УДК 517.958:532
ББК 22.181
Ш 96

М.М. Шумафов, Р. Цей

Идентификация параметров газоносного пласта на основе решения обратной задачи теории фильтрации

(Рецензирована)

Аннотация
В работе определяются фильтрационные и емкостные параметры газоносного пласта на основе решения обратной задачи теории фильтрации методом модулирующих функций.
Ключевые слова: *обратная задача, математическое моделирование, идентификация, модулирующие функции, фильтрационные и ёмкостные параметры.*

M.M. Shumafov, R. Tsey

Determination of gas reservoir parameters on the basis of a solution of an inverse problem of the filtration theory

Abstract
In this paper, the filtrational and capacity parameters of gas reservoir are determined. The method of solving this problem is based on the solution of inverse problem of filtration theory. In this case the modulating functions method is used.
Key words: *inverse problem, mathematical simulation, identification, modulating functions, filtrational and capacity parameters.*

Введение

О той большой роли, которую играют обратные задачи при математическом моделировании в различных областях науки, отмечено в работах [1,2]. Напомним, что к прямым задачам математической физики относят задачи нахождения следствий заданных причин, а к обратным – задачи отыскания неизвестных причин заданных следствий. Обратные задачи возникают в приложениях и имеют важное значение при решении вопросов математического моделирования в сложных системах. Это, в частности, относится и к процессам, связанным с добычей нефти и газа – одним из самых приоритетных направлений в энергетике.

В настоящей статье нами рассматривается обратная задача теории фильтрации, а именно, задача определения обобщенных фильтрационно-емкостных параметров газоносного пласта. Для решения этой задачи применяется метод модулирующих функций (далее, М-метод). Отметим, что идея применения М-метода для решения обратных задач восходит к работам Дж. Лоэба и Г. Кахена (J. Loeb, G. Cahen) [3, 4]. Возможность применения М-метода для решения задач нефтегазовой науки впервые была высказана В.Б. Георгиевским и им были разработаны унифицированные алгоритмы для решения обратных задач подземной гидрогазодинамики [1]. В работах [5,6] приведены некоторые способы программной реализации алгоритмов, предложенных в работах В.Б. Георгиевского (см., например, [1]). В работе [7] сделана попытка обобщить М-метод на случай любой степени полиномов разложения неизвестных параметров газоносного пласта.

Математическая постановка задачи

Рассмотрим нелинейное эволюционное уравнение параболического типа, описывающее процесс нестационарной фильтрации реального газа [8]

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{k(x,y)h(x,y)}{\mu(p)z(p)}\frac{\partial p^2}{\partial x}\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{k(x,y)h(x,y)}{\mu(p)z(p)}\frac{\partial p^2}{\partial y}\right]=$$
$$=2\alpha(x,y)m(x,y)h(x,y)\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{p}{z(p)}\right)+2Q(x,y,t)p_{am}\ , \qquad (1)$$
$$(x,y)\in\Omega\ ,\ \ t\in(0,T)\ ,\ \ \Omega\subset R^2$$

с начально-граничными условиями

$$p(x,y,0)=p_0(x,y)\ ,\ \ (x,y)\in\Omega\ , \qquad (2)$$

$$Lp\big|_{\Gamma}=\omega(x,y,t)\ ,\ \ (x,y)\in\Gamma\ ,\ \ t\geq 0\ . \qquad (3)$$

Здесь $p(x,y,t)$ – давление в точке пласта с координатами (x,y) в момент времени t, $k(x,y)$ – коэффициент проницаемости пласта, $m(x,y)$ – коэффициент пористости пласта, $h(x,y)$ – эффективная толщина пласта, $\mu(p)$ и $z(p)$ – соответственно коэффициенты динамической вязкости и сверхсжимаемости газа при давлении p и пластовой температуре $T_{пл}$, $\alpha(x,y)$ – коэффициент газонасыщенности, $Q(x,y,t)$ – объемный расход газа, отнесенный к единице площади пласта в точке (x,y) в момент времени t, приведенный к атмосферному давлению $p_{ат}$ и пластовой температуре $T_{пл}$. Далее, L – это единичный оператор в случае первой краевой задачи; в случае второй краевой задачи $L=\partial/\partial n$ – производная по внешней нормали к границе Γ области Ω; в случае третьей краевой задачи $Lp=\partial p/\partial n+Q(x,y,t)p$ ($Q(x,y,t)$, $\omega(x,y,t)$ – известные функции).

