УДК 530.1:51-72
ББК 22.311
С 40

В.А. Лямкин, Р.О. Резаев, А.Ю. Трифонов, А.В. Шаповалов

Система Эйнштейна-Эренфеста типа (*k*, 1) для нелинейного уравнения Фоккера-Планка*

(Рецензирована)

Аннотация

Для уравнения Фоккера-Планка в пространстве $\mathbf{R}^n$ *с переменными коэффициентами и нелокальной нелинейностью дано определение класса квазиклассических асимптотических решений, сосредоточенных на неполномерных многообразиях* Λ_t^k *пространства* $\mathbf{R}^n$, $k<n$. *Эволюцию моментов* m*-го порядка решения данного класса описывает динамическая система Эйнштейна-Эренфеста типа* (k,m), *представляющая собой эволюционную относительно времени* t *систему интегродифференциальных уравнений. Получена в явном виде система уравнений типа (k, 1), описывающая эволюцию многообразия* Λ_t^k. *Рассмотрены примеры систем типов (1,1) и (2,1) для уравнения Фоккера-Планка с оператором квадратичным относительно пространственных переменных и производных.*

Ключевые слова: *уравнение Фоккера-Планка, квазиклассическое приближение, неполномерные многообразия, система Эйнштейна-Эренфеста типа (k,m).*

V.A. Lyamkin, R.O. Rezaev, A.Yu. Trifonov, A.V. Shapovalov

Einstein-Ehrenfest system of (k, 1)-type for the nonlinear Fokker-Planck equation

Abstract

A definition of a class of the semiclassical approximation solutions concentrated on non half-number manifolds Λ_t^k *of space* $\mathbf{R}^n$, $k<n$ *is made for the Fokker-Planck equation in space* $\mathbf{R}^n$ *with variable coefficients and nonlocal nonlinearity. The evolution of m-order moments of a solution of this class is described by Einstein-Ehrenfest dynamic system of (k, m)-type, representing the evolutionary, relative to time t, system of integro-differential equations. The system of (k, 1)-type equations, featuring evolution of manifold* Λ_t^k *is obtained in an explicit form. The examples of systems of (1,1) and (2,1) types for the Fokker-Planck equation with an operator, quadratic relative to space variables and derivatives are considered.*

Key words: *the Fokker-Planck equation, semiclassical asymptotic approximation, non half-number manifolds, Einstein-Ehrenfest system of (k, m)-type.*

Введение

В статистических задачах, возникающих в различных областях физики, требуется учет флуктуационных эффектов. Математическое описание флуктуаций в нелинейных системах, состоящих из взаимодействующих подсистем, дается в теории случайных процессов [1, 2].

Эволюция непрерывного многомерного случайного процесса $\vec{x}(t)$ может быть описана стохастическим дифференциальным уравнением, в котором учитывается влияние регулярных и случайных воздействий на изменение во времени величины $\vec{x}(t)$. В

**Работа выполнена при частичной финансовой поддержке АВЦП Министерства образования и науки РФ № 8470; 2.1.1/3436; Федеральным агентством по науке и инновациям России по контракту № 02.740.11.0238; гранта Президента РФ НШ-871.2008.2.*

основе стохастического дифференциального уравнения лежит понятие стохастического интеграла. Общеприняты и наиболее разработаны трактовки стохастического интеграла в смысле Ито [3] и в смысле Стратоновича [4, 5]. В конкретных задачах анализ моделей, использующих формализм стохастических уравнений, наиболее удобно проводить методами численного интегрирования. Аналитические методы непосредственно к таким моделям, как правило, не применяются. Математически эквивалентным является описание стохастического процесса $\vec{x}(t)$ с помощью функции плотности распределения вероятностей $u(\vec{x},t)$ случайной величины $\vec{x}$ $(\in \mathbf{R}^n)$ в момент времени t. Эволюция функции $u(\vec{x},t)$ описывается уравнением Фоккера-Планка (ФП) [2, 6], для которого методы построения точных и приближенных решений в аналитической форме разрабатывались в теории дифференциальных уравнений. Стохастические процессы с нелинейной обратной связью также могут описываться уравнением ФП, однако в этом случае в уравнение ФП включаются нелинейные слагаемые [7]. Методы точного интегрирования нелинейного уравнения ФП с переменными коэффициентами малоэффективны, т.к. позволяют найти точные решения лишь в исключительных частных случаях, имеющих ограниченные физические приложения [8]. Исследования нелинейного уравнения ФП проводились в основном численно (см., например, [9-17]).

В приближении слабой диффузии асимптотические по малому параметру решения могут быть построены квазиклассическим методом [18-25] для многомерного уравнения ФП с малым параметром при производных и переменными коэффициентами как в линейном, так и в нелинейном случаях с различными типами нелинейности [8]. Нетривиальные приближенные решения строятся в специально подобранном классе функций, сингулярно зависящих от асимптотического малого параметра. Определение данного класса функций является ключевым моментом в применении метода квазиклассических асимптотик для конкретного уравнения. Метод квазиклассических асимптотик позволяет дать оценку точности построенных асимптотических решений. Другим достоинством метода является то, что на его основе в рамках общего подхода удается исследовать различные эволюционные уравнения, существенно отличающиеся по своей математической структуре.

