В условиях теоремы 3 сингулярно возмущенное операторное уравнение Фредгольма имеет решение x_μ и последовательные приближения x_k, k = 0, 1, … сходятся к x_μ, причем справедливы оценки

$$\|x_k - x_\mu\| \leq c(\|Z_\mu\|_L)^k,\ k = 0,1,... \tag{20}$$

Доказательство. Прежде всего, заметим, что

$$x_k = x_k^* + \sum_{i=1}^n c_k^{(i)} x^{(i)}$$

не зависит от выбора частного решения x_k^* неоднородного уравнения

$$T(x) = -Z_\mu(x_{k-1}) + S$$

в силу способа определения $c_k^{(i)}$, i = 1, … , n. Действительно, пусть

$$x_{k,1} = x_{k,1}^* + \sum_{i=1}^n c_{k,1}^{(i)} x^{(i)}; \qquad x_{k,2} = x_{k,2}^* + \sum_{i=1}^n c_{k,2}^{(i)} x^{(i)},$$

где $x_{k,1}^*, x_{k,2}^*$ – два разных решения неоднородного уравнения, тогда

$$x_{k,1}^* - x_{k,2}^* = \sum_{i=1}^n \alpha_i x^{(i)}$$

и, следовательно,

$$x_{k,1} - x_{k,2} = x_{k,1}^* - x_{k,2}^* + \sum_{i=1}^n (c_{k,1}^{(i)} - c_{k,2}^{(i)}) x^{(i)} = \sum_{i=1}^n (\alpha_i + c_{k,1}^{(i)} - c_{k,2}^{(i)}) x^{(i)}. \tag{21}$$

В силу определения c_k получаем $c_{k,1} - c_{k,2} = -H_\mu^{-1}(h_{k,1} - h_{k,2})$, где

$$h_{k,1} - h_{k,2} = (g^{(j)}(Z_\mu(x_{k,1}^*))_{j=1}^n - (g^{(j)}(Z_\mu(x_{k,2}^*))\,|_{j=1}^n = (g^{(j)}(Z_\mu(x_{k,1}^* - x_{k,2}^*)))_{j=1}^n =$$

$$= \sum_{i=1}^n \alpha_i g^{(j)}(Z_\mu(x^{(i)})))_{j=1}^n = H_\mu \alpha,\ \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)^T,$$

но тогда $c_{k,1}^{(i)} - c_{k,2}^{(i)} = -\alpha_i$ и из (21) получаем $x_{k,1} - x_{k,2} = 0$. Что и требовалось доказать.

Учитывая этот факт и то, что по построению S_k в уравнении $T(x) = S_k$ принадлежит S и, используя лемму 1, будем брать x_k^* при доказательстве теоремы в виде

$$x_k^* = W_1^{-1}(S_k)_i.$$

Введем обозначения $\eta_{k+1} = x_{k+1} - x_k$, $k = 1,2,...$ $\overline{x} = (x^{(i)})_{i=1}^n$. Тогда

$$\eta_{k+1} = x_{k+1} - x_k = x_{k+1}^* - x_k^* + \sum_{i=1}^n (c_{k+1}^{(i)} - c_k^{(i)}) x^{(i)}.$$

Используя указанный ранее способ выбора x_k^*, получим

$$x_{k+1}^* - x_k^* = W_1^{-1}(S_k) - W_1^{-1}(S_{k-1}) = W_1^{-1}(S_k - S_{k-1}) = -W_1^{-1}(Z_\mu(x_k - x_{k-1})) = -W_1^{-1}(Z_\mu(\eta_k))$$

и

$$c_{k+1} - c_k = -H_\mu^{-1}(h_{k+1} - h_k) = -H_\mu^{-1} g(Z_\mu(x_{k+1}^* - x_k^*)) = H_\mu^{-1} g(Z_\mu(W_1^{-1}(Z_\mu(\eta_k))).$$

Следовательно, $\eta_{k+1} = -W_1^{-1}(Z_\mu(\eta_k)) + H_\mu^{-1} g(Z_\mu(W_1^{-1}(Z_\mu(\eta_k))), \overline{x})$.