Отметим, что оператор L в условии (3) может иметь и более сложную структуру.

Как известно, если выполнены условия согласованности начальных и краевых условий при заданных $k,h,\mu,z,\alpha,m,Q,p_{am},p_0,\omega$, то задача нахождения функции $p(x,y,t)$, удовлетворяющей условиям (1)-(3) в классическом или обобщенном смысле, называется прямой задачей. При решении прямой задачи возникает ряд вопросов, в частности, вопросы однозначной разрешимости задачи (1)-(3); корректности в том или ином смысле и т.д. (см., например, [9, 10]).

Предположим теперь, что решение задачи (1)-(3) – $p(x,y,t)$ – известно и требуется найти функции $a(x,y):=k(x,y)h(x,y)$ и $b(x,y):=2\alpha m(x,y)h(x,y)$. Функции $a(x,y)$ и $b(x,y)$ будем называть обобщенными фильтрационным и емкостным параметрами.

Сформулированная выше задача является обратной задачей. Возникает естественный вопрос: существует ли решение обратной задачи, если существует, то единственно ли оно?

Рассмотрим сначала случай, когда $a(x,y)$ и $b(x,y)$ являются однородными многочленами степени n_p:

$$a(x,y)=\sum_{k=0}^{n_p}\sum_{m=0}^{k}a_{km}x^{k-m}y^m\ , \qquad (4)$$

$$b(x,y)=\sum_{k=0}^{n_p}\sum_{m=0}^{k}b_{km}x^{k-m}y^m\ . \qquad (5)$$

Требуется найти коэффициенты a_{km}, b_{km} в (4), (5), если известна функция $p(x,y,t)$ являющаяся решением уравнения

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{a(x,y)}{\mu(p)z(p)}\frac{\partial p^2}{\partial x}\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{a(x,y)}{\mu(p)z(p)}\frac{\partial p^2}{\partial y}\right]=b(x,y)\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{p}{z(p)}\right)+c(x,y,t) \qquad (6)$$

в предположении, что $\mu(p), z(p), c(x,y,t)$ – известные функции.

Для решения сформулированной задачи нами применяется метод модулирующих функций. Как было ранее отмечено, при этом не требуется знать конкретный вид начально-граничных условий (2), (3).

Введем в рассмотрение функцию

$$\psi(p)=\int_0^p \frac{2\xi d\xi}{\mu(\xi)z(\xi)}, \tag{7}$$

где $p=p(x,y,t)$.

Частная производная по x от $\psi(p(x,y,t))$ равна

$$\frac{\partial\psi(p)}{\partial x}=\frac{d\psi(p)}{dp}\frac{\partial p}{\partial x}=\frac{2p}{\mu(p)z(p)}\frac{\partial p}{\partial x}=\frac{1}{\mu(p)z(p)}\frac{\partial p^2}{\partial x}. \tag{8}$$

Аналогично

$$\frac{\partial\psi(p)}{\partial y}=\frac{1}{\mu(p)z(p)}\frac{\partial p^2}{\partial y}. \tag{9}$$

Учитывая соотношения (7)-(9), перепишем уравнение (6) следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[a(x,y)\frac{\partial}{\partial x}\psi(p)\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[a(x,y)\frac{\partial}{\partial y}\psi(p)\right]=b(x,y)\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{p}{z(p)}\right)+c(x,y,t). \tag{10}$$

Вместо уравнения (10) рассмотрим несколько более общее уравнение:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[a(x,y)\frac{\partial\psi_1}{\partial x}\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[a(x,y)\frac{\partial\psi_2}{\partial y}\right]=b(x,y)\frac{\partial\psi_3}{\partial t}+\psi_4, \tag{11}$$

где $\psi_1=\psi_1(x,y,t;p)$, $\psi_2=\psi_2(x,y,t;p)$, $\psi_3=\psi_3(x,y,t;p)$, $\psi_4=\psi_4(x,y,t;p)$ – известные функции, функция $p=p(x,y,t)$ задана, а $a(x,y)$ и $b(x,y)$ имеют вид (4), (5).

