УДК 519.71
ББК 22.181
Ш 96

М. М. Шумафов

О стабилизации двумерных линейных дискретных систем

(Рецензирована)

Аннотация
В работе дается элементарное доказательство теоремы о стабилизации линейной дискретной системы управления второго порядка со скалярным входом и скалярным выходом с помощью периодической с периодом 3 обратной связи.

Ключевые слова: *линейная дискретная система управления, передаточная функция, стабилизация, периодическая обратная связь*

M. M. Shumafov

On stabilization of two-dimensional linear discrete-time systems

Abstract
In the paper, an elementary proof of the theorem of stabilization of linear discrete single-input and single-output system of second order by periodic feedback is given.

Key words: *linear discrete control system, transfer function, stabilization, periodic feedback.*

Введение

Проблема стабилизации линейным объектом управления с помощью стационарной линейной обратной связи является классической и рассматривалась многими авторами (см., например, обзоры [1 - 4], а также библиографию в [5]). Были получены достаточные условия стабилизируемости (и, более общо, управления спектром матрицы) линейных систем с помощью стационарной обратной связи. Одним из достоинств решения проблемы стационарной стабилизации является его аналитически замкнутая форма, что весьма важно в теории и практике управления при синтезе линейной обратной связи.

Однако, как хорошо известно, возможности стационарной стабилизации ограничены по сравнению с нестационарной.

В работах [6-11] было показано, как введение нестационарной периодической обратной связи в линейной дискретной системе расширяет возможности управления спектром матрицы замкнутой системы (и, в частности, стабилизации). Отметим, что для непрерывных систем соответствующая проблема нестационарной стабилизации была поставлена Р. Брокеттом в [12]. Решению этой проблемы посвящены работы Леонова [13,14], Моро и Аэлса [15].

В работе [11] в ряде важных случаев дано решение дискретного аналога стабилизационной проблемы Брокетта. В частности, в этой работе доказана теорема, дающая необходимые и достаточные условия стабилизируемости двумерной линейной дискретной системы с помощью периодической с достаточно большим периодом (низкочастотная стабилизация) обратной связи. Доказательство вышеупомянутой теоремы использует ряд общих теорем, и поэтому в целом является непростым.

В настоящей статье дается элементарное и прямое доказательство теоремы Леонова о стабилизируемости линейной дискретной системы с помощью периодической с периодом 3 обратной связи.

Постановка задачи

Рассмотрим двумерную линейную дискретную систему со скалярным входом и скалярным выходом

$$x(k+1) = Ax(k) + bu(k), \; y(k) = cx(k) \quad (k = 0, 1, 2, ...). \tag{1}$$

Здесь $x(k) \in R^2$ есть вектор состояния в текущий момент времени $t = k$, $u(k) \in R$ и $y(k) \in R$ - вход (управление) и выход соответственно в момент времени $t = k$; A, b и с являются вещественными постоянными матрицами размеров 2×2, 2×1 и 1×2 соответственно.

Введем в рассмотрение передаточную функцию системы (1)

$$W(z) = c(A - zI)^{-1} b \quad (z \in C). \tag{2}$$

Здесь I - единичная 2×2 матрица.

В работе [11] доказано следующее утверждение.

Теорема Леонова о стабилизации ([11]). *Пусть передаточная функция (2) системы (1) невырождена. Тогда для стабилизируемости системы (1) необходимо и достаточно, чтобы было выполнено, по крайней мере, одно из условий*

$$W(0) \neq 0 \quad \textit{или} \quad |\det A| < 1. \tag{3}$$

При этом в обратной связи $u(k) = s(k)y(k)$, стабилизирующей систему (1), функция $s = s(k)$ имеет достаточно большой период.

Отметим, что сформулированная выше теорема Леонова дает полное решение дискретного аналога проблемы Брокетта [12] для двумерных систем.

Как было отмечено во введении, при доказательстве теоремы Леонова используется ряд вспомогательных общих теорем, доказательства которых, в свою очередь, непростые.

Некоторые предварительные понятия и факты из линейной теории управления

Напомним некоторые хорошо известные понятия и факты из линейной теории управления, которые понадобятся нам ниже.

Систему (1) называют *управляемой,* если $rank(b, Ab) = 2$ и *наблюдаемой,* если $rank(c^*, A^*c^*) = 2$. Здесь знак $*$ обозначает операцию транспонирования.

Вместо управляемости и наблюдаемости системы (1) часто говорят просто об управляемости и наблюдаемости пар (A, b) и (A, c) соответственно.

