УДК 517.925.41
ББК 22.161.61
У 95

А.Д. Ушхо

Параллельные прямые изоклины кубичных дифференциальных систем на плоскости

(Рецензирована)

Аннотация

Доказывается, что если кубичная дифференциальная система второго порядка имеет хотя бы одну особую точку, то она не может иметь более пяти параллельных между собой прямых изоклин.

Рассматривается вопрос о существовании других прямых изоклин при условии, что система имеет максимальное число параллельных между собой прямых изоклин.

Ключевые слова: *прямая изоклина, особая точка, кубичная дифференциальная система на плоскости.*

A.D. Ushkho

Parallel straight-line isoclines of planar cubic differential systems

Abstract

It is proved that if the cubic differential system of the second order has at least one singular point it cannot have more than five straight-line isoclines parallel to each other.

The problem on existence of other straight-line isoclines is considered provided the system has the maximum number of straight-line isoclines parallel to each other.

Key words: *a straight-line isocline, singular point, the planar cubic differential system.*

Изучению прямых изоклин системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = \sum_{i+j=0}^{3} a_{ij} x^i y^j = P_3(x,y), \ \frac{dy}{dt} = \sum_{i+j=0}^{3} b_{ij} x^i y^j = Q_3(x,y), \tag{1}$$

где $a_{ij}, b_{ij} \in R, (P_3, Q_3) = 1$, посвящены работы [1, 2].

При этом в [1] дается оценка общего числа прямых изоклин системы (1), а в [2] дан краткий обзор работ по данной теме.

В настоящей работе мы рассмотрим вопрос о числе параллельных между собой прямых изоклин системы (1).

Существуют системы вида (1), обладающие пятью параллельными между собой прямыми изоклинами при наличии хотя бы одного состояния равновесия.

Пример 1.

$$\frac{dx}{dt} = (y-x-1)(y-x+1)(y-x+5), \ \frac{dy}{dt} = (y-x-10)(y-x+10)(y+x). \tag{2}$$

Как видим, система (2) имеет пять параллельных между собой прямых изоклин, в том числе три изоклины бесконечности и две изоклины нуля.

Кроме того, эта система имеет три состояния равновесия, и они расположены на прямой $y + x = 0$.

Покажем, что не существует систем вида (1), имеющих более пяти параллельных между собой прямых изоклин.

Замечание 1. Всюду в дальнейшем считаем, что многочлены $P_3(x,y)$ и $Q_3(x,y)$ неоднородные, и каждый из них содержит хотя бы один одночлен третьей степени. Это требование мы не будем оговаривать каждый раз.

Теорема 1. Если система (1) имеет не менее одного состояния равновесия, то число параллельных между собой прямых изоклин этой системы не превосходит пяти.

Доказательство. Рассмотрим систему (1), имеющую не менее пяти параллельных между собой прямых изоклин. Среди этих прямых найдутся две, на которых система (1) индуцирует различные направления [1].

Поэтому, следуя [1], приведем систему (1) посредством подходящего неособенного линейного преобразования к виду:

$$\frac{dx}{dt}=(y-kx-b_1)P_2(x,y),\quad \frac{dy}{dt}=(y-kx-b_2)Q_2(x,y), \qquad (3)$$

где $k\in R$, $b_1\neq b_2$, $P_2(x,y)=\sum_{i+j=0}^{2}a_{ij}x^iy^j$, $Q_2(x,y)=\sum_{i+j=0}^{2}b_{ij}x^iy^j$.

Прямая $y=kx+b$, где $b\neq b_{1,2}$, является изоклиной системы тогда и только тогда, когда имеет место равенство

$$\frac{(b-b_2)Q_2(x,kx+b)}{(b-b_1)P_2(x,kx+b)}\equiv m_1-const.$$

Так как $\dfrac{b-b_2}{b-b_1}$ - постоянное число (не зависящее от x), то

$$\frac{Q_2(x,kx+b)}{P_2(x,kx+b)}\equiv m-const. \qquad (4)$$

Здесь

$$Q_2(x,kx+b)=g_2(b)+g_1(b)x+g_0(b)x^2,$$
$$P_2(x,kx+b)=f_2(b)+f_1(b)x+f_0(b)x^2,$$

где

$$g_2(b)=b_{00}+b_{01}b+b_{02}b^2,\ g_1(b)=b_{10}+b_{01}k+(b_{11}+2b_{02}k)b,$$
$$g_0(b)=b_{20}+b_{11}k+b_{02}k^2,\ f_2(b)=a_{00}+a_{01}b+a_{02}b^2,$$
$$f_1(b)=a_{10}+a_{01}k+(a_{11}+2a_{02}k)b,\ f_0(b)=a_{20}+a_{11}k+a_{02}k^2.$$

Будем различать два случая:

1) $f_2(b)\equiv 0$;

2) $f_2(b)\not\equiv 0$.

