УДК 517.97
ББК 22.161.67
М 22

Д.К. Мамий, А.В. Лаврентьев, М.Х. Уртенов

Итерационные методы решения сингулярно возмущенных операторных уравнений Фредгольма в случае итерационного и асимптотического представления возмущения*

(Рецензирована)

Аннотация

Предлагаются специальные итерационные методы решения сингулярно возмущенных операторных уравнений Фредгольма, когда возмущение представлено итерационным или асимптотическим приближением. В случае, когда однородное уравнение имеет нетривиальное решение, текущее приближение полностью определяется из условия разрешимости уравнения для следующего приближения. Получены оценки скорости сходимости.

Ключевые слова: *сингулярно возмущенные операторные уравнения Фредгольма, решение, итерационное, асимптотическое, приближение, оператор, банахово пространство.*

D.K. Mamiy, A.V. Lavrent'ev, M.H. Urtenov

Iterative methods of solution of the Fredholm singular perturbed functional equations in case of iterative and asymptotic representation of perturbation

Abstract

Special iterative methods of solving the Fredholm singular perturbed functional equations are offered. The current approximation is defined completely from resolvability of the equation for the next approximation in the case when the similar equation has a nontrivial solution. Estimations of convergence velocity have been obtained.

Key words: *singular perturbed functional Fredholm equations, solution, iterative, asymptotic approximation, operator, Banach space.*

В данной работе, являющейся продолжением работ [1, 2], для сингулярно возмущенных операторных уравнений Фредгольма

$$T(x)+Z_\mu(x)=f,$$

предлагаются различные итерационные методы решения в случаях, когда вместо оператора Z_μ задается оператор $\tilde{Z}_\mu$, «близкий» в некотором смысле к Z_μ, и необходимо построение последовательных приближений x_k к решению x_μ уравнения

$$T(x)+Z_\mu(x)=S,$$

исходя из уравнения

$$T(x)+\tilde{Z}_\mu(x)=S. \tag{1}$$

Как и в [1, 2], здесь будем различать два случая в зависимости от того, имеет или не имеет уравнение $T(x)=0$ нетривиальные решения.

1-й случай. Пусть уравнение $T(x)=0$ имеет лишь тривиальное решение, тогда

*Работа выполнена при финансовой поддержке Федерального Агентства по образованию и науке РФ в рамках темы 1.4.08 Единого заказ/наряда.

существует непрерывный обратный оператор T^{-1}.

Пусть задана асимптотическая последовательность $\{\psi_i(\mu): U_0 \to R\}, i = 0,1,...$ при $\mu \to \mu_0$, причем $\lim\limits_{\mu\to\mu_0} \psi_0(\mu) = 0$ и для некоторого натурального m справедливо

$$Z_\mu = \sum_{i=0}^{m} Z_i \psi_i(x) + R_{\mu,m+1}, \tag{2}$$

где Z_i – линейные непрерывные операторы: $B \to B,\ i = 0,1,...,m$, а для линейного оператора $R_{\mu,m+1}: B \to B,$ при $\mu = U_0$ справедлива оценка:

$$\left\| R_{\mu,m+1} \right\|_L = 0(\psi_{m+1}(\mu))_{\mu\to\mu_0}. \tag{3}$$

В общем случае получить асимптотическое разложение решения в виде асимптотического ряда для произвольной асимптотической последовательности $\{\psi_i(\mu): U_0 \to R\}, i = 0,1,...$ при $\mu \to \mu_0$ невозможно, поскольку невозможно упорядочить систему функций $\{\psi_i \psi_j\}_{i,j=0,1,...,l}$ так, чтобы получилась асимптотическая последовательность.