Передаточная функция $W(z)$ системы (1) называется *невырожденной,* если её нельзя представить в виде отношения многочленов со степенью знаменателя меньшей, чем 2. Хорошо известно, что невырожденность передаточной функции $W(z)$ эквивалентна управляемости и наблюдаемости пар (A, b) и (A, c). Отметим также, что передаточная функция инвариантна относительно невырожденных линейных преобразований.

Систему (1) называют *стабилизируемой,* если существует обратная связь

$$u(k) = s(k)y(k) \quad (k = 0,1,2,... \text{ и } s(k) \in R) \tag{4}$$

такая, что система (1), замкнутая обратной связью (4), т.е. система

$$x(k+1) = (A + s(k)bc)x(k), \tag{5}$$

асимптотически устойчива.

Если $s(k) = const$, то говорят о стационарной стабилизации, а если $s(k) \neq const$, то - о нестационарной стабилизации.

Асимптотическая устойчивость дискретной системы (5) определяется так же, как и для непрерывных систем.

Хорошо известен ([5]) следующий критерий асимптотической устойчивости линейных дискретных систем вида $x_{k+1} = Bx_k$ с постоянной матрицей B: *линейная дискретная система* $x_{k+1} = Bx_k$ *асимптотически устойчива тогда и только тогда, когда все собственные значения матрицы* B *лежат внутри единичного круга на комплексной плоскости.*

Переформулировка задачи

Будем искать стабилизирующую функцию $s = s(k)$ в обратной связи (4) в классе периодических с периодом 3 функций:

$$s(k+3) = s(k) \qquad \forall k \in \{0,1,2,...\}. \tag{6}$$

Тогда система (1), замкнутая периодической обратной связью (4), (6) будет периодической с периодом 3.

Пусть $r \in \{0,1,2,...\}$. Тогда, используя (1) и (6), легко найти связь между состояниями $x(3r)$ и $x(3(r+1))$:

$$x(3(r+1)) = (A + s(2)bc)(A + s(1)bc)(A + s(0)bc)x(3r)\,. \tag{7}$$

Введя обозначения $\xi(r) := x(3r)$, перепишем соотношение (7) в виде

$$\xi(r+1) = M\xi(r)\,, \quad r \in \{0,1,2,...\}, \text{ где} \tag{8}$$

$$M = (A + s(2)bc)(A + s(1)bc)(A + s(0)bc)\,. \tag{9}$$

Таким образом, динамика периодической системы (1), (4), (6) определяется динамикой системы (8) с *постоянной* матрицей (9). Ясно, что асимптотическая устойчивость системы (5) эквивалентна асимптотической устойчивости системы (8).

Итак, задача стабилизируемости системы (1) с помощью периодической обратной связи (4), (6) сводится к следующей:

Даны вещественные 2×2, 2×1 *и* 1×2 *матрицы* A, b *и* c *соответственно.*

Требуется найти вещественные числа $s(0)$, $s(1)$ *и* $s(2)$ *такие, что собственные значения матрицы* M *из (9) лежат внутри единичного круга.*

Элементарное доказательство теоремы Леонова о стабилизации двумерной дискретной системы

А. Необходимость доказывается так же, как и в [11].

Если не выполнены соотношения (3), то, используя хорошо известное детерминантное равенство ([5])

$$\det(I + KM^*) = 1 + M^*K$$

(K и M - матрицы - столбцы, а I - единичная матрица) и, учитывая равенство $W(0) = cA^{-1}b = 0$, имеем

$$\det(A + s(k)bc) = \det A \cdot \det(I + s(k)A^{-1}bc) = \det A \cdot (1 + s(k)cA^{-1}b) = \det A.$$

Так как $|\det A| \geq 1$ по предположению, то $|\det(A + s(k)bc)| \geq 1 \quad \forall k \in \{0,1,2,...\}$.

Используя последнее неравенство, из формулы общего решения системы (5)

$$x(k+1) = \prod_{i=0}^{k} (A + s(i)bc)x(0)$$

получаем отсутствие асимптотической устойчивости системы (5) при любой функции $s = s(k)$.

B. Доказательство достаточности.

Представим передаточную функцию $W(z)$ системы (1) в виде дроби

$$W(z) = \frac{c_2 z + c_1}{z^2 + a_2 z + a_1}. \tag{10}$$

Здесь a_1, a_2; c_1, c_2 - некоторые вещественные числа. Заметим, что знаменатель дроби (10) есть характеристический многочлен матрицы A.