В случае 1) кроме прямой ℓ_1: $y-kx-b_1=0$ система (3) имеет не более одной прямой изоклины бесконечности с угловым коэффициентом k.

В самом деле, допуская противное, видим, что $f_1(b)\equiv 0$ и, кроме того, выполняются условия:

$$a_{00}=a_{10}=a_{01}=a_{20}=a_{02}=a_{11}k=0.$$

Очевидно, что $k=0$, так как в противном случае (при $k\neq 0$) многочлен $P_2(x,y)$ вырождается.

Итак, $P_2(x,y)=a_{11}xy$, а система (3) имеет вид:

$$\frac{dx}{dt}=a_{11}(y-b_1)xy,\ \frac{dy}{dt}=(y-b_2)Q_2(x,y). \qquad (5)$$

Из равенства $f_2(b)\equiv 0$ следует неравенство $g_2(b)\not\equiv 0$, так как в противном случае правые части системы (5) имеют общий множитель x.

Кроме прямой ℓ_2: $y-b_2=0$ система (5) имеет не более двух прямых изоклин нуля, параллельных прямой ℓ_2, которые соответствуют корням уравнения $g_2(b)=0$.

Таким образом, при $f_2(b)\equiv 0$ система (3) действительно имеет не более пяти параллельных между собой прямых изоклин.

Более того, в случае пяти изоклин три из них являются изоклинами нуля, а две – изоклинами бесконечности.

Пусть далее имеет место случай 2).

Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{aligned} g_1(b)&=mf_1(b),\\ g_2(b)&=mf_2(b),\\ g_0(b)&=mf_0(b), \end{aligned} \tag{6}$$

полученную из (4).

Так как $f_2(b)\not\equiv 0$, то, исключив m из системы (6), получим:

$$g_1(b)f_2(b)=f_1(b)g_2(b), \tag{7}$$

$$g_0(b)f_2(b)=f_0(b)g_2(b). \tag{8}$$

Так как (7) является уравнением третьей степени относительно b, то система (3) имеет не более трех параллельных прямых изоклин, отличных от изоклин

$$y-kx-b_1=0 \quad \text{и} \quad y-kx-b_2=0.$$

Теорема доказана.

Замечание 2. Если система (3) имеет пять параллельных между собой прямых изоклин при условии наличия хотя бы одного состояния равновесия, то $g_0(b)=f_0(b)=0$ (см. (8)).

Следуя [1], символом $\ell_i^{m_j}$ будем обозначать прямую ℓ_i, на которой система (1) индуцирует направление m_j.

Отнесем все прямые изоклины с одинаковыми верхними индексами к одному и тому же множеству, а прямые с различными нижними индексами будем считать различными, то есть несовпадающими.

Тогда множество всех прямых изоклин можно разбить на непустые непересекающиеся подмножества, в каждом из которых не более трех прямых.

Обозначим через M – множество, состоящее из пяти параллельных между собой прямых изоклин системы (1).

Тогда логически возможными способами разбиения M на непустые непересекающиеся подмножества будут следующие:

1) $M=\{\ell_1^{m_1},\ell_2^{m_1},\ell_3^{m_1}\}\cup\{\ell_4^{m_2},\ell_5^{m_2}\}$, $m_1\neq m_2$;

2) $M=\{\ell_1^{m_1},\ell_2^{m_1},\ell_3^{m_1}\}\cup\{\ell_4^{m_2}\}\cup\{\ell_5^{m_3}\}$, $m_1\neq m_2$, $m_1\neq m_3$, $m_2\neq m_3$;

3) $M=\{\ell_1^{m_1},\ell_2^{m_1}\}\cup\{\ell_3^{m_2},\ell_4^{m_2}\}\cup\{\ell_5^{m_3}\}$, $m_1\neq m_2$, $m_1\neq m_3$, $m_2\neq m_3$;

4) $M=\{\ell_1^{m_1},\ell_2^{m_1}\}\cup\{\ell_3^{m_2}\}\cup\{\ell_4^{m_3}\}\cup\{\ell_5^{m_4}\}$, $m_1\neq m_2$, $m_1\neq m_3$, $m_1\neq m_4$, $m_2\neq m_3$, $m_2\neq m_4$, $m_3\neq m_4$;

5) $M=\bigcup\limits_{i=1}^{5}\{\ell_i^{m_i}\}$, все m_i - попарно различны.