Определим последовательные приближения как решения уравнений:

$$T(x_0) = S, \tag{4}$$

$$T(x_\mu) = -\sum_{i=0}^{\min(k-1,m)} Z_i(x_{k-i+1})\psi_i(\mu) + S, k = 1,2,... \tag{5}$$

Обозначим $\eta_i = x_i - x_{i-1}, i = 1,2,...,$

$$l_i(\mu) = \left\| T^{-1} \right\|_L \left\| Z_i \right\|_L \left| \psi_i(\mu) \right|,\ i = 0,1,...,m.$$

Пусть $k < m+1,$ тогда для η_k получим уравнения

$$T(\eta_l) = -Z_0(x_0)\psi_0(\mu);$$

$$T(\eta_k) = -\sum_{i=1}^{k-2} Z_i(\eta_{k-i-1})\psi_i(\mu) - Z_{k-1}(x_0)\psi_{k-1}(\mu),\ k = 2,...,m+1.$$

Откуда получим оценку

$$\left\| \eta_1 \right\|_B \le l_0(\mu) \left\| x_0 \right\|; \tag{6}$$

$$\left\| \eta_k \right\|_B \le \sum_{i=0}^{k-2} l_i(\mu) \left\| \eta_{k-i-1} \right\|_B + l_{k-1}(\mu) \left\| X_0 \right\|_B. \tag{7}$$

Определим последовательность функций $\{\varphi_i(\mu): U_0 \to R\}$ рекуррентными равенствами:

$$\varphi_1(\mu) = l_0(\mu);$$

$$\varphi_k(\mu) = \sum_{i=0}^{k-2} l_i(\mu)\varphi_{k-i-1}(\mu) + l_{k-1}(\mu),\ k = 2,...,m;$$

$$\varphi_k(\mu) = \sum_{i=0}^{m} l_i(\mu)\varphi_{k-i-1}(\mu),\ k = m+1.$$

Из (6), (7) получим

$$\|\eta_k\|_B \le \varphi_k(\mu)\|x_0\|_B, \; k = 1,\dots,m.$$

Пусть теперь $k \ge m+1$, тогда для η_k получим уравнение

$$T(\eta_k) = -\sum_{i=0}^{m} Z_i(\eta_{k-i})\psi_i(\mu),$$

откуда и имеем оценку

$$\|\eta_k\|_B \le \sum_{i=0}^{m} l_i(\mu)\|\eta_{k-i-1}\|_B,$$

или

$$\|\eta_k\|_B \le \varphi_k(\mu)\|x_0\|_B .$$

Теорема 1.

Пусть уравнение $T(x) = 0$ имеет лишь тривиальное решение, тогда существует такая окрестность $\tilde{U}_{\mu_0}$ точки μ_0, что

$$\|x_\mu - x_k\| \le c\varphi_k(\mu), \; \mu \in \tilde{U}_{\mu_0} \cap U_0.$$

Доказательство. Рассмотрим уравнение

$$T(x) + \tilde{Z}_\mu(x) = S,$$

где

$$\tilde{Z}_\mu = \sum_{i=0}^{m} Z_i \psi_i(\mu).$$

Это уравнение имеет единственное решение $\tilde{x}_\mu$, так как уравнение $T(x) = 0$ имеет лишь тривиальное решение. По построению x_k удовлетворяет уравнению

$$T(x) + \tilde{Z}_\mu(x) = S_{\mu,k} + S, \tag{8}$$

где $S_{\mu,k}$ имеет оценку

$$\|S_{\mu,k}\|_B \le c\varphi_k(\mu), \; \mu \in U_{\mu_0} \cap U_0.$$

Обозначим $\tilde{\eta} = \tilde{x}_\mu - x_k$, тогда

$$T(\tilde{\eta}) + \tilde{Z}_\mu(\tilde{\eta}) = S_{\mu,k}$$

или

$$\tilde{\eta} = -T^{-1}\tilde{Z}_\mu(\tilde{\eta}) + T^{-1}(S_{k,\mu}).$$

Так как $\lim\limits_{\mu\to\mu_0}\|\tilde{Z}_\mu\|_L = 0,$ то существует такая окрестность $\tilde{U}_{\mu_0} \subset U_0$, что

$$\|T^{-1}\|_L \|\tilde{Z}_\mu\|_L < 1, \; \mu \in \tilde{U}_{\mu_0} \cap U_0.$$

Следовательно,

$$\|\tilde{x}_\mu - x_k\|_B = \|\eta\|_B \le \frac{\|S_k\|_B}{1 - \|T^{-1}\|_L \|\tilde{Z}_\mu\|_L} \le c\varphi_k(\mu). \tag{9}$$