По условию функция $W(z)$ невырождена, т.е. выполнено неравенство

$$c_1^2 - a_2 c_1 c_2 + a_1 c_2^2 \neq 0. \tag{11}$$

Как было отмечено в п.3, невырожденность функции $W(z)$, и, следовательно, выполнение неравенства (11) является необходимым и достаточным условием управляемости и наблюдаемости системы (1). Поэтому в силу свойства инвариантности передаточной функции $W(z)$ систему (1) при помощи некоторого невырожденного линейного преобразования можно привести к каноническому виду, для которого

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_1 & -a_2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad c = (c_1 \; c_2). \tag{12}$$

Таким образом, не умаляя общности, можно считать, что система (1) уже имеет канонический вид (1), (12).

Теперь легко подсчитать матрицу M из (9). Введя обозначения

$$M = \{m_{ij}\} \quad (i, j = 1, 2); \quad s_n = s(n) \quad (n = 0, 1, 2),$$

имеем:

$$m_{11} = (a_2 + s_1 c_2)(a_1 + s_0 c_1),$$
$$m_{12} = (a_2 + s_1 c_2)(a_2 + s_0 c_2) - (a_1 + s_1 c_1),$$
$$m_{21} = (a_1 + s_0 c_1)[(a_1 + s_2 c_1) - (a_2 + s_2 c_2)(a_2 + s_1 c_2)],$$
$$m_{22} = (a_1 + s_2 c_1)(a_2 + s_0 c_2) - (a_2 + s_2 c_2) m_{12}.$$

Потребуем, чтобы $m_{12} = 0$, т.е.

$$(a_2 + s_1 c_2)(a_2 + s_0 c_2) = a_1 + s_1 c_1. \tag{13}$$

Из (13) находим

$$s_0 = \frac{(a_1 + s_1 c_1) - a_2(a_2 + s_1 c_2)}{c_2(a_2 + s_1 c_2)} \qquad (a_2 + s_1 c_2 \neq 0), \tag{14}$$

если $c_2 \neq 0$, и

$$s_1 = \frac{a_2^2 - a_1}{c_1}, \tag{15}$$

если $c_2 = 0$ (при этом $c_1 \neq 0$ в силу (11)).

При значениях s_0 и s_1, определяемых из (14) и (15), спектр $\sigma(M)$ (набор собственных значений) матрицы M имеет вид

$$\sigma(M) = \{(a_2 + s_1 c_2)(a_1 + s_0 c_1), \;\; (a_1 + s_2 c_1)(a_2 + s_0 c_2)\}. \tag{16}$$

Из (16) видно, что собственные значения матрицы M зависят от двух варьируемых параметров s_1 и s_2 в случае $c_1 \neq 0$, $c_2 \neq 0$, и s_0 и s_2 в случае $c_1 \neq 0$, $c_2 = 0$, а в случае $c_1 = 0$, $c_2 \neq 0$ − от одного варьируемого параметра s_1.

Рассмотрим эти случаи в отдельности.

1). Случай $c_1 \neq 0$, $c_2 = 0$.

Тогда спектр $\sigma(M) = \{a_2(a_1 + s_0 c_1); \; a_2(a_1 + s_2 c_1)\}$ из (16) лежит внутри единичного круга, если значения s_0 и s_2 определяются из неравенств

$$-a_1 - \frac{1}{|a_2|} < c_1 s_j < -a_1 + \frac{1}{|a_2|}, \quad j = 0, 2 \qquad (a_2 \neq 0). \tag{17}$$

Если $a_2 = 0$, то оба собственных значения матрицы M равны нулю.

Поскольку $W(0) = c_1 / a_1$, то система (1) в рассматриваемом случае стабилизируема с помощью периодической обратной связи (4) периода 3, если $W(0) \neq 0$.

2). Случай $c_1 = 0$, $c_2 \neq 0$.

В этом случае спектр (16) в силу равенства (13) имеет вид

$$\sigma(M) = \left\{ a_1(a_2 + s_1 c_2),\ \frac{a_1^2}{a_2 + s_1 c_2} \right\}. \tag{18}$$

Спектр (18) лежит внутри единичного круга, если выполняются неравенства

$$\left. \begin{array}{l} -a_2 - \dfrac{1}{|a_1|} < c_2 s_1 < -a_2 + \dfrac{1}{|a_1|}\ ,\ (a_1 \neq 0) \\ \left[\begin{array}{l} c_2 s_1 < -a_2 - a_1^2, \\ c_2 s_1 > -a_2 + a_1^2. \end{array} \right. \end{array} \right\} \tag{19}$$

Если $a_1 = 0$, то оба собственных значения матрицы M равны нулю.