Требуется найти a_{km}, b_{km}.

Теоретическое обоснование применения метода модулирующих функций

Пусть известна функция $p=p(x,y,t)$ ($(x,y)\in\overline{G}$, $t\in[0,T]$), обладающая требуемой гладкостью и удовлетворяющая уравнению (11), где $a(x,y)$ и $b(x,y)$ имеют вид (4), (5). Требуется найти $a(x,y)$, $b(x,y)$.

Сначала задачу (11) решим в случае, когда $\overline{G}$ есть прямоугольник: $\{(x,y)\in R^2 : x\in[x_1,x_2], y\in[y_1,y_2]\}$. Умножим уравнение (11) на функцию $F(x,y,t)=f(x)f(y)f(t)$, где $f(x)\in C^2[x_1,x_2]$, $f(y)\in C^2[y_1,y_2]$, $f(t)\in C^1[0,T]$ и

$$f(x_1)=f(x_2)=0, \tag{12}$$

$$f'(x_1)=f'(x_2)=0, \tag{13}$$

$$f(y_1)=f(y_2)=0, \tag{14}$$

$$f'(y_1)=f'(y_2)=0, \tag{15}$$

$$f(0)=f(T)=0. \tag{16}$$

Затем полученное соотношение проинтегрируем по параллелепипеду $V=\{[x_1,x_2]\times[y_1,y_2]\times[0,T]\}$ и произведем интегрирование по частям с учетом условий (12)-(16). Для первого слагаемого в левой части уравнения (11) имеем

$$\int_V \frac{\partial}{\partial x}\left[a(x,y)\frac{\partial \psi_1}{\partial x}\right]F(x,y,t)dxdydt = \int_0^T\int_{y_1}^{y_2}\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial}{\partial x}\left[a(x,y)\frac{\partial \psi_1}{\partial x}\right]f(x)f(y)f(t)dxdydt =$$
$$= \int_0^T f(t)dt\int_{y_1}^{y_2} f(y)dy\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial}{\partial x}\left[a(x,y)\frac{\partial \psi_1}{\partial x}\right]f(x)dx. \tag{17}$$

Для внутреннего интеграла правой части (17) с учетом условий (12), (13) получаем

$$\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial}{\partial x}\left[a(x,y)\frac{\partial \psi_1}{\partial x}\right]f(x)dx = a(x,y)\frac{\partial \psi_1}{\partial x}f(x)\Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} a(x,y)\frac{\partial \psi_1}{\partial x}f'(x)dx =$$
$$= -\int_{x_1}^{x_2} a(x,y)\frac{\partial \psi_1}{\partial x}f'(x)dx = -a(x,y)f'(x)\psi_1\Big|_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2}\psi_1[a(x,y)f'(x)]'_x dx = \tag{18}$$
$$= \int_{x_1}^{x_2}\psi_1[a(x,y)f'(x)]'_x dx.$$

Из (17) и (18) следует

$$\int_V \frac{\partial}{\partial x}\left[a(x,y)\frac{\partial \psi_1}{\partial x}\right]F(x,y,t)dV = \int_0^T f(t)dt\int_{y_1}^{y_2} f(y)dy\int_{x_1}^{x_2}\psi_1[a(x,y)f'(x)]'_x dx. \tag{19}$$

Аналогично, для остальных слагаемых (11) имеем:

$$\int_V \frac{\partial}{\partial y}\left[a(x,y)\frac{\partial \psi_2}{\partial y}\right]F(x,y,t)dV = \int_0^T f(t)dt\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx\int_{y_1}^{y_2}\psi_2[a(x,y)f'(x)]'_y dy, \tag{20}$$

$$\int_V b(x,y)\frac{\partial \psi_3}{\partial t}F(x,y,t)dV = -\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx\int_{y_1}^{y_2} f(y)b(x,y)dy\int_0^T f'(t)\psi_3 dt, \tag{21}$$

$$\int_V \psi_4 F(x,y,t)dV = \int_V \psi_4 f(x)f(y)f(t)dV. \tag{22}$$

Из (11), (19)-(22) получаем следующее интегральное тождество

$$\int_0^T f(t)dt\int_{y_1}^{y_2} f(y)dy\int_{x_1}^{x_2}\psi_1[a(x,y)f'(x)]'_x dx + \int_0^T f(t)dt\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx\int_{y_1}^{y_2}\psi_2[a(x,y)f'(x)]'_y dy +$$
$$+\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx\int_{y_1}^{y_2} f(y)b(x,y)dy\int_0^T f'(t)\psi_3 dt = \int_V \psi_4 f(x)f(y)f(t)dV. \tag{23}$$