В результате, получим

$$T(\tilde{\eta}) + \tilde{Z}_{\mu}(\tilde{\eta}) = S_{\mu},$$

где $S_{\mu} = -R_{\mu,m+1}(\tilde{x}_{\mu})$ удовлетворяет неравенству

$$\|S_k\|_B \le c\varphi_k(\mu).$$

Откуда, как и ранее, получаем

$$\|\tilde{x}_{\mu} - x_k\|_B \le c\varphi_k(\mu). \tag{10}$$

Из (9) и (10) имеем

$$\|x_{\mu} - x_k\| \le \|x_{\mu} - \tilde{x}_{\mu}\| + \|\tilde{x}_{\mu} - x_k\| \le c\varphi_k(\mu),\ \mu \in \tilde{U}_{\mu_0} \cap U_0,$$

что требовалось доказать.

Замечание 1. Если асимптотическая последовательность $\{\psi_k(\mu)\}_{k=0,1,..}$ такова, что существует k_0 и

$$\varphi_{k_0}(\mu) = 0(\psi_m(\mu)),\ \mu \to \mu_0,$$

то тогда

$$\|x_{\mu} - x_k\|_B \le c\psi_m(\mu),\ \mu \in \tilde{U}_{\mu_0} \cap U_0$$

и нет необходимости вычислять x_k, где $k > k_0$. Заметим, что указанным свойством обладает, например, последовательность

$$\varphi_k(\mu) = \varphi_0^k(\mu),\ k = 1,2,m$$

и

$$\lim_{\mu \to \mu_0} \psi_0(\mu) = 0.$$

Пусть существуют такая окрестность U_{μ_0} точки μ_0 и такая последовательность $\{Z_{k,\mu}\}, k = 1,2,...,\ \mu \in U_{\mu_0} \cap U_0$ линейных непрерывных при фиксированных k и μ операторов $B \to B,$ что

$$\lim_{k \to \infty} \|Z_{k,\mu} - Z_{\mu}\|_L = 0 \text{ при } \mu \in \tilde{U}_{\mu_0} \cap U_0.$$

Определим последовательные приближения

$$T(x_0) = S;$$
$$T(x_k) = -Z_{k,\mu}(x_{k-1}) + S,\ k = 1,2,....$$

Обозначим

$$\eta_k = x_k - x_{k-1},\ k = 1,2,....$$

Для η_k получаем уравнение

$$T(\eta_1) = -Z_{1,\mu}(x_0); \tag{11}$$

$$T(\eta_k) = -Z_{k,\mu}(\eta_{k-1}) + (Z_{k-1,\mu} - Z_{k,\mu})(x_{k-2}),\ k = 2,3,.... \tag{12}$$

Предположим, что x_k равномерно ограничены, то есть существует постоянная $c > 0,$ не зависящая от k и μ, что

$$\|x_k\| \le c.$$

Обозначим

$$l_k(\mu) = \left\|T^{-1}\right\|_L \left\|Z_{k,\mu}\right\|_L, \ k = 1,2,...; \tag{13}$$

$$\begin{aligned} &\alpha_1(\mu) = c l_1(\mu); \\ &\alpha_k(\mu) = c\left\|T^{-1}\right\|_L \left\|Z_{k,\mu} - Z_{k-1,\mu}\right\|_L, \ k = 2,3,.... \end{aligned} \tag{14}$$

Последовательно оценивая, получаем

$$\begin{aligned} &\|\eta_1\| \le \alpha_1(\mu); \\ &\|\eta_k\| \le l_{k-1}(\mu)\|\eta_{k-1}\| + \alpha_1(\mu). \end{aligned}$$

Обозначим

$$\begin{aligned} &\varphi_1(\mu) = \alpha_1; \\ &\varphi_k(\mu) = \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i \prod_{j=1}^{k-1} l_j + \alpha_k, \ k = 2,3,.... \end{aligned}$$