Опишем кратко общую схему квазиклассического метода. Квазиклассическое приближение в качестве необходимого элемента включает в себя построение вспомогательной характеристической динамической системы, описывающей эволюцию моментов функции распределения $u(\vec{x},t)$. Эту динамическую систему называют «классической» по отношению к исходному уравнению с частными производными, в нашем случае к нелинейному уравнению ФП. Термин «классический» заимствован из квантовой механики и указывает на аналогию взаимосвязи между квантовомеханическим (линейным) уравнением Шредингера и соответствующими ему уравнениями классической механики [26].

В фазовом пространстве характеристической динамической системы задаются k-мерные многообразия Λ_0^k, $k<n$. Динамическую систему моментов назовем системой типа (k,m), где k — размерность многообразия, а m — порядок учитываемых моментов. С этой точки зрения система Власова-Гамильтона [23-25] является системой класса $(n,1)$, а системы Гамильтона-Эренфеста (СГЭ) [27-29] порядка m имеют тип $(0,m)$. Под действием фазовых потоков g^t характеристической динамической системы начальное многообразие Λ_0^k эволюционирует вместе с заданными на нем функциями. Многообразие $\Lambda_t^k = g^t \Lambda_0^k$ неполномерно вследствие неравенства $k<n$ и является областью локализации функционального класса, которому принадлежат квазиклассические асимптотики. Проекцию функций, заданных на многообразиях Λ_t^k, на пространство

асимптотических по малому параметру решений исходного уравнения с частными производными в каждый момент времени t позволяет найти канонический оператор Маслова [19-20].

Задача построения такой «классической» динамической системы для нелинейных уравнений математической физики заведомо нетривиальна, поскольку оператор нелинейного уравнения зависит от решения уравнения и, следовательно, не имеет естественного «классического» аналога в традиционном квантовомеханическом смысле. В отличие от линейных уравнений, где всегда можно предположить, что характеристическая динамическая система связана с символом оператора уравнения, для нелинейных уравнений априори неизвестна какая-либо динамическая система, которую можно рассматривать в качестве кандидата характеристической системы, отвечающей в некотором смысле нелинейному уравнению.

В настоящей работе дано определение решений нелокального уравнения ФП, квазиклассически локализованных на неполномерных многообразиях Λ_t^k. Получена классическая динамическая система интегродифференциальных уравнений типа $(k,1)$, $k < n$, описывающая эволюцию многообразий Λ_t^k. В качестве примера для $n=3$ рассмотрены системы типов (1,1) и (2,1) для уравнения ФП с оператором квадратичным по независимым переменным и частным производным.

1. Система моментов для уравнения Фоккера-Планка с потенциалами общего вида

Запишем многомерное уравнение Фоккера-Планка с квадратичной нелокальной нелинейностью,

$$u_t = D\Delta u + (\nabla u, [V_{\vec{x}}(\vec{x},t) + \kappa \int\limits_{\mathbf{R}^n} W_{\vec{x}}(\vec{x},\vec{y},t)u(\vec{y},t)\,d\,\vec{y}]). \tag{1}$$

Здесь $\vec{x} \in \mathbf{R}^n$, $t \geq 0$ — время, κ — вещественный параметр нелинейности, а величины $V(\vec{x},t)$, $W(\vec{x},\vec{y},t)$ — бесконечно гладкие по всем своим переменным функции, которые при $|\vec{x}| \to \infty$ и $|\vec{y}| \to \infty$ растут вместе со всеми своими производными не быстрее, чем полином. Функция $V(\vec{x},t)$ имеет смысл потенциала регулярной силы, действующей на систему, а функция $W(\vec{x},\vec{y},t)$ характеризует внутреннее взаимодействие элементов системы [7].

В пространстве $\mathbf{R}^n$ зададим k-мерное многообразие Λ_t^k, $k < n$, системой уравнений $\vec{x} = \vec{X}(t,s)$, где $\vec{X}(t,s)$ — заданные функции, гладко зависящие от своих переменных, $s \in G \subset \mathbf{R}^k$. Функцию $\varphi(\vec{x},t)$ назовем квазиклассически сосредоточенной на поверхности Λ_t^k, если для любой бесконечно гладкой функции $A(\vec{x},t)$ справедливо

$$\lim_{D\to 0}\langle A\rangle = \int\limits_{\mathbf{G}} A\left(\vec{X}(t,s),t\right)d\,s. \tag{2}$$

Здесь обозначено

$$\langle A\rangle = A(t,D) = \int\limits_{\mathbf{R}^n} A(\vec{x},t)\,\varphi(\vec{x},t)d\,\vec{x}. \tag{3}$$

Класс функций квазиклассически сосредоточенных на поверхности Λ_t^k обозначим $J_D^k\left(\vec{X}(t,s)\right)$. Решение уравнения (1) будем искать в классе функций $J_D^k\left(\vec{X}(t,s)\right)$.