Учитывая вид (4), (5) функций $a(x,y)$ и $b(x,y)$, тождество (23), после некоторых элементарных преобразований, примет вид:

$$\sum_{k=0}^{n_p}\sum_{m=0}^{k}(\alpha_{km}a_{km} + \beta_{km}b_{km}) = \gamma, \tag{24}$$

где

$$\alpha_{km} = \int_V f(t)\{\psi_1 f(y)[x^{k-m}y^m f''(x) + (k-m)x^{k-m-1}y^m f'(x)] +$$
$$+\psi_2 f(x)[x^{k-m}y^m f''(y) + mx^{k-m}y^{m-1}f'(y)]\}dV,$$

$$b_{km} = \int_V \psi_3 f(x)f(y)f'(t)x^{k-m}y^m dV, \quad \gamma = \int_V \psi_4 f(x)f(y)f(t)dV,$$
$$(V = [x_1,x_2]\times[y_1,y_2]\times[0,T]).$$

В соотношении (24) a_{km}, b_{km} – неизвестные, а α_{km}, β_{km}, γ – известные числа.

Нетрудно установить, что при $k=0,1,...,n_p$, $m=0,1,...,k$ число неизвестных $\{a_{km}\}$ и $\{b_{km}\}$ соответственно равно $n_a=\dfrac{(n_p+1)(n_p+2)}{2}$ и $n_b=n_a$, а общее число неизвестных равно $n_e=(n_p+1)(n_p+2)$.

Для однозначного определения n_e неизвестных необходимо иметь n_e линейно независимых алгебраических уравнений, причем детерминант матрицы этой системы должен быть отличным от нуля. С этой целью умножим уравнение (11) на функции $F_j(x,y,t)=f_j(x)f_j(y)f_j(t)$, где $f_j(x),\ f_j(y),\ f_j(t)$ удовлетворяют условиям (12)-(16) при $j=0,1,...,n_e-1$, и проинтегрируем полученное уравнение по параллелепипеду *V*. Имеем:

$$\alpha_{km}^{(j)}=\int\limits_V f_j(t)\{\psi_1 f_j(y)[x^{k-m}y^m f_j''(x)+(k-m)x^{k-m-1}y^m f_j'(x)]+ \\ +\psi_2 f_j(x)[x^{k-m}y^m f_j''(y)+mx^{k-m}y^{m-1}f_j'(y)]\}dV, \tag{25}$$

$$b_{km}^{(j)}=\int\limits_V \psi_3 f_j(x)f_j(y)x^{k-m}y^m f_j'(t)dV, \tag{26}$$

$$\gamma^{(j)}=\int\limits_V \psi_4 f_j(x)f_j(y)f_j(t)dV, \tag{27}$$

где $V=\{[x_1,x_2]\times[y_1,y_2]\times[t_1,t_2]\}$, $dV=dxdydt$ ($k=0,1,...,n_p$; $m=0,1,...,k$; $j=0,1,...,n_e-1$).

Введем в рассмотрение матрицу *W* размера $n_e\times n_e$

$$W=\{W_{ji}\},\ W_{ji}:=\{\alpha_{km}^{(j)},\beta_{km}^{(j)}\},\ \ (i=1,2,...,n_e;\ j=0,1,...,n_e-1)$$

и n_e - мерный вектор

$$\Theta=\{a_{km},b_{km}\}^T.$$

Вместо двойных индексов *km* мы иногда будем использовать одинарный индекс *i*. Таким образом, индекс *i* будет обозначать номер столбца, а *j* – номер строки матрицы *W*. Тогда соотношение (24) можно переписать в векторно-матричной форме

$$W\cdot\Theta=\Upsilon.$$

Нетрудно показать, что, выбирая специальным образом систему модулирующих функций $f_j(x),\ f_j(y),\ f_j(t)$, можно добиться выполнения условия невырожденности матрицы *W*: $\det W\neq 0$.

