УДК 517.925.41
ББК 22.161.61
Т 49

В.Б. Тлячев, А.Д. Ушхо, Д.С. Ушхо

Качественное исследование полиномиальных дифференциальных систем и некоторые приложения теории прямых изоклин

(Рецензирована)

Аннотация

В работе рассматриваются применения теории прямых изоклин к изучению вопросов качественного исследования автономных кубических и квадратичных дифференциальных систем. В частности, приводится новое доказательство теоремы Берлинского о числе особых точек второй группы квадратичной системы.

Ключевые слова: *прямая изоклина, особая точка, полиномиальная автономная дифференциальная система.*

V.B. Tlyachev, A.D. Ushkho, D.S. Ushkho

Qualitative research of polynomial differential systems and some applications of the straight isoclines theory

Abstract

The paper examines applications of the straight isoclines theory to qualitative research of independent cubic and quadratic differential systems. The authors give the new proof of Berlinsky theorem about a number of special points of the second group of quadratic system.

Key words: *a straight isocline, a special point, polynomial independent differential system.*

В общей качественной теории автономных систем двух дифференциальных уравнений важная роль отводится полиномиальным системам. Наиболее изученными из них являются системы вида:

$$\frac{dx}{dt}=\sum_{i+j=0}^{2}a_{ij}x^i y^j \equiv P_2\,,\ \frac{dy}{dt}=\sum_{i+j=0}^{2}b_{ij}x^i y^j \equiv Q_2\,, \tag{1}$$

где $a_{ij}, b_{ij} \in R$, $(P_2, Q_2)=1$. Это можно объяснить многочисленными их приложениями во многих областях, и прежде всего, в теории колебаний [1]. Для системы (1) решены многие проблемы, такие, как проблема различения центра и фокуса [2], числа особых точек второй группы и распределения особых точек в конечной части фазовой плоскости [3], сосуществования особой точки типа «центра» и предельных циклов [4], прямых изоклин и канонических форм [3, 5, 6].

Число работ, посвященных изучению кубической дифференциальной системы

$$\frac{dx}{dt}=\sum_{i+j=0}^{3}a_{ij}x^i y^j \equiv P_3\,,\ \frac{dy}{dt}=\sum_{i+j=0}^{3}b_{ij}x^i y^j \equiv Q_3\,, \tag{2}$$

где $a_{ij}, b_{ij} \in R$, $(P_3, Q_3)=1$, значительно меньше. Для частного случая системы (2) решена проблема различения центра и фокуса (см. монографию [2] и указанную в ней библиографию), проблема сосуществования предельного цикла и особой точки типа «центр» [7], оценки числа особых точек второй группы для системы (2) [8], проблема симметрии векторного поля системы (2) [9], сосуществования предельных циклов и инвариантных прямых [10], прямых изоклин и канонических форм [11].

В настоящей работе приводятся применения теории прямых изоклин к изучению некоторых вопросов качественного исследования систем (1) и (2).

П.1. Элементарное доказательство теоремы Берлинского А.Н. о числе особых точек второй группы системы (1)

Определение 1.1. Особая точка *M* (x_0, y_0) типа «фокус» или «центр» дифференциальной системы

$$\frac{dx}{dt} = P(x,y)\,,\ \frac{dx}{dt} = Q(x,y) \tag{3}$$

называется особой точкой второй группы, если выполняется одно из условий:

$$P_x'(x_0,y_0) + Q_y'(x_0,y_0) = 0\,,\ P_x'(x_0,y_0)Q_y'(x_0,y_0) - P_y'(x_0,y_0)Q_x'(x_0,y_0) > 0\,, \tag{4}$$

$$P_x'(x_0,y_0) + Q_y'(x_0,y_0) = 0\,,\ P_x'(x_0,y_0)Q_y'(x_0,y_0) - P_y'(x_0,y_0)Q_x'(x_0,y_0) = 0\,. \tag{5}$$

Очевидно, условие (4) ((5)) соответствует случаю чисто мнимых (двух нулевых) корней характеристического уравнения особой точки *M* (x_0, y_0). Согласно [2] система (1) может иметь только особые точки второй группы с чисто мнимыми характеристическими числами. В статье [3] доказана теорема 2, согласно которой квадратичная дифференциальная система (1) имеет не более двух особых точек второй группы.