Откуда получаем оценку

$$\|\eta_{k+1}\|_B \le c_1\|Z_\mu\|_L\|\eta_k\|_B + c_2\|H_\mu^{-1}\|_{matr}\|Z_\mu\|_L^2\|\eta_k\|_B = (c_1 + c_2\|H_\mu^{-1}\|_{matr}\|Z_\mu\|_L)\|Z_\mu\|_L\|\eta_k\|_B \le$$
$$\le (c_1 + c_2c_3)\|Z_\mu\|_L\|\eta_k\|_B = c\|Z_\mu\|_L\|\eta_k\|_B.$$

По индукции получаем

$$\|\eta_{k+1}\|_B \le \left(c\|Z_\mu\|_L\right)^k\|\eta_1\|_B \le c\left(c\|Z_\mu\|_L\right)^{k-1}. \tag{22}$$

Из этой оценки следует сходимость последовательных приближений x_k.
Обозначая $x_\mu = \lim\limits_{k\to\infty} x_k$ и переходя в $T(x_k)= -Z_\mu(x_{k-1})+S$ к пределу при $k\to\infty$ с учетом непрерывности операторов T, Z_μ получаем, что x_μ решение сингулярно возмущенного операторного уравнения Фредгольма. Из $x_\mu - x_k = \sum\limits_{i=k+1}^{\infty}\eta_i$ и (22) получаем оценку (20), что и требовалось доказать.

Из доказательства теоремы видно, что $\|x_k\|_B \le c_1\|x_0\|_B$. Переходя в этом неравенстве при каждом $\mu\in \tilde{U}_{\mu_0}\cap U_0$ к пределу при $k\to\infty$, получаем оценку решения сингулярного возмущенного операторного уравнения Фредгольма $\|x_\mu\| \le c_1\|x_0\|_B$, $\mu\in \tilde{U}_{\mu_0}\cap U_0$.
Из (8) с учетом $h = (g^{(i)}(s))_{i=1}^n$, непрерывности $g^{(i)}$ и оценки $\|H_\mu\| \ge c_2\|Z_\mu\|_L$, получаем

$$\|x_\mu\| \le c\|Z\|_L^{-1}\|S\|. \tag{23}$$

Проведенные ранее рассуждения остаются, очевидно, справедливыми и в случае, когда S зависит от μ. Поэтому для уравнения

$$T(x)+Z_\mu(x)=S_\mu\,, \tag{24}$$

где S_μ: $U_0\to B$ справедлива теорема 5.

Теорема 5. Пусть выполнены условия теоремы 3 и, кроме того, существуют такие постоянная $c > 0$ и функционал $\psi(\mu): U_{\mu_0} \to R$, что

$$\|S_\mu\|_B \le c\psi(\mu),\ \mu\in U_{\mu_0}\cap U_0\,. \tag{25}$$

Тогда существует такая окрестность $\tilde{U}_{\mu_0}\subset U_{\mu_0}$ точки μ_0, что уравнение (24) имеет единственное решение x_μ, причем справедлива оценка

$$\|x_\mu\|_B \le c\|Z_\mu\|_L^{-1}\psi(\mu),\ \mu\in \tilde{U}_{\mu_0}\cap U_0\,. \tag{26}$$

В следующей работе нами будут предложены различные схемы последовательных приближений для операторного уравнения Фредгольма в случае, когда возмущение операторного уравнения Фредгольма представлено итерационными или асимптотическими приближениями.

Примечания:

1. Мамий Д.К., Лаврентьев А.В., Уртенов М.Х. Сингулярно возмущенные операторные уравнения Фредгольма // Труды ФОРА. 2008. № 13. С. 22-26. (URL: http://fora.adygnet.ru)
2. Канторович Л.В., Акилов Г.Н. Функциональный анализ. М., 1977. 742 с.

References:

1. Mamiy D.K., Lavrentiev A.V., Urtenov M.H. Fredholm singular perturbed functional equations // Proc. FORA, 2008. No. 13. P. 22-26. (URL: http://fora.adygnet.ru)
2. Kantorovich L.V., Akilov G.N. The functional analysis. M. 1977. 742 pp.