Теперь предположим, что функции $a(x,y)$, $b(x,y)$ являются достаточно гладкими, а именно

$$a(x,y)\in C^{n+1}(\overline{G}),\quad b(x,y)\in C^{n+1}(\overline{G}). \tag{28}$$

Представим $a(x,y)$, $b(x,y)$ по формуле Маклорена:

$$a(x,y)=a(0,0)+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^k a(0,0)+\varepsilon_1, \tag{29}$$

$$b(x,y)=b(0,0)+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^k b(0,0)+\varepsilon_2, \tag{30}$$

где

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{(n+1)!}\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1} a(\theta x, \theta y)\,, \tag{31}$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{(n+1)!}\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1} b(\theta x, \theta y)\,, \tag{32}$$

$(0 < \theta < 1)$.

Выражение $\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right)^{k} a(0,0)$ есть однородный многочлен по x и y степени k. Поэтому соотношения (29) и (30) можно переписать в виде

$$a(x,y) = \sum_{k=0}^{n_p}\sum_{m=0}^{k} a_{km} x^{k-m} y^m + \varepsilon_1, \tag{33}$$

$$b(x,y) = \sum_{k=0}^{n_p}\sum_{m=0}^{k} b_{km} x^{k-m} y^m + \varepsilon_2\,. \tag{34}$$

В силу условий (28) на основании (31) и (32) для ε_1 и ε_2 справедливы оценки

$$|\varepsilon_1| \le \frac{\mu_1}{(n+1)!}, \quad |\varepsilon_2| \le \frac{\mu_2}{(n+1)!}.$$

Здесь μ_1 (соответственно μ_2) константа, зависящая от чисел

$$l_1 = x_2 - x_1,\ l_2 = y_2 - y_1,\ \max_{(x,y)\in \bar{G}} \frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial y^{k_2}} a(x,y),$$

$$(\text{соответственно } \max_{(x,y)\in \bar{G}} \frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial y^{k_2}} b(x,y)\,),$$

$$k_1 + k_2 = n+1, \quad k_1, k_2 = 0,1,\dots,n_p\,.$$

Следовательно, при выполнении условий гладкости (28) мы можем определить коэффициенты $a(x,y)$ и $b(x,y)$ с точностью, зависящей от степени их гладкости.

Если предположить, что $a(x,y)$, $b(x,y)$ являются аналитическими функциями своих переменных, то можно их восстановить по давлению $p = p(x,y,t)$ с наперед заданной точностью.

Решение обратной задачи теории фильтрации с использованием метода модулирующих функций

Вернемся к нашей основной задаче. Уравнение (1) удобно представить в виде (см. (10))

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[a(x,y)\frac{\partial}{\partial x}\psi(p)\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[a(x,y)\frac{\partial}{\partial y}\psi(p)\right] = b(x,y)\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{p}{z(p)}\right) + c(x,y,t),$$

где $\psi(p) = \int\limits_0^p \frac{2\xi d\xi}{\mu(\xi)z(\xi)}$, $\quad c(x,y,t) = 2Qp_{am}$.

Как следует из вышеполученных результатов, в предположении, что функции $a(x,y)$, $b(x,y)$ являются достаточно гладкими, аналогично (24), мы получим следующее соотношение:

$$\sum_{k=0}^{n_p}\sum_{m=0}^{k}(\alpha_{km}^{(j)}a_{km}+\beta_{km}^{(j)}b_{km})=\gamma^{(j)},\quad j=0,1,...,n_e-1, \tag{35}$$

где значения $\alpha_{km}^{(j)}$, $\beta_{km}^{(j)}$, $\gamma^{(j)}$ равны соответственно (25), (26), (27), а функции $a(x,y)$ и $b(x,y)$ представлены по формуле Тейлора (см. (33), (34)).