Приведем доказательство этой теоремы, опирающееся на сведения из теории прямых изоклин [5, 6]. Предварительно дадим уточненное определение понятий контакта и согласованности точек на гладкой кривой (см. [12])

Определение 1.2. Точка *M* называется контактом на гладкой кривой *L*, если вектор $\vec{V}(M)$ поля системы (3) в точке *M* является направляющим вектором касательной к *L* в этой точке.

Определение 1.3. Пусть прямая d – нормаль к гладкой кривой *L* в точке *M*, $\vec{V}(M) = \overrightarrow{MN}$, N_1 - нормальная проекция точки *N* на прямую *d*. Тогда, позволяя себе некоторую вольность, проекцией вектора $\vec{V}(M)$ на нормаль назовем вектор $\overrightarrow{MN_1}$.

Далее рассмотрим две произвольные точки M_1 и M_2 гладкой кривой *L*, не являющиеся контактами на *L*. Дугу M_1M_2 кривой *L* достроим произвольным образом до простой гладкой замкнутой кривой L_1. Односвязную (двусвязную) область, ограниченную кривой L_1, обозначим через $G_1(G_2)$. Условимся вектору $\vec{V}(M_1)$ $(\vec{V}(M_2))$ ставить в соответствие сонаправленный с ним вектор $\vec{p}(M_1)$ $(\vec{p}(M_2))$ такой, что его проекция (в смысле определения 1.3) на нормаль к кривой L_1 в точке $M_1(M_2)$ целиком лежит в одной и только одной из двух областей G_1 и G_2.

Определение 1.4. Точки M_1 и M_2 называются согласованными на *L*, если проекции векторов $\vec{p}(M_1)$ и $\vec{p}(M_2)$ на нормали к кривой L_1 в точках M_1 и M_2, соответственно, лежат в одной из областей: G_1 или G_2. Если проекции векторов $\vec{p}(M_1)$ и $\vec{p}(M_2)$ лежат в разных областях, то M_1 и M_2 не согласованы на *L*.

Из последнего определения в силу непрерывности векторного поля системы (3), следует, что на дуге M_1M_2 кривой *L* имеется, по крайней мере, один контакт или одна точка покоя системы (3), если M_1 и M_2 не согласованы на *L*.

Согласно следствию 1 [12], а также [6, 11] сумма числа контактов и особых точек на произвольной прямой, не состоящей из траекторий системы (1), не более двух.

Теперь докажем теорему Берлинского.

Предположим, что система (1) имеет три особые точки второй группы *A*, *B*, *C*. Тогда для каждой из них выполняется условие (4), в силу которого особая точка второй группы:

а) либо расположена на прямой

$$P'_{2x}(x,y)+Q'_{2y}(x,y)=0\,, \tag{6}$$

б) либо

$$P'_{2x}(x,y)+Q'_{2y}(x,y)\equiv 0\,. \tag{7}$$

Так как квадратичная система не может иметь три состояния равновесия на одной прямой (6), то, очевидно, выполняется тождество (7). Поэтому особые точки *A*, *B*, *C* являются центрами [1, 2]. Рассмотрим треугольник *ABC*. Согласно [6, 11] каждая прямая *AB*, *BC*, *AC* является изоклиной системы (1). Рассмотрим в достаточно малой окрестности каждого из центров *A*, *B* и *C* по одной замкнутой траектории ℓ_A, ℓ_B и ℓ_C, соответственно. Какие бы направления обхода изображающей точки ни были на кривых ℓ_A, ℓ_B и ℓ_C, среди пар точек: M_1 и M_2; M_3 и M_4; M_5 и M_6 хотя бы одна является парой несогласованных точек на соответствующей стороне треугольника *ABC*. На такой стороне, которая, очевидно, не является инвариантной, имеется либо один контакт, либо одна особая точка (отличные от вершин треугольника). Пришли к противоречию со следствием 1 [12]. Теорема доказана.

Заметим, что приведенное выше доказательство теоремы Берлинского более компактно, а в работе [3] оно представлено на более чем четырех страницах.