Теорема 2. Множество M, состоящее из пяти параллельных между собой прямых изоклин системы (1), при наличии у этой системы не менее одного состояния равновесия может быть разбито на непустые непересекающиеся подмножества только одним из способов 1) – 5).

Доказательство. Никаких других способов разбиения множества M на непустые непересекающиеся подмножества, кроме способов 1) – 5), не существует.

Покажем, что все эти способы реализуются.

В случае $f_2(b)\equiv 0$ при доказательстве предыдущей теоремы нами показано, что множество M может быть разбито способом 1).

Если $f_1(b)\not\equiv 0$, то независимо от равенства и неравенства тождественно нулю трехчлена $f_2(b)$ система (3) может иметь прямую изоклину бесконечности, если

$$f_1(b)=0, \quad f_0(b)=0.$$

Эта изоклина, очевидно, соответствует корню уравнения $f_1(b)=0$.

При этом

$$Q_2(x,kx+b)\not\equiv 0,$$

так как в противном случае правые части уравнений системы (3) имеют общий множитель

$$y-kx-b=0.$$

Если кроме этого уравнение $g_2(b)=0$ имеет два корня,

$$g_1(b)\equiv 0, \quad g_0(b)=0,$$

то система имеет три изоклины нуля с угловым коэффициентом, равным k.

Таким образом, налицо возможность реализации способа 1) разбиения множества M.

Данный способ иллюстрируется системой дифференциальных уравнений (2).

Далее покажем, что реализуется и способ 2) разбиения множества M. Для этого рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= (y-kx-b_1)(y-kx-b_2)(y-kx-b_3), \\ \frac{dy}{dt} &= (y-kx-b_4)Q_2(x,y), \end{aligned} \qquad (9)$$

где $Q_2(x,y)$ имеет тот же вид, что и в системе (3).

Система (9) уже имеет четыре параллельные прямые изоклины, являющиеся главными изоклинами.

Покажем, что система (9) может иметь и пятую прямую изоклину

$$y-kx-b=0,$$

не являющуюся главной изоклиной.

Прямая

$$y-kx-b=0,$$

где $b\neq b_i$, $i=\overline{1,4}$, является изоклиной системы (9) в том и только том случае, когда

$$Q_2(x,y)\equiv (y-kx-b)(Ax+By+C)+L, \qquad (10)$$

где $L\in R\setminus\{0\}$.

Из (10) получаем, что

$$L=b_{00}+b_{01}b+b_{02}b^2\equiv g_2(b),\ A=b_{11}+b_{02}k,\ \ B=b_{02},\ C=b_{01}+b_{02}b,$$

т.е. система (9) имеет вид:

$$\begin{aligned}
&\frac{dx}{dt} = (y - kx - b_1)(y - kx - b_2)(y - kx - b_3),\\
&\frac{dy}{dt} = (y - kx - b_4)\left[(y - kx - b)(b_{02}y + (b_{11} + b_{02}k)x + b_{01} + b_{02}b) + b_{00} + b_{01}b + b_{02}b^2\right].
\end{aligned} \tag{11}$$

Заметим, что недопустимо одновременное выполнение условий

$$b_{11} = -2b_{02}k\ ,\quad b_{02} \neq 0\ ,$$

так как система (11) не имеет особых точек иначе.

Из (11) видно, что $y - kx - b = 0$ - изоклина системы, не являющаяся главной изоклиной. Тем самым доказана возможность разбиения множества M способом 2).

Пример 2.

$$\begin{aligned}
&\frac{dx}{dt} = (y + x - 1)(y + x - 2)(y + x - 3),\\
&\frac{dy}{dt} = (y + x - 5)\left[(y + x - 10)(y - x) + 20\right].
\end{aligned}$$

Данная система имеет пять параллельных между собой прямых изоклин, и множество M разбито на подмножества способом 2).