По индукции получим

$$\|\eta_k\| \le \alpha_k(\mu); \ k = 1,2,....$$

Обозначим

$$\Phi_k(\mu) = \sum_{i=k}^{\infty} \varphi_i(\mu).$$

Лемма 1. Пусть последовательность $Z_{k,\mu}, k = 1,2,...$ такова, что $\lim_{k\to\infty} \Phi_k(\mu) = 0$ при любом $\mu \in U_{\mu_0} \cap U_0$. Тогда последовательность x_k сходится к x_μ, причем

$$\left\|x_k - x_\mu\right\| \le \Phi_{k+1}(\mu). \tag{15}$$

Теорема 2.

Пусть последовательность операторов $Z_{k,\mu}, k = 1,2,...$ удовлетворяет следующим условиям:

1. $\lim_{k\to\infty} \left\|Z_{k,\mu} - Z_\mu\right\|_L = 0$ при $\mu \in U_{\mu_0} \cap U_0$.

2. $\sum_{k=2}^{\infty} \left\|Z_{k,\mu} - Z_{k-1,\mu}\right\|_L$ сходится при $\mu \in U_{\mu_0} \cap U_0$.

3. Существует функция $l(\mu): U_0 \to R$, что $\lim_{\mu\to\mu_0} l(\mu) = 0$ и $\left\|Z_{k,\mu}\right\| \le l(\mu)$ для любого $k = 1,2,...$ и $\mu \in U_{\mu_0} \cap U_0$.

Тогда последовательность x_k сходится к x_μ и справедлива оценка (15).

Доказательство. Из условия 2 следует

$$\sum_{k=2}^{\infty} \alpha_k < \infty.$$

Из условия 3 имеем

$$\varphi_k(\mu) \le l(\mu)\varphi_{k-1}(\mu), \ k = 1,3,....$$

Определим

$$\begin{aligned} &\tilde{\varphi}_1(\mu) = \varphi_1(\mu); \\ &\tilde{\varphi}_k(\mu) = l(\mu)\tilde{\varphi}_{k-1}(\mu) + \alpha_k(\mu), \ k = 2,3,.... \end{aligned}$$

Очевидно,

$$\varphi_k(\mu) \le \tilde{\varphi}_k(\mu), \ k = 2,3,..., \ \mu \in U_{\mu_0} \cap U_0.$$

Обозначим $\psi_n = \sum_{k=1}^{n} \tilde{\varphi}_k(\mu)$.

Функции ψ_n удовлетворяют рекуррентным соотношениям

$$\psi_n = l(\mu)\psi_{n-1} + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k(\mu),$$

или

$$\psi_n = l(\mu)\psi_{n-1} + \overline{\psi}_n,$$

где

$$\overline{\psi}_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k(\mu),\ m = 2,3,\ldots,\overline{\psi}_1 = \psi_1.$$

Откуда получаем

$$\psi_n = \sum_{k=1}^{n} l^{n-k}(\mu)\overline{\psi}_k(\mu) \le \sum_{k=1}^{n} l^{n-k} \sum_{k=1}^{n} \alpha_i(\mu) \le \frac{l}{l - l(\mu)} \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i(\mu).$$

Таким образом, последовательность $\psi_n(\mu)$ монотонно возрастает и ограничена при любом $\mu \in U_{\mu_0} \cap U_0$, следовательно, последовательность $\psi_n(\mu)$ сходится. Но тогда ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \tilde{\varphi}_k(\mu)$ (соответственно и ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(\mu))$ сходится. Так как $\Phi_k(\mu) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(\mu)$, то $\lim_{k\to\infty} \Phi_k(\mu) = 0$ для любого $\mu \in U_{\mu_0} \cap U_0$ и применение леммы 1, доказывает теорему.