П.2. Исследование на ацикличность квадратичной системы

$$\frac{dx}{dt}=y(ax+by+c)\,,\ \frac{dy}{dt}=x(mx+ny+q)\,. \tag{8}$$

Предположим, что точки покоя *O (0, 0)*, *A* $(0, y_1)$, *B* $(x_1, 0)$, *C* (x_2, y_2) образуют невыпуклый четырехугольник. При этом считаем, что точка *C* лежит внутри треугольника *OAB*. В этом случае справедливо утверждение: если *O* – седло и $x_1\cdot y_1>0$, то система (8) не имеет замкнутых траекторий.

Доказательство. Так как по условию *O* – седло, то тогда согласно [3] *A* и *B* также являются седлами, а *C* – антиседлом (узел, фокус или центр). Таким образом, если имеется замкнутая траектория системы (8), то она непременно окружает точку покоя *C* и только эту точку (индекс Пуанкаре замкнутой траектории равен +1 [1]). Согласно [6, 11] прямые *OA*, *OB*, *AB* – изоклины системы (8) и никакая траектория системы (8) не может пересекать указанные изоклины более одного раза. В самом деле, допустив противное, мы на одной из сторон треугольника *OAB* непременно будем иметь две несогласованные точки, и как следствие этого, на одной из сторон треугольника *OAB* сумма числа контактов и особых точек будет не менее трех. В результате пришли к противоречию со следствием 1 [12].

Предположим, что система (8) имеет замкнутую траекторию *L*. По критерию Бендиксона [1] кривая *L* должна пересекать прямую

$$ay+nx=0\,. \tag{9}$$

Покажем, что прямая (9) расположена во втором и четвертом квадрантах координатной плоскости. В силу выполнения неравенства $x_1\cdot y_1>0$ особая точка *C* расположена в первом или третьем квадранте. Поэтому угловые коэффициенты главных изоклин: ℓ_1: $ax+by+c=0$, ℓ_2: $mx+ny+q=0$ отрицательны, то есть

$$ab>0,\ mn>0. \tag{10}$$

По условию *O* – седло, следовательно,

$$qc>0 \tag{11}$$

Легко видеть, что абсцисса (ордината) точки *B(A)* определяется по формуле:

$$x_1=-\frac{q}{m}\ \left(y_1=-\frac{c}{b}\right). \tag{12}$$

Из (11) и (12) и условия $x_1\cdot y_1>0$ следует неравенство

$$mb>0. \tag{13}$$

Из (10) и (13) получаем неравенство $an>0$, которое говорит о том, что прямая (9), действительно расположена во втором и четвертом квадрантах. В таком случае замкнутая траектория *L*, окружающая точку покоя *C*, должна пересекать одну из сторон треугольника *OAB*. Но выше мы показали, что это невозможно.

Утверждение доказано.

Если в доказанном утверждении неравенство $x_1\cdot y_1>0$ заменить на неравенство $x_1\cdot y_1<0$, то прямая (9) будет расположена в первом и третьем квадрантах, тогда как антиседло *C* принадлежит второму или четвертому квадранту.

Рассуждая аналогичным образом, мы вновь придем к отсутствию замкнутых траекторий у системы (8).

Таким образом, верно следующее утверждение:

если точки покоя $O\ (0,0)$, $A\ (0,y_1)$, $B\ (x_1,0)$, $C\ (x_2,y_2)$ образуют невыпуклый четырехугольник, причем *C* – антиседло, то система (8) ациклична, то есть не имеет ни замкнутых траекторий, ни особых циклов.

П.3 Исследование сложной особой точки кубической дифференциальной системы

Задача нахождения координат особых точек, а также исследования топологической структуры начала координат (0;0) дифференциальной системы

$$\frac{dx}{dt}=a_{20}x^2+a_{11}xy+a_{02}y^2+a_{30}x^3+a_{21}x^2y+a_{12}xy^2+a_{03}y^3,$$
$$\frac{dy}{dt}=b_{30}x^3+b_{21}x^2y+b_{12}xy^2+b_{03}y^3 \tag{14}$$