Проводя рассуждения, вполне аналогичные вышеприведенным, для определения неизвестных коэффициентов a_{km}, b_{km} получим систему алгебраических уравнений (35), где

$$\alpha_{km}^{(j)}=\int_V f_j(t)\psi(p(x,y,t))\{f_j(y)[x^{k-m}y^m f_j''(x)+(k-m)x^{k-m-1}y^m f_j'(x)]+$$
$$+f_j(x)[x^{k-m}y^m f_j''(y)+mx^{k-m}y^{m-1}f_j'(y)]\}dV,$$

$$\beta_{km}^{(j)}=\int_V\psi(p(x,y,t))x^{k-m}y^m f_j(x)f_j(y)f_j'(t)dV,\quad \gamma^{(j)}=\int_V c(x,y,t)f_j(x)f_j(y)f_j(t)dV,$$

($V=\{[x_1,x_2]\times[y_1,y_2]\times[t_1,t_2]\}$, $dV=dxdydt$, $k=0,1,...,n_p$; $m=0,1,...,k$; $j=0,1,...,n_e-1$).

Здесь функции $f_j(x), f_j(y), f_j(t)$, $j=0,1,...,n_e-1$ являются гладкими ($f_j(x)\in C^2$, $f_j(y)\in C^2$, $f_j(t)\in C^1$) линейно-независимыми функциями, удовлетворяющими условиям

$$f_j(x_1)=f_j(x_2)=0,$$
$$f_j'(x_1)=f_j'(x_2)=0,$$
$$f_j(y_1)=f_j(y_2)=0,$$
$$f_j'(y_1)=f_j'(y_2)=0,$$
$$f_j(0)=f_j(T)=0.$$

Ясно, что вид модулирующих функций определяется геометрией области *G*, а их минимальная гладкость – порядком дифференциальных операторов, входящих в рассматриваемую математическую модель. Выбор модулирующих функций зависит от специфики каждой конкретной задачи. Кроме того, их выбор влияет на обусловленность матрицы полученной системы алгебраических уравнений. Эти вопросы будут предметом более подробного рассмотрения в другой работе.

Некоторые обобщения математической модели

Выше вкратце был изложен М-метод для решения обратной задачи теории фильтрации на примере дифференциального уравнения, описывающего процесс неустановившейся фильтрации газа в пористой среде.

Случай, когда коэффициенты $a(x,y,p)$, $b(x,y,p)$ имеют специальную структуру

Рассмотрим теперь случай, когда коэффициенты $a(x,y)$ и $b(x,y)$ в уравнении фильтрации зависят и от давления: $a=a(x,y,p)$, $b=b(x,y,p)$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[a(x,y,p)\frac{\partial\psi_1}{\partial x}\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[a(x,y,p)\frac{\partial\psi_2}{\partial y}\right]=b(x,y,p)\frac{\partial\psi_3}{\partial t}+\psi_4. \tag{36}$$

Здесь $p=p(x,y,t)$, $\psi_1=\psi_1(y,t,p(x,y,t))$, $\psi_2=\psi_2(x,t,p(x,y,t))$, $\psi_3=\psi_3(x,y,p(x,y,t))$, $\psi_4=\psi_4(x,y,t,p(x,y,t))$ – заданные функции в параллелепипеде $[x_1\le x\le x_2]\times[y_1\le y\le y_2]\times[0\le t\le T]$ (на поверхности параллелепипеда не обязательно требуется знать значения этих функций). Требуется восстановить функции $a(x,y,p)$, $b(x,y,p)$ по этим данным с требуемой точностью в зависимости от степени их гладкости. Сначала, мы выделим один случай, когда не требуются разложения по степеням *p* функций $a(x,y,p)$, $b(x,y,p)$.

Пусть функции $a(x,y,p)$ и $b(x,y,p)$ представимы в следующем виде:

$$a(x,y,p)=A(x,y)\nu(p),\quad b(x,y,p)=B(x,y)\delta(p).$$

В таком случае, после подстановок выражений

$$\Phi_1(t,y,p)=\int_0^p \nu(\xi)\frac{\partial\psi_1(t,y,\xi)}{\partial\xi}d\xi,$$

$$\Phi_2(t,x,p)=\int_0^p \nu(\xi)\frac{\partial\psi_2(t,x,\xi)}{\partial\xi}d\xi,$$

$$\Phi_3(x,y,p)=\int_0^p \delta(\xi)\frac{\partial\psi_3(x,y,\xi)}{\partial\xi}d\xi,$$

$$\Phi_4(x,y,t,p)=\psi_4(x,y,t,p),$$

в уравнение (36), получим следующее соотношение

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[A(x,y)\frac{\partial\Phi_1}{\partial x}\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[A(x,y)\frac{\partial\Phi_2}{\partial y}\right]=B(x,y)\frac{\partial\Phi_3}{\partial t}+\Phi_4. \tag{37}$$

Уравнение (37) принадлежит классу уравнений, рассмотренных выше.