Покажем возможность разбиения множества M способом 3), для чего рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}
&\frac{dx}{dt} = (y - kx - b_1)(y - kx - b_2)(Ax + By + C),\\
&\frac{dy}{dt} = (y - kx - b_3)(y - kx - b_4)(Rx + Ny + K),
\end{aligned} \tag{12}$$

где b_i, $i = \overline{1,4}$ - попарно различные числа.

Система (12) может иметь прямую изоклину

$$y - kx - b = 0,\ b \neq b_i,\ \ i = \overline{1,4}\ ,$$

которая не является главной изоклиной.

В самом деле, прямая $y - kx - b = 0$ - изоклина системы (12) в том и только в том случае, если

$$\left(\frac{Rx + Ny + K}{Ax + By + C}\right)_{y = kx + b} \equiv m - const\ .$$

Из последнего равенства получаем тождество:

$$Rx + Ny + K \equiv \alpha(y - kx - b) + m(Ax + By + C)\ ,$$

т.е. система (12) имеет вид:

$$\begin{aligned}
&\frac{dx}{dt} = (y - kx - b_1)(y - kx - b_2)(Ax + By + C),\\
&\frac{dy}{dt} = (y - kx - b_3)(y - kx - b_4)\left[\alpha(y - kx - b) + m(Ax + By + C)\right],
\end{aligned} \tag{13}$$

где α, $m \in R \setminus \{0\}$.

Очевидно, $y - kx - b = 0$ – изоклина системы (13), не являющаяся главной изоклиной, т.е. способ 3) разбиения множества M возможен.

Для доказательства возможности разбиения M способом 4) рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = (y - kx - b_1)(y - kx - b_2)(Ax + By + C),$$
$$\frac{dy}{dt} = (y - kx - b_3)Q_2(x, y), \qquad (14)$$

где $Q_2(x, y) = \sum_{i+j=0}^{2} b_{ij} x^i y^j$.

Пусть на прямых

$$\ell_4: \ y - kx - b_4 = 0, \quad \ell_5: \ y - kx - b_5 = 0$$

система (14) индуцирует направления m_4 и m_5 соответственно, причем

$$m_4 \cdot m_5 \neq 0, \quad m_4 \neq m_5 .$$

Тогда имеют место равенства:

$$Q_2(x, y) - m_4(Ax + By + C) \equiv (y - kx - b_4)R_1(x, y), \qquad (15)$$

$$Q_2(x, y) - m_5(Ax + By + C) \equiv (y - kx - b_5)S_1(x, y), \qquad (16)$$

где R_1 и S_1 - линейные функции.

Решив систему (15), (16) относительно $Q_2(x, y)$ и $Ax + By + C$, получаем:

$$Q_2(x, y) \equiv \frac{1}{m_4 - m_5}[m_4(y - kx - b_5)S_1(x, y) - m_5(y - kx - b_4)R_1(x, y)], \qquad (17)$$

$$Ax + By + C \equiv \frac{1}{m_4 - m_5}[(y - kx - b_5)S_1(x, y) - (y - kx - b_4)R_1(x, y)]. \qquad (18)$$

Нетрудно убедиться в том, что

$$S_1(x, y) = \alpha x + \beta y + \gamma, \quad R_1(x, y) = \alpha x + \beta y + \omega, \quad \gamma \neq \omega .$$

Вводя замену $d\tau = \dfrac{dt}{m_4 - m_5}$, с учетом (17) и (18) системе (14) придадим вид:

$$\frac{dx}{d\tau} = (y - kx - b_1)(y - kx - b_2)[(y - kx - b_5)(\alpha x + \beta y + \gamma) - (y - kx - b_4)(\alpha x + \beta y + \omega)],$$
$$\frac{dy}{d\tau} = (y - kx - b_3)[m_4(y - kx - b_5)(\alpha x + \beta y + \gamma) - m_5(y - kx - b_4)(\alpha x + \beta y + \omega)]. \qquad (19)$$

Очевидно, что прямые l_4 и l_5 – изоклины системы (19), но не главные.

Итак, нами показано, что способ 4) разбиения множества M возможен.

Далее рассмотрим систему дифференциальных уравнений (3).