Система неравенств (19) удовлетворяется, если

$$|a_1| < 1. \tag{20}$$

Поскольку $\det A = a_1$, то из (20) следует, что система (1) в рассматриваемом случае стабилизируема с помощью периодической обратной связи (4) периода 3, если $|\det A| < 1$.

3) *Случай* $c_1 \neq 0$, $c_2 \neq 0$.

Из равенств (14) и (13) находим

$$a_1 + s_0 c_1 = \frac{(a_1 c_2 - c_1 a_2)(a_2 + s_1 c_2) + c_1(a_1 + s_1 c_1)}{c_2(a_2 + s_1 c_2)}, \tag{21}$$

$$a_2 + s_0 c_2 = \frac{a_1 + s_1 c_1}{a_2 + s_1 c_2} \quad (a_2 + s_1 c_2 \neq 0). \tag{22}$$

Подставляя (21) и (22) в (16), перепишем выражение для спектра $\sigma(M)$ в следующем виде:

$$\sigma(M) = \left\{ \frac{(a_1 c_2 - a_2 c_1)(a_2 + s_1 c_2) + c_1(a_1 + s_1 c_1)}{c_2},\ \frac{(a_1 + s_2 c_1)(a_1 + s_1 c_1)}{a_2 + s_1 c_2} \right\}. \tag{23}$$

Заметим, что в (23) два свободных параметра s_1 и s_2. Спектр (23) лежит внутри единичного круга, если выполнены неравенства

$$\left. \begin{array}{l} |(a_1 c_2 - a_2 c_1)(a_2 + s_1 c_2) + c_1(a_1 + s_1 c_1)| < |c_2|, \\ |a_1 + s_2 c_1| \cdot \left| \dfrac{a_1 + s_1 c_1}{a_2 + s_1 c_2} \right| < 1 \quad (a_2 + s_1 c_2 \neq 0). \end{array} \right\} \tag{24}$$

Ясно, что второе из неравенств (24) разрешимо относительно s_2 (так как $c_1 \neq 0$) при любом фиксированном значении $s_1 \neq -a_2/c_2$.

Перепишем первое из неравенств (24) в виде

$$\left|s_1(c_1^2 - a_2c_1c_2 + a_1c_2^2) - (c_1a_2^2 - c_2a_1a_2 - c_1a_1)\right| < |c_2|. \tag{25}$$

В силу условия (11) неравенство (25) разрешимо относительно s_1. Следовательно, искомые значения параметров s_1 и s_2, удовлетворяющие (24), определяются из неравенств:

$$\left.\begin{aligned} &-|c_2| + (c_1a_2^2 - c_2a_1a_2 - c_1a_1) < s_1\Delta < |c_2| + (c_1a_2^2 - c_2a_1a_2 - c_1a_1),\\ &-\left|\frac{a_2 + s_1c_2}{a_1 + s_1c_1}\right| - a_1 < s_2c_1 < \left|\frac{a_2 + s_1c_2}{a_1 + s_1c_1}\right| - a_1,\\ &s_1 \neq -\frac{a_1}{c_1},\ \ s_2 \neq -\frac{a_2}{c_2}. \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

Здесь $\Delta := c_1^2 - a_2c_1c_2 + a_1c_2^2 \neq 0$ в силу (11).

Итак, в рассматриваемом случае система (1) всегда стабилизируема с помощью периодической обратной связи (4) периода 3.

Таким образом, достаточность, и, следовательно, теорема Леонова о стабилизируемости двумерной дискретной системы доказана.

Замечание. В ходе вышеприведенного доказательства теоремы дан конструктивный метод нахождения стабилизирующей систему (1) периодической с периодом 3 обратной связи (4), (6). При этом значения s_0, s_1 и s_2 определяются из неравенств (17) (в случае $c_1 \neq 0$, $c_2 = 0$), из (19) (в случае $c_1 = 0$, $c_2 \neq 0$), из (26) (в случае $c_1 \neq 0$, $c_2 \neq 0$).

Примечания:

1. *Andry A.N., Shapiro E.Y., Chung J.C.* Eigenstructure Assignment for Linear Systems // IEEE Aerospace & Electronic Systems. 1983. Vol. Aes-19, № 5. P. 711-728.
2. *Bernstein D.S.* Some Open Problems in Matrix Theory Arising in Linear Systems and Control // Linear Algebra and its Applications. 1992. Vol. 162-164. P. 409-432.
3. Static Output Feedback.-A Survey / *V.L. Syrmos, C.T. Abdallah, P. Dorato, K. Grigoriadis*// Automatica. 1977. V. 33, № 2. P. 125-137.
4. *Поляк Б.Т., Щербаков П.С.* Трудные задачи линейной теории управления. Некоторые подходы к решению// Автоматика и телемеханика. 2005. № 5. С. 7-46.
5. *Леонов Г.А., Шумафов М.М.* Методы стабилизации линейных управляемых систем. СПб., 2005. 420 с.
6. *Greschak J.P., Verghese G.C.* Periodically varying compensation of time-invariant systems// Systems and Control Letters. 1982. V. 2. P. 88-93.