Случай, когда коэффициенты $a(x,y,p)$, $b(x,y,p)$ являются произвольными гладкими функциями

Предположим, что функции $a(x,y,p)$, $b(x,y,p)$ являются достаточно гладкими функциями своих аргументов *x, y, p* (или аналитическими функциями). Представим их по формуле Маклорена по аргументу *p*. Отбрасывая остаточный член, будем иметь:

$$a(x,y,p)\approx\sum_{k=0}^{r}a_k(x,y)p^k,\quad b(x,y,p)\approx\sum_{k=0}^{r}b_k(x,y)p^k. \tag{38}$$

Подставляя (38) в уравнение (36) после замены $\{\psi_i\}$ на $\{\Phi_i\}_{i=1,2,3}$ в силу следующих интегральных соотношений

$$\Phi_{1k}(t,y,p)=\int_0^p \xi^k\frac{\partial\psi_1(t,y,\xi)}{\partial\xi}d\xi,$$

$$\Phi_{2k}(t,x,p)=\int_0^p \xi^k \frac{\partial \psi_2(t,x,\xi)}{\partial \xi}d\xi\,,$$

$$\Phi_{3k}(x,y,p)=\int_0^p \xi^k \frac{\partial \psi_3(x,y,\xi)}{\partial \xi}d\xi\,,$$

$$\Phi_4(x,y,t,p)\equiv \psi_4(x,y,t,p)\,,$$

получаем следующее дифференциальное уравнение в частных производных эволюционного типа

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\sum_{k=1}^{r} a_k(x,y)\frac{\partial}{\partial x}\Phi_{1,k}\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[\sum_{k=1}^{r} a_k(x,y)\frac{\partial}{\partial y}\Phi_{2,k}\right]=\sum_{k=1}^{r} b_k(x,y)\frac{\partial}{\partial t}\Phi_{3,k}+\Phi_4. \tag{39}$$

Уравнение (39) принадлежит рассмотренному выше классу уравнений. Следовательно, мы можем применить М-метод к уравнению (39) для определения неизвестных коэффициентов $a_k(x,y)$, $b_k(x,y)$, предварительно представив функции $a_k(x,y)$, $b_k(x,y)$ по формуле Маклорена и оставляя лишь конечную сумму, обеспечивающую нужную точность.

Ясно, что аналогичные рассуждения, проведенные относительно уравнения (36) для определения коэффициентов $a(x,y,p)$, $b(x,y,p)$ М-методом применимы также и к более широкому классу уравнений, чем (36):

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}\left[a_j(x_1,x_2,...,x_n,t,p)\frac{\partial \psi_j}{\partial x_j}\right]+\sum_{j=1}^{n} b_j(x_1,x_2,...,x_n,t,p)\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_j}+$$
$$+c(x_1,x_2,...,x_n,t,p)\Phi_1(x_1,x_2,...,x_n,t,p)=$$
$$=d(x_1,x_2,...,x_n,t,p)\frac{\partial \Phi_2}{\partial t_j}+\Phi_3(x_1,x_2,...,x_n,t,p).$$

Здесь функции ψ_j, φ_j предполагаются явно не зависящими от x_j и зависящими от остальных независимых переменных $\{x_j\}$, от *t* и *p* (т.е. ψ_j зависит косвенно от x_j через $p=p(x_1,x_2,\ldots,x_n,t)$); функция Φ_2 явно не зависит от *t*, т.е. $\Phi_2=\Phi_2(x_1,x_2,\ldots,x_n,p)$. Предполагается, что $p=p(x_1,x_2,...,x_n,t)$, ψ_j, φ_j, $j=1,2,\ldots,n$, Φ_1, Φ_2, Φ_3 – заданные функции, а a_j, b_j, c и d подлежат определению.

