УДК 530.1:512.54
ББК 22.314.1
К 59

В.А. Козлов

Инвариантные тензоры малых валентностей в смешанных квантовых системах*

(Рецензирована)

Аннотация

Для инвариантных относительно присоединённого представления группы Ли SL(n, C) ковариантных тензоров валентностей 5, 6 получено распределение по типам симметрии Юнга.

Ключевые слова: *запутанные, смешанные состояния, группа Ли, базисы подпространств, тип симметрии Юнга, валентность тензора.*

V.A. Kozlov

Invariant tensors of small valences in the mixed quantum systems

Abstract

The distribution by Young symmetry types was obtained for invariant, concerning affixed representation of the Lie group SL (n, C), covariant 5-, 6-valence tensors.

Key words*: the confusing, mixed conditions, the Lie group, bases of subspaces, Young symmetry type, tensor valence.*

Известно [1], что смешанная квантовая система определяется тензорным произведением векторов состояния исходных квантовых систем. Если значения физической величины в смешанной системе равна сумме значений состояния исходных квантовых систем, то она называется аддитивной. Такими величинами являются, например, энергия и заряд. Но не все величины являются аддитивными. Например, полный момент импульса, связанный с законами инвариантности относительно группы вращения $SO(3)$ не является аддитивным. Его сложение подчиняется правилу разложения в прямую сумму тензорных произведений неприводимых представлений группы Ли $SO(3)$. Если волновые функции φ и ψ преобразуются по неприводимым представлениям α и β соответственно группы Ли G, то тензорное произведение $\varphi\psi$ преобразуется по правилу

$$\alpha \otimes \beta = \gamma_1 + \gamma_2 + ... + \gamma_m,$$

где в правой части находится прямая сумма неприводимых представлений. Это означает, что смешанная система может с той или иной вероятностью находиться в состояниях $\psi_1, \psi_2, ..., \psi_m$, преобразующихся согласно представлениям группы Ли $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_m$. С помощью коэффициентов разложения в прямую сумму тензорных произведений по определенному правилу можно вычислить соответствующие вероятности.

В связи с этим представляет интерес вычисление числа инвариантных тензоров малых валентностей и распределение их по типам симметрии Юнга [2].

Разложение пространства тензоров, инвариантных относительно присоединенного представления (Ad − инвариантных) группы Ли, в прямую сумму инвариантных подпространств − классическая задача теории линейных представлений групп Ли. Рассмотрим пространство T_k всех ковариантных векторов валентности k, Ad − инвариантных относительно некоторой группы G. В известной мере, задачу о разложении тензорного про-

*Публикуется при поддержке РФФИ и администрации Краснодарского края. Проект N 09-01-96512 р_юг_а

странства T_k позволяет решить использование, так называемых, симметризаторов Юнга. Дадим их краткое описание (подробности можно найти в книге Г.Вейля [3]).

Прежде всего, напомним, что всякий k-валентный тензор можно считать k-линейной функцией $f(x_1, x_2, ..., x_k)$. Симметризаторы Юнга d действуют на полилинейных функциях, являются линейными операторами и представляют собой элементы группового кольца симметрической группы S_k. Строятся операторы d по разбиению числа k в сумму невозрастающих слагаемых; d – являются проектами: $d^2 = d$, кроме того, d – примитивные идемпотенты: невозможно разложение $d = d_1 + d_2$, где

$$d_1 d_1 = d_1, \quad d_1 d_2 = 0, \quad d_2 d_1 = 0, \quad d_2 d_2 = d_2 .$$

Таким образом, d – примитивный проекционный оператор. Имеется теорема: если d – симметризатор Юнга, соответствующий разбиению $k = k_1 + k_2 + ... + k_m$, то тензоры вида df образуют ненулевое неприводимое инвариантное подпространство $T(k_1, k_2, ..., k_m)$ тензорного пространства T_k. При этом различные разбиения порождают различные, неэквивалентные подпространства. Каждое неприводимое инвариантное подпространство T_k подобно какому-нибудь из подпространств $T(k_1, k_2, ..., k_m)$.

Из теоремы непосредственно следует, что тензорное пространство T_k с помощью симметризаторов d можно разложить в прямую сумму инвариантных подпространств путем проектирования d на $T(k_1, k_2, ..., k_m) = dT_k$. Т.к. d – проектор $d^2 = d$, то имеет смысл говорить о типе симметрии $f \in dT_k$: $df \in dT_k$, т.к. $df = d(dg) = d^2 g = dg$, где $g \in T_k$.