где $|a_{20}|+|a_{11}|+|a_{02}|>0$, в общем случае достаточно сложна. Однако она упрощается, если учесть, что через начало координат *O (0,0)* системы (14) проходит хотя бы одна прямая изоклина [11]. В этом случае можно поступить следующим образом: найти указанную прямую изоклину, а затем подходящим линейным преобразованием [11] перевести эту прямую в одну из главных изоклин, например, в изоклину бесконечности. Тогда система (14) преобразуется в систему:

$$\begin{aligned}\frac{d\bar x}{dt}&=(a\bar x+b\bar y)(A_{10}\bar x+A_{01}\bar y+A_{20}\bar x^2+A_{11}\bar x\,\bar y+A_{02}\bar y^2)\\ \frac{d\bar y}{dt}&=B_{30}\bar x^3+B_{21}\bar x^2\bar y+B_{12}\bar x\,\bar y^2+B_{03}\bar y^3\end{aligned}\ , \tag{15}$$

В силу теоремы 7 [11] и неравенства $|a_{20}|+|a_{11}|+|a_{02}|>0$ в системе (15) выполняется условие $|A_{10}|+|A_{01}|>0$. Отсюда по теореме о неявной функции [13] существует решение уравнения $A_{10}\bar{x}+A_{01}\bar{y}+A_{20}\bar{x}^2+A_{11}\bar{x}\bar{y}+A_{02}\bar{y}^2=0$ в виде $\bar{y}=\varphi(\bar{x})$ или $\bar{x}=\varphi(\bar{y})$, где $\varphi(\bar{x})\,(\varphi(\bar{y}))$ – ряд по степеням $\bar{x}(\bar{y})$. Таким образом, мы имеем информацию о характере изоклины бесконечности системы (15) в достаточно малой окрестности точки покоя *O* (0,0). А изоклина нуля в качестве ветви имеет хотя бы одну прямую. Все эти сведения, вместе взятые, позволяют полностью охарактеризовать поведение траекторий системы (15) вблизи точки *O* (0,0), то есть установить ее тип.

Пример 1. Дифференциальная система

$$\frac{dx}{dt}=xy+x^3+y^3,\ \frac{dy}{dt}=x^3-\frac{3}{2}x^2y-\frac{3}{2}xy^2+y^3 \tag{16}$$

имеет две прямые изоклины: $x=0$; $y=0$, на которых она индуцирует направление $m=1$ и три изоклины нуля: $y=2x$, $y=\frac{1}{2}x$, $y=-x$.

Следуя работе [11], совершим в системе (16) преобразование: $x=\bar{x}+\bar{y}$, $y=\bar{y}$, переводящее прямые $x=0$ и $y=0$ в изоклины бесконечности. Далее, изменяя масштаб времени $dt=2d\tau$, приходим к системе:

$$\frac{d\bar{x}}{d\tau}=\bar{y}(\bar{x}+\bar{y})(6\bar{y}+3\bar{x}+2),\ \frac{d\bar{y}}{d\tau}=(\bar{x}-\bar{y})(\bar{y}+2\bar{x})(\bar{x}+2\bar{y}) \tag{17}$$

Анализ проведенного исследования свидетельствует о том, что окрестность особой точки *O (*0,0*)* системы (17) состоит из одного параболического (узлового) и двух гиперболических секторов.

П.4. Новое доказательство теоремы о числе особых точек второй группы кубической дифференциальной системы

В работе [8] доказано, что число особых точек второй группы системы (2) не превосходит пяти. При этом рассмотрены только особые точки с чисто мнимыми характеристическими числами.

Основной результат работы [8] следует из теорем 1 и 2 [8]. Здесь мы хотим показать новое доказательство теоремы 1 [8], согласно которой система (2) не может иметь шесть особых точек второй группы, если

$$P'_{3x}+Q'_{3y}=\sigma(x,y)\not\equiv 0. \tag{18}$$

Если допустить существование шести особых точек второй группы у системы (2), то в силу неравенства (18) и (4) они все расположены на кривой

$$\sigma(x,y)=0. \tag{19}$$

Но, согласно работе [14], кривая (19) является изоклиной системы (2). Не нарушая общности, считаем, что кривая (19) является одной из главных изоклин, например, изоклиной бесконечности системы (2).