Замечание. М-метод применим и в случае, когда функции ψ_j, φ_j явно зависят и от переменного x_j, а Φ_2 – от *t*. Но в этом случае интегральные формулы для определения неизвестных коэффициентов разложения неизвестных функций в многомерный ряд Маклорена будут содержать под интегралом частные производные по x_j, $(j=1,2,...,n)$ и по *t* от функции $p(x_1,x_2,...,x_n,t)$, что не очень желательно в случае, когда *p* – таблично заданная функция. Последнее объясняется тем, что, операция дифференцирования от таблично заданной функции является, как хорошо известно, некорректной операцией. Основная суть М-метода и заключается в том, чтобы избежать операцию дифференцирования от экспериментально заданной функции *p*.

Заключение

В работе приводится математическая постановка обратной задачи теории фильтрации. Задача сводится к определению коэффициентов нелинейного эволюционного уравнения параболического типа. Для ее решения применяется метод модулирующих функций. В работе приводятся также некоторые обобщения рассматриваемой математической модели. На основе приведенного в работе решения рассматриваемой задачи можно разработать алгоритм для численного решения поставленной задачи.

Примечания:

1. Георгиевский В.Б. Унифицированные алгоритмы для определения фильтрационных параметров. Справочник. Киев, 1971. 328 с.
2. Мирзаджанзаде А.Х., Хасанов М.М., Бахтизин Р.Н. Моделирование процессов нефтегазодобычи. Нелинейность, неравновесность, неопределенность. М.; Ижевск, 2004. 368 с.
3. Loeb J., Cahen G. Extraction, a partik des enregistrements de mesures, des parametres dynamiques d um system // Automatisme. 1963. № 12. P. 17-28.
4. Loeb J., Cahen G. More about process identification // Trans. on Automatic Control. 1965. P. 359-361.
5. Лукнер Л., Шестаков В.М. Моделирование геофильтрации. М.,1976. 407 с.
6. Трофимов В.В., Батищева Г.А. Реализация на ЭВМ унифицированных алгоритмов В.Б. Георгиевского // Сборник научных трудов ЮжНИИгидротехники и мелиорации. 1976. Вып. 9. С. 111-114.
7. Юдин А.И., Юдина О.К. Расчет фильтрационно-ёмкостных параметров по промысловым данным эксплуатации газового месторождения // Термодинамика кооперативных процессов в гетерогенных средах. Тюмень, 1985. С. 80-85.
8. Закиров С.Н., Лапук Б.Б. Проектирование и разработка газовых месторождений. М., 1974. С.39.
9. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М., 1986. 287 с.
10. Hadamard J. Le probleme de Cauchy et les equations aux derivees partielles lineaires hyperboliques. Paris, 1932.

References:

1. Georgievsky V.B. Unified algorithms for definition of filtrational parameters. Directory. Kiev, 1971. 328 pp.
2. Mirzadzhanzade A.H., Khasanov M.M., Bakhtizin R.N. Simulation of petroleum-gas production processes. Nonlinearity, nonequilibrium, uncertainty. Moscow - Izhevsk, 2004. 368 pp.
3. Loeb J., Cahen G. Extraction, a partik des enregistrements de mesures, des parametres dynamiques d um system // Automatisme. 1963. No. 12. P. 17-28.
4. Loeb J., Cahen G. More about process identification // Trans. on Automatic Control. 1965. P. 359-361.
5. Lukner L., Shestakov V.M. Modelling of a geofiltration. M., 1976. 407 pp.
6. Trofimov V.V., Batishcheva G.A. Realization with the help of computer of the V.B. Georgievsky unified algorithms. Proc. Southern Research Hydrotechnical and Melioration Institute, 1976, Issue 9. P. 111-114.
7. Yudin A.I., Yudina O.K. Calculation of filtrational-capacity parameters from trade data on exploitation of a gas deposit // Thermodynamics of cooperative processes in heterogeneous environments. Tyumen, 1985. P. 80-85.
8. Zakirov S.N., Lapuk V.V. Designing and development of gas deposits. M., 1974. P. 39.
9. Tikhonov A.N., Arsenin V.Ya. Methods of solution of incorrect problems. M., 1986. 287 pp.
10. Hadamard J. Le probleme de Cauchy et les equations aux derivees partielles lineaires hyperboliques. Paris, 1932.