Прямые

$$l_3 : y - kx - b_3 = 0, \quad l_4 : y - kx - b_4 = 0$$

изоклины системы (3) тогда и только тогда, когда имеют место равенства:

$$Q_2(x, y) - m_3 P_2(x, y) \equiv (y - kx - b_3)R_1(x, y), \qquad (20)$$

$$Q_2(x, y) - m_4 P_2(x, y) \equiv (y - kx - b_4)S_1(x, y), \qquad (21)$$

где R_1 и S_1 - линейные функции, $m_3 \neq m_4$.

С учетом (20), (21) и замены $d\tau = \dfrac{dt}{m_3 - m_4}$ запишем систему (3) в виде

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} &= (y-kx-b_1)[(y-kx-b_4)S_1(x,y)-(y-kx-b_3)R_1(x,y)] \equiv (y-kx-b_1)\overline{P}_2(x,y), \\ \frac{dy}{d\tau} &= (y-kx-b_2)[m_3(y-kx-b_4)S_1(x,y)-m_4(y-kx-b_3)R_1(x,y)] \equiv (y-kx-b_2)\overline{Q}_2(x,y). \end{aligned} \tag{22}$$

Система (22) имеет прямую изоклину

$$l_5 : y - kx - b_5 = 0$$

тогда и только тогда, когда

$$\overline{Q}_2(x,y) - m_5\overline{P}_2(x,y) \equiv (y-kx-b_5)T_1(x,y),$$

где T_1 – линейная функция.

Из последнего равенства получаем:

$$(y-kx-b_4)S_1(x,y) \equiv \frac{m_4 - m_5}{m_3 - m_5}(y-kx-b_3)R_1(x,y) + \frac{1}{m_3 - m_5}(y-kx-b_5)T_1(x,y). \tag{23}$$

После замены $d\mu = \dfrac{d\tau}{m_3 - m_5}$ с учетом (23) система (22) запишется в виде:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\mu} &= (y-kx-b_1)[(m_4-m_3)(y-kx-b_3)R_1(x,y)+(y-kx-b_5)T_1(x,y)], \\ \frac{dy}{d\mu} &= (y-kx-b_2)[m_5(m_4-m_3)(y-kx-b_3)R_1(x,y)+m_3(y-kx-b_5)T_1(x,y)]. \end{aligned} \tag{24}$$

Нетрудно видеть, что прямые l_3, l_4, l_5 являются изоклинами системы (24), вместе с тем это не изоклины нуля и не изоклины бесконечности. Кроме того, m_3, m_4, m_5 могут быть попарно различными, т.е. возможен способ 5) разбиения множества M. Теорема доказана.

Пример 3.

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= (y-x-1)(12+x-7y-3x^2+2xy+y^2), \\ \frac{dy}{dt} &= (y-x-2)(12+26x-7y+2x^2-3xy+y^2). \end{aligned} \tag{25}$$

Непосредственной проверкой убеждаемся в том, что кроме прямолинейных главных изоклин система (25) имеет еще три изоклины:

$$l_3 : y-x-3=0, \quad l_4 : y-x-4=0, \quad l_5 : y-x-5=0,$$

на которых индуцированы направления $m_3 = \dfrac{5}{3}$, $m_4 = 1$, $m_5 = \dfrac{3}{4}$ соответственно.

Итак, система (25) иллюстрирует способ 5) разбиения множества M пяти параллельных между собой прямых изоклин.

Теорема 3. Если система (1) имеет пять параллельных между собой прямых изоклин, на которых индуцированы попарно различные направления, то при наличии состояний равновесия эта система не имеет других прямых изоклин.

Доказательство. По теореме 1 число параллельных между собой прямых изоклин системы (1) не превышает пяти.

Допустим существование хотя бы одной прямой изоклины l системы (1). Эта прямая может принадлежать вместе только с одной из пяти параллельных между собой прямых изоклин одному и тому же подмножеству множества M всех прямых изоклин системы (1).

Следовательно, l пересекает не менее четырех прямых изоклин, принадлежащих четырем различным подмножествам множества M.

Согласно [1] система (1) имеет не менее четырех состояний равновесия на прямой l, что невозможно для кубичной системы. Теорема доказана.