Таким образом, изоклина бесконечности системы (2) распадается на прямую ℓ_0, которой, впрочем, принадлежат три седла, и кривую второго порядка (19). Если кривая (19) является гиперболой, либо параболой, либо эллипсом, либо парой параллельных прямых, то прямая ℓ_0 пересекает ее разве что в двух точках. В силу этого в одной из двух полуплоскостей, на которые прямая ℓ_0 разбивает всю фазовую плоскость системы (2), окажутся не менее трех особых точек второй группы. Но это противоречит теореме Пуанкаре [15], согласно которой две простые особые точки с одним и тем же индексом Пуанкаре не могут быть расположены рядом, если они не разделены особой точкой самой изоклины (в данном случае бесконечности). Пусть далее кривая (19) суть пара пересекающихся прямых. В соответствии с упомянутой теоремой Пуанкаре [15] три седла на ℓ_0 расположены так, что два соседних разделены точками самопересечения изоклины бесконечности. По этой же причине особые точки второй группы, расположенные на кривой (19), чередуются с особыми точками изоклины бесконечности $P_3 = 0$. Анализ расположения траекторий системы (2) в окрестности каждой из девяти ее особых точек показывает, что хотя бы на одной из трех прямых изоклин, на которые распадается изоклина бесконечности, найдется пара несогласованных точек, расположенных между двумя соседними состояниями равновесия. Но это означает, что на прямой изоклине кубической системы имеется не менее четырех контактов и особых точек (в сумме). Это противоречит работе [11]. Теорема доказана.

Мы привели лишь некоторые примеры применения теории прямых изоклин в качественной теории, которыми, естественно, не ограничиваются возможности применения этой теории.

В заключение отметим, что проблеме прямых изоклин полиномиальных систем на плоскости посвящена работа Чересиза В.М. [16]. В ней доказана теорема 1, аналогичная одной из теорем работы [11].

Примечания:

1. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. М., 1959. 915 с.
2. Амелькин В.В., Лукашевич Н.А., Садовский А.П. Нелинейные колебания в системах второго порядка. Минск, 1982. 208 с.
3. Берлинский А.Н. О поведении интегральных кривых одного дифференциального уравнения // Известия высших учебных заведений. Математика. 1960. № 2 (15). С. 3-18.
4. Лукашевич Н.А. Качественная картина в целом для системы дифференциальных уравнений $\frac{dx}{dt} = \sum_{i+j=0}^{2} a_{ij} x^i y^j$, $\frac{dy}{dt} = \sum_{i+j=0}^{2} b_{ij} x^i y^j$, имеющей точку равновесия типа центр // Доклады Академии наук БССР. 1960. Т.4, №12. С.497-500.
5. Шахова Л.В. О прямых изоклинах // Труды Самаркандского государственного университета им. А. Навои. Самарканд, 1964. Вып. 144. С.93-105.
6. Ушхо Д.С., Горних М.И. Прямые изоклины и канонические формы квадратичной дифференциальной системы на плоскости // Труды ФОРА. 2002. № 7. С.72-82. (URL: http://fora.adygnet.ru)
7. Лукашевич Н.А. К вопросу о предельных циклах для системы $\frac{dx}{dt} = y + P(x,y)$, $\frac{dy}{dt} = -x + Q(x,y)$,

References:

1. Andronov A.A. Vitt A.A., Khaikin S.E. Theory of fluctuations,. M., 1959. 915 pp.
2. Amelkin V.V. Lukashevich N.A., Sadovsky A.P. Nonlinear fluctuation in systems of the second order, Minsk, 1982. 208 pp.
3. Berlinsky A.N. About behaviour of the integrated curve of one differential equation // News of higher educational institutions. Mathematics. 1960. No. 2. (15). P. 3-18.
4. Lukashevich N.A. A qualitative picture as a whole for system of the differential equations $\frac{dx}{dt} = \sum_{i+j=0}^{2} a_{ij} x^i y^j$, $\frac{dy}{dt} = \sum_{i+j=0}^{2} b_{ij} x^i y^j$, having a point of balance of the centre type// Reports of Academy of sciences of BSSR. 1960. V.4, No.12. P.497-500.
5. Shakhova L.V. About straight isoclines // Proc. Alisher Navoi Samarkand State Univ. Samarkand, 1964. Issue 144. P. 93-105.
6. Ushkho D.S., Gornikh M.I. Straight isoclines and initial forms of quadratic differential system on a plane // Proc. FORA. 2002. No. 7. P. 72-82. (URL: http://fora.adygnet.ru)
7. Lukashevich N.A. On limiting cycles for system $\frac{dx}{dt} = \mathrm{y} + \mathrm{P(x, y)}$, $\frac{dy}{dt} = -\mathrm{x} + \mathrm{Q(x, y)}$,