References:

1. Andry A.N., Shapiro E.Y., Chung J.C. Eigenstructure Assignment for Linear Systems // IEEE Aerospace and Electronic Systems. 1983. Vol. Aes-19, No. 5. P. 711-728.
2. Bernstein D.S. Some Open Problems in Matrix Theory Arising in Linear Systems and Control // Linear Algebra and its Applications. 1992. Vol. 162-164. P. 409-432.
3. Syrmos V.L. Abdallah C.T., Dorato P., Grigoriadis K. Static Output Feedback. - A Survey// Automatica. 1977. V. 33. No. 2. P. 125-137.
4. Polyak B.T., Shcherbakov P.S. Difficult problems of the linear theory of management. Some approaches to the decision// Automatics and Telemechanics. 2005. No. 5. P. 7-46.
5. Leonov G.A., Shumafov M.M. Method of stabilization of linear controlled systems. SPb., 2005. 420 pp.
6. Greschak J.P., Verghese G.C. Periodically varying compensation of time-invariant systems// Systems and Control Letters. 1982. V. 2. P. 88-93.

7. *Kaczorek T.* Pole placement for linear discrete-time systems by periodic output feedbacks// Systems and Control Letters. 1985. V. 6. P. 267-269.

8. *Willems J.L.* Time-varying feedback for the stabilization of fixed modes in decentralized control systems// Automatica. 1989. V. 25. P. 127-131.

9. *Aeyels D., Willems J.L.* Pole Assignment for Linear Time-Invariant Second-Order Systems by Periodic Static Output Feedback// IMA Journ. of Math. Contr. & Inform. 1991. V. 8. P. 267-274.

10. *Aeyels D., Willems J.L.* Pole Assignment for Linear Time-Invariant Systems by Periodic Memoryless Output feedback// Automatica. 1992. V. 28, № 6. P. 1159-1168.

11. *Леонов Г.А.* Проблема Брокетта для линейных дискретных систем управления// Автоматика и телемеханика. 2002. № 5. С. 92-96.

12. *Brockett R.* Stabilization problem. In book: Open problems in Mathematical Systems and Control Theory. Berlin, 1999. P. 75-78.

13. *Леонов Г.А.* Проблема Брокетта в теории устойчивости линейных дифференциальных уравнений // Алгебра и анализ. 2001. Т. 13, вып. 4. С.134-155.

14. *Леонов Г.А.* Стабилизационная проблема Брокетта // Автоматика и телемеханика. 2001. № 5. С. 190-193.

15. Moreau L., Aeyels D. Periodic output feedback stabilization of single-input single-output continuous-time systems with odd relative degree // Systems & Control Letters. 2004. V. 54. P. 395-406.

7. Kaczorek T. Pole placement for linear discrete-time systems by periodic output feedbcks// Systems and Control Letters. 1985. V. 6. P. 267-269.

8. Willems J.L. Time-varying feedback for the stabilization of fixed modes in decentralized control systems // Automatica. 1989. V. 25. P. 127-131.

9. Aeyels D., Willems J.L. Pole Assignment for Linear Time-Invariant Second-Order Systems by Periodic Static Output Feedback // IMA Journ. of Math. Contr. and Inform. 1991. V. 8. P. 267-274.

10. Aeyels D., Willems J.L. Pole Assignment for Linear Time-Invariant Systems by Periodic Memoryless Output feedback // Automatica. 1992. V. 28. No. 6. P. 1159-1168.

11. Leonov G.A. Brockett's problem for linear discrete control systems // Automatics and Telemechanics. 2002. No. 5. P. 92-96.

12. Brockett R. Stabilization problem. In: Open problems in Mathematical Systems and Control Theory. Berlin: Springer, 1999. P. 75-78.

13. Leonov G.A. Brockett's problem in the theory of stability of the linear differential equations // Algebra and the analysis. 2001. V. 13. Issue 4. P. 134-155.

14. Leonov G.A. Brockett's stabilization problem // Automatics and Tlemechanics. 2001. No. 5. P. 190-193.

15. Moreau L., Aeyels D. Periodic output feedback stabilization of single-input single-output continuous-time systems with odd relative degree // Systems and Control Letters. 2004. V. 54. P. 395-406.