Так, если d – есть сумма всевозможных перестановок из k элементов, то df − симметрическая функция, а d – симметрический оператор. Таким образом, принадлежность тензора тому и иному подпространству dT_k можно назвать принадлежностью тому или иному типу симметрии, задаваемому симметризатором d. А разложение в прямую сумму пространств T_k − распределением тензоров по типам симметрии Юнга.

В случае, когда $G = SL(n)$, а $k=5$ и $G = SL(2)$, $k=6$ нам удалось получить распределение по типам симметрии Юнга в явном виде. А именно, в явном виде найдены базисы подпространств в разложении T_k на неприводимые части. В качестве функций $f(x_1, x_2, ..., x_k)$ были взяты полилинейные функции вида $SpX_1 \cdot X_2 \cdot ... \cdot X_k$ (значения k указаны выше). К ним применялись различные операторы Юнга. Привести их здесь не представляется возможным в виду громоздкости. Доказано, что полученные системы тензоров являются максимальными линейно-независимыми.

В случае, когда $G = SL(n)$, $n > 2$, $k=6$ получить явный вид образующих не удалось. Найдено распределение тензоров по типам симметрии Юнга, откуда нетрудно получить в разложении тензорного пространства T_k. Для этого был использован аппарат когомологических операций Адамса и эквивалентная постановка задачи:

Пусть представление группы Ли $SL(n)$ действует в пространстве одновалентных тензоров и $SL(n) \subset SL(N)$ с помощью представления μ. Тогда $\mu \subset \psi$, где ψ − простейшее неприводимое представление группы $SL(N)$. Тензорная степень ψ действует в пространстве k-валентных тензоров и, вообще говоря, приводима:

$$\psi^{\otimes k} = \psi_1 + \psi_2 + ... + \psi_k .$$

Представление μ при этом также возводится в тензорную степень k и разлагается на неприводимые компоненты. Число одномерных компонент в этом разложении равно числу линейно независимых μ − инвариантных тензоров валентности k. Вложение одномерной компоненты в то или иное ψ_i означает, что имеется инвариантный тензор, принадлежащий типу симметрии ψ_i.

Полученные результаты приведем в таблицах 1 и 2. При этом символ, например, D_5 соответствует разбиению $5=5+0+0$, $D_{1001}-5=2+1+1+1$ и т.д.

Таблица 1

Распределение по типам симметрии тензоров валентности 5, инвариантных относительно присоединенного представления $SL(n,C)$

	$SL(2)$	$SL(3)$	$SL(4)$	$SL(n), n\geq 5$
D_5	0	1	1	2
D_{31}	0	4	4	2
D_{12}	0	5	10	10
D_{201}	6	12	18	18
D_{011}	0	5	5	5
D_{1001}	0	4	4	4
D_{0001}	0	1	1	1

Таблица 2

Распределение по типам симметрии тензоров валентности 6, инвариантных относительно присоединенного представления $SL(n,C)$

	$SL(2)$	$SL(3)$	$SL(4)$	$SL(5)$	$SL(n), n\geq 6$
D_6	1	2	3	3	4
D_{41}	0	0	5	5	5
D_{22}	9	27	45	54	54
D_{301}	0	20	30	40	40
D_{03}	0	5	5	5	5
D_{2001}	0	30	40	40	40
D_{111}	0	32	64	64	64
D_{0101}	0	9	18	18	18
D_{10001}	0	5	10	10	10
D_{002}	5	15	25	25	25
D_{000001}	0	0	0	0	0

Примечания:

1. Желобенко Д.П. Компактные группы и их представления. М., 1970. 664 с.
2. Барут А., Рончка Р. Теория представлений групп и ее приложения. Т. 2. М., 1980. 396 с.
3. Вейль Г. Классические группы, их инварианты и представления: пер. с англ.2-е изд. М., 2004. 400 с.

References:

1. Zhelobenko D.P. Compact groups and their representations. M., 1970. 664 pp.
2. Barut A., Ronchka R. Representation theory of groups and its appendices. V.2. M., 1980. 396 pp.
3. Weil G. Classical groups, their invariants and representations. Trans. from Eng. Ed.2. M., 2004. 400 pp.