$P(tx,ty) = t^3 P(x,y)$, $Q(tx,ty) = t^3 Q(x,y)$, если *(0;0)* – особая точка типа «центр»// Доклады Академии наук БССР. 1961. Т. 5, № 10. С. 424-426.

8. Ушхо Д.С. О числе особых точек второй группы кубической системы// Дифференциальные уравнения. 1993. Т. 29, № 2. С. 240-245.
9. Сибирский К.С., Плешкан И.И. Условия симметрии поля направлений некоторого дифференциального уравнения// Ученые записи Кишиневского государственного университета. 1957. Т. 29. С. 11-14.
10. Ушхо А.Д., Ушхо Д.С. О сосуществовании предельных циклов и линейных частных интегралов кубической системы // Четвертые Богдановские чтения по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Минск, 2005. С. 84-85.
11. Ушхо Д.С. О прямых изоклинах кубической дифференциальной системы // Труды ФОРА. 2003. № 8. С. 7-21. (URL: http://fora.adygnet.ru)
12. Тун-Изинь-Чжу. Расположение предельных циклов системы $\frac{dx}{dt} = X_2(x,y)$, $\frac{dy}{dt} = Y_2(x,y)$ // Периодический сборник переводов иностранных статей. Математика. 1962. Т. 6, № 6. С. 150-158.
13. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: в 3 т. М., 1966. Т. 1. 608 с.
14. Ушхо Д.С., Ушхо А.Д. Оценка числа особых точек второй группы кубической дифференциальной системы// Труды ФОРА. 2005. № 10. С. 44-50. (URL: http://fora.adygnet.ru)
15. Баутин Н.Н., Леонтович Е.А. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. М., 1976. 496 с.
16. Чересиз В.М. Об изоклинах полиномиальных векторных полей// Сибирский математический журнал. 1994. Т. 35, № 6. С. 1390-1396.

$P(tx, ty) = t^3 P(x, y)$, $Q(tx,ty) = t^3 Q(x,y)$, if *(0; 0)* is a special point such as "centre"// Reports of Academy of sciences of BSSR. 1961. V.5. No. 10. P. 424-426.

8. Ushkho D.S. About a number of special points of the second group of cubic system // Differential equations. 1993. V. 29, No. 2. P. 240-245.
9. Sibirsky K.S., Pleshkan I.I. A condition of symmetry of a field of directions for a differential equation // Scientific Notes of Kishinev State Univ. 1957. V. 29. P. 11-14.
10. Ushkho A.D., Ushkho D.S. About coexistence of limiting cycles and linear individual integrals of cubic system //The fourth Bogdanov readings on the ordinary differential equations. Minsk, 2005. P. 84-85.
11. Ushkho D.S. About straight isoclines of cubic differential system // Proc. FORA. 2003. No. 8. P. 7-21. (URL: http://fora.adygnet.ru)
12. Tun-Izin'-Chzhu. An arrangement of limiting cycles of system $\frac{dx}{dt} = X_2(x,y)$, $\frac{dy}{dt} = Y_2(x,y)$ // Periodic collection of translations of foreign papers: Mathematics. 1962. V. 6. No. 6. P. 150-158.
13. Fikhtengolts G.M. A course of differential and integral calculus: In 3 v. M., 1966. V. 1. 608 pp.
14. Ushkho D.S., Ushkho A.D. Estimation of a number of special points of the second group of cubic differential system // Proc. FORA. 2005. No. 10. P. 44-50. (URL: http://fora.adygnet.ru)
15. Bautin N.N., Leontovich E.A. Methods of qualitative research of the dynamic systems on a plane. M., 1976. 496 pp.
16. Cheresiz V.M. On isoclines of polynomial vector fields/ V.M.Cheresiz // Siberian Mathematical Journal. 1994. V. 35, No. 6. P. 1390-1396.