Непосредственно из теоремы 3 следует:

Утверждение 1. Пусть кривые $P_3(x,y)=0$ и $Q_3(x,y)=0$ имеют общие точки и $(P_3,Q_3)=1$. Если в пучке кривых третьего порядка $Q_3(x,y)-mP_3(x,y)=0$ имеются пять кривых, распадающихся на прямую и неприводимую кривую второго порядка, чьи прямолинейные компоненты параллельны между собой, то в этом пучке нет других распадающихся кривых.

Утверждение 2. Если в условиях теоремы 2 множество M параллельных между собой прямых изоклин разбито способом 1), то система (1) имеет ровно шесть прямых изоклин и три состояния равновесия.

Доказательство. Если система (1) имеет пять параллельных между собой прямых изоклин так, что на трех из них индуцировано направление m_1, а на двух других – направление m_2 $(m_1 \neq m_2)$, то согласно [1]этой системе можно придать вид:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= (y-kx-b_1)(y-kx-b_2)(y-kx-b_3),\\ \frac{dy}{dt} &= (y-kx-b_4)(y-kx-b_5)(Ax+By+C).\end{aligned} \tag{26}$$

Так как система имеет хотя бы одну точку равновесия, то непременно изоклина нуля

$$Ax+By+C=0$$

пересекает все три изоклины бесконечности системы (26).

Предположим, что система (26) имеет, кроме главных изоклин прямую изоклину l. По теореме 1 l пересекает, по крайней мере, пять прямых изоклин, и система имеет не менее пяти точек покоя, что невозможно. Утверждение доказано.

Утверждение 3. Если в условиях теоремы 2 множество M пяти параллельных прямых изоклин разбито способом 2), то система (1) не имеет, кроме данных пяти прямых, ни одной прямой изоклины.

Доказательство. Пусть l - прямая изоклина системы (1), отличная от пяти данных прямых изоклин. Тогда по теореме 1 l пересекает все пять параллельных между собой прямых изоклин. При этом, быть может, прямая l с одной из прямых $l_4^{m_2}$ и $l_5^{m_3}$ принадлежит одному из подмножеств множества всех прямых изоклин системы (1).

Следовательно, на l система (1) имеет хотя бы четыре состояния равновесия, что неприемлемо для кубичной системы дифференциальных уравнений. Утверждение доказано.

Утверждение 4. Если в условиях теоремы 2 множество M пяти параллельных между собой прямых изоклин системы (1) разбито способом 3), то система (1) имеет ровно шесть прямых изоклин.

Доказательство. Согласно [1] систему (1) посредством подходящего линейного неособенного преобразования можно привести к виду (13). Прямая $l_0 : Ax + By + C = 0$ не совпадает ни с одной из параллельных изоклин бесконечности, так как система (13) не имела бы иначе особых точек. Следовательно, l_0 пересекает остальные пять параллельных между собой прямых изоклин и имеет три состояния равновесия, расположенных по одному на прямых изоклинах:

$$y - kx - b_3 = 0, \quad y - kx - b_4 = 0, \quad y - kx - b = 0.$$

Предположим, что система (13) имеет еще одну прямую изоклину L_1, отличную от уже отмеченных шести прямых изоклин.

По теореме 1 L_1 пересекает все пять параллельных между собой прямых изоклин. При этом на L_1 может быть индуцировано разве что направление, совпадающее с направлением, индуцированным на прямой $l_5^{m_3}$.

Значит система (13) имеет на прямой L_1 не менее четырех точек покоя. Полученное противоречие и доказывает утверждение.

Утверждение 5. Если в условиях теоремы 2 множество M всех параллельных между собой пяти прямых изоклин системы (1) разбито способом 4), то система имеет шесть прямых изоклин.

Доказательство. Система (1) может быть приведена к системе (19), причем прямая

$$(y - kx - b_5)(\alpha x + \beta y + \gamma) - (y - kx - b_4)(\alpha x + \beta y + \omega) = 0$$

по теореме 1 пересекает все пять прямых изоклин, в том числе прямые, принадлежащие трем одноэлементным подмножествам множества M.

Любая другая прямая изоклина, если бы существовала у системы (19), могла принадлежать разве что одному из подмножеств множества всех прямых изоклин наряду с одной из прямых $l_3^{m_2}$, $l_4^{m_3}$, $l_5^{m_4}$. На такой прямой изоклине система имела бы не менее четырех состояний равновесия, что недопустимо для кубичной системы. Утверждение доказано.