2-й случай. Пусть уравнение $T(x) = 0$ имеет n линейно независимых решений $x^{(1)}, \ldots, x^{(n)}$ и задана последовательность операторов $\{Z_{k,\mu}\}, k = 1,2,\ldots,$ сходящихся к Z_μ при $k \to \infty$ в норме $\|\cdot\|_{\mathrm{L}}$

Построим при этих основных предположениях последовательные приближения x_k, сходящиеся к решению x_μ уравнения

$$T(x) + Z_\mu(x) = S.$$

Выберем нулевое приближение x_0 в виде

$$x_0 = \sum_{i=1}^{n} c_0^{(i)} x^{(i)}$$

и определим последовательные приближения x_k как решения уравнений

$$T(x) = -Z_{k,\mu}(x_{k-1}) + S,\ k = 1,2,\ldots.$$

Однако здесь необходимо доказать разрешимость уравнения для x_k и дать алгоритм построения x_k.

Для x_1 получим уравнение

$$T(x) = S_0, \tag{16}$$

где

$$S_0 = -\sum_{i=1}^{n} c_0^{(i)} Z_{1,\mu}(x^{(i)}) + S.$$

Это уравнение имеет решение

$$x_1 = x_1^* + \sum_{i=1}^{n} c_1^{(i)} x^{(i)},$$

где x_1^* некоторое решение (16), если только

$$g^{(j)}(S_0) = 0\ . \tag{17}$$

Вводя обозначения, аналогичные обозначениям [1, 2] и

$$H_{k,\mu} = (g^{(j)}(Z_{k,\mu}(x^{(i)})))_{i,j=1}^{n}$$

из (17), имеем

$$H_{1,\mu} C_0 = h. \tag{18}$$

Предположим, что существует такая окрестность U_{μ_0} точки μ_0, что

$$\det H_{k,\mu}^{-1} \neq 0$$

для любого $k = 1, 2, \ldots$ и $\mu \in U_{\mu_0} \cap U_0$, тогда уравнение (3.18) имеет решение

$$C_0 = H_{1,\mu}^{-1} h. \tag{19}$$

Таким образом, выбор C_0 в виде (19) обеспечивает разрешимость уравнения для x_1 и определяет x_0.

Пусть уже определены $x_0, \ldots, x_k$, причем

$$x_k = x_k^* + \sum_{i=1}^{n} c_k^{(i)} x^{(i)} .$$

Далее полагаем

$$S_k = -Z_{k,\mu}(x_k) + S;$$

$$h_k = (g^{(j)}(Z_{k,\mu}(x_k^*)))_{j=1}^{n} .$$

Выбор C_k в виде

$$C_k = H_{k,\mu}^{-1} h - H_{k,\mu}^{-1} h_k$$

обеспечивает разрешимость уравнения для x_{k+1} и определяет x_k .

Замечание 2. Если вместо Z_μ задано его асимптотическое представление (3), то, как и ранее, алгоритм построения x_k должен быть модифицирован. Соответствующие результаты не приводятся из-за громоздкости.

В следующей работе, на основе построенных в данной статье и в работах [1, 2] итерационных методов решения операторных уравнений Фредгольма, нами будут предложены различные схемы последовательных приближений для систем сингулярно возмущенных линейных дифференциальных и интегродифференциальных уравнений.

Примечания:

1. Мамий Д.К., Лаврентьев А.В., Уртенов М.Х. Сингулярно возмущенные операторные уравнения Фредгольма // Труды ФОРА. 2008. № 13. С. 22-26. URL: http://fora.adygnet.ru
2. Мамий Д.К., Лаврентьев А.В., Уртенов М.Х. Итерационные методы решения сингулярно возмущенных операторных уравнений Фредгольма // Вестник Адыгейского государственного университета. 2009. Вып. 1 (43). С 9-23. URL: http://vestnik.adygnet.ru

References:

1 Mamiy D.K., Lavrentiev A.V., Urtenov M.H. Fredholm singular perturbed functional equations // Proc. FORA, 2008. No. 13. P. 22-26. URL: http://fora.adygnet.ru

2 Mamiy D.K., Lavrentiev A.V., Urtenov M.H. Iterative methods of solution of the Fredholm singular perturbed functional equations // Bulletin of the Adyghe State University. 2009. No 1(43). P. 9-23. URL: http://vestnik.adygnet.ru