Для сравнения заметим, что квадратичная дифференциальная система при наличии у нее хотя бы одного состояния равновесия не может иметь более трех параллельных между собой прямых изоклин. Докажем это.

Предположим, что квадратичная дифференциальная система имеет более трех параллельных между собой прямых изоклин и хотя бы одну точку покоя.

Тогда, выбрав какие-нибудь четыре прямые изоклины из данных параллельных прямых изоклин, обозначим через M множество этих четырех прямых.

M может быть разбито на непустые непересекающиеся подмножества следующими способами:

a) $M = \{l_1^{m_1}, l_2^{m_1}\} \cup \{l_3^{m_2}, l_4^{m_2}\}$

b) $M = \{l_1^{m_1}, l_2^{m_1}\} \cup \{l_3^{m_2}\} \cup \{l_4^{m_3}\}$

c) $M = \bigcup_{i=1}^{4} \{l_i^{m_i}\}$, где все m_i - попарно различны.

В случае a) система дифференциальных уравнений с квадратичными правыми частями может быть приведена к виду [1]:

$$\frac{dx}{dt} = \alpha(y - kx - b_1)(y - kx - b_2), \quad \frac{dy}{dt} = \beta(y - kx - b_3)(y - kx - b_4),$$

где $\alpha, \beta \in R \setminus \{0\}$, все $b_i, i = \overline{1,4}$ - попарно различны.

Но последняя система не имеет особых точек, приходим к противоречию.

В случае b) квадратичная дифференциальная система может быть приведена к виду:

$$\frac{dx}{dt} = (y - kx - b_1)(y - kx - b_2), \quad \frac{dy}{dt} = (y - kx - b_3)(Ax + By + C).$$

Если последняя система имеет особые точки, то они лежат на изоклине нуля

$$Ax + By + C = 0,$$

которая пересекает три прямые изоклины, заведомо не являющиеся изоклинами нуля.

Согласно [1] это означает, что на прямой

$$Ax + By + C = 0$$

квадратичная система имеет не менее трех состояний равновесия. Это невозможно, ибо квадратичная система может иметь на прямой не более двух состояний равновесия.

Если имеет место случай c), то квадратичная система может быть записана в виде:

$$\frac{dx}{dt} = (y - kx - b_1)(Ax + By + C), \quad \frac{dy}{dt} = (y - kx - b_2)(Rx + Ny + K).$$

Если прямая $l : Ax + By + C = 0$ пересекает прямую $l_2 : y - kx - b_2 = 0$, то она пересекает остальные две параллельные прямые изоклины, не являющиеся изоклинами бесконечности. Это недопустимо, так как квадратичная система не имеет на прямой три состояния равновесия.

Таким образом, l параллельна всем четырем параллельным прямым изоклинам.

Отсюда делаем вывод, что l также не пересекает прямую $L : Rx + Ny + K = 0.$

В самом деле, если бы l и L пересекались, то L непременно пересекала бы все параллельные прямые изоклины, т.е. приходим к тому, что система снова не имеет особых точек.

Полученное противоречие доказывает невозможность разбиения M способом c), т.е. квадратичная система имеет не более трех параллельных между собой прямых изоклин.

Автор благодарен В.Б. Тлячеву и Д.С. Ушхо за постановку задачи и полезное обсуждение полученных результатов.

Примечания:

1. Ушхо Д.С. О прямых изоклинах кубической дифференциальной системы // Труды ФОРА. 2003. № 8. С. 7-21. URL: http://fora.adygnet.ru
2. Ушхо А.Д., Тлячев В.Б. Прямые изоклины полиномиальных дифференциальных систем на плоскости // Материалы международной конференции, посвященной 100-летию Н.Н. Боголюбова и 70-летию Н.И. Нагнибиды. Черновцы: Изд-во Черновицкого гос. ун-та, 2009. С. 215-217.

References:

1 Ushkho D.S. About straight lines isoclines of cubic differential system // Proc. FORA. 2003. No. 8. P. 7-21. URL: http://fora.adygnet.ru

2 Ushkho A.D. Straight lines isoclines of planar polynomial differential system // Materials of the international conference of N.N. Bogolyubov devoted to the 100 anniversary and N.I. Nagnibidy's 70 anniversary. Chernovtsy: Chernovitsky state university, 2009. P. 215-217.