Отметим, что на функциях класса $J_D^k\left(\vec{X}(t,s)\right)$ справедливо

$$\lim_{|\vec{x}|\to\infty} \frac{\partial^{|\alpha|} u(\vec{x},t)}{\partial \left|\vec{x}^{\alpha}\right|} = 0\,, \tag{4}$$

где $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ — мультииндекс, $|\alpha| = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j$, $\partial\left|\vec{x}^{\alpha}\right| = \prod_{j=1}^{n} \partial x_j^{\alpha_j}$.

Обозначим

$$\sigma(t) = \int_{\mathbf{R}^n} u(\vec{x},\, t)\; d\,\vec{x}. \tag{5}$$

Продифференцируем соотношение (5) по переменной t и подставим производную $u_t(\vec{x},t)$ из уравнения (1), получим

$$\dot{\sigma} = \int_{\mathbf{R}^n} (D\Delta u + (\nabla u, [V_{\vec{x}}(\vec{x},t) + \kappa \int_{\mathbf{R}^n} W_{\vec{x}}(\vec{x},\vec{y},t)\, u(\vec{y},t)\, d\vec{y}]))d\,\vec{x}.$$

Из теоремы Гаусса и (4) следует, что интеграл в правой части полученного равенства равен нулю и, следовательно, $\sigma(t) = \sigma(0)$.

Выберем в качестве $A(\vec{x},t)$ в (3) вектор $\vec{x}$, а в качестве $\varphi(\vec{x},t)$ возьмем решение $u(\vec{x},t)$ уравнения (1) из класса $J_D^k\left(\vec{X}(t,s)\right)$. Тогда уравнение (3) примет вид

$$\left\langle \vec{x} \right\rangle = \vec{X}(t,D) = \int_{\mathbf{R}^n} \vec{x}\, u(\vec{x},t) d\,\vec{x}\,. \tag{6}$$

Продифференцируем (6) по t и учтем уравнение ФП (1), тогда получим

$$\frac{d}{d\,t}\left\langle \vec{x} \right\rangle = -\left\langle V_{\vec{x}}(\vec{x},t) + \kappa \int_{\mathbf{R}^n} W_{\vec{x}}(\vec{x},\vec{y},t)\, u(\vec{y},t)\, d\,\vec{y} \right\rangle. \tag{7}$$

Переход в (7) к пределу $D \to 0$ с учетом (2) дает

$$\frac{d}{d\,t}\int_G \vec{X}(t,s)\, ds = -\int_G V_{\vec{x}}(\vec{X}(t,s),t)\, ds - \kappa \int_G ds \int_G W_{\vec{x}}(\vec{X}(t,s), \vec{X}(t,p),t)\, dp\,. \tag{8}$$

Приравняв подынтегральные выражения, получим следующую систему интегро-дифференциальных уравнений:

$$\frac{d}{d\,t}\vec{X} = -V_{\vec{x}}(\vec{X}(t,s),t) - \kappa \int_G dp\, W_{\vec{x}}(\vec{X}(t,s), \vec{X}(t,p),t)\,. \tag{9}$$

Систему (9) будем называть системой Эйнштейна-Эренфеста типа $(k,1)$. Начальное условие

$$\vec{X}(t,s)\Big|_{t=0} = \vec{X}_0(s)\,,\; s \in G \tag{10}$$

определяет задачу Коши для системы (9).

2. Уравнение Фоккера-Планка с квадратичными потенциалами

Рассмотрим систему Эйнштейна-Эренфеста для уравнения ФП с потенциалами $V(\vec{x},t)$ и $W(\vec{x},\vec{y},t)$ в виде квадратичных функций координат

$$V(\vec{x},t) = \frac{1}{2}(\vec{x}, A\vec{x})\,,\;\; W(\vec{x},\vec{y},t) = \left\langle \vec{x}, B\vec{y} \right\rangle. \tag{11}$$

Подставим в уравнение (9) выражения (11) и, обозначив $\vec{X}(t,s) = \vec{Z}(t,s) \in \mathbf{R}^3$, $s \in G \subset \mathbf{R}^k$, $k < 3$, приведем систему Эйнштейна-Эренфеста (9) для уравнения (1) с учетом (11) к виду

$$\dot{\vec{Z}}(t,s)=A\vec{Z}(t,s)+B\int_G \vec{Z}(t,s')ds'. \quad (12)$$

Начальные условия (10) для системы (12) принимают вид

$$\vec{Z}(t,s)\Big|_{t=0}=\vec{Z}_0(s)=\left(X_0(s),Y_0(s),Z_0(s)\right)^{\mathrm{T}},\quad s\in G\subset\mathbf{R}^k. \quad (13)$$

Проинтегрируем уравнение (12), получим

$$\frac{d}{d\,t}\int_G \vec{Z}(t,s)\,ds=A\int_G \vec{Z}(t,s)\,ds+B\int_G d\,s\int_G \vec{Z}(t,s')\,ds'. \quad (14)$$

Обозначим

$$\vec{z}_k^{\,c}(t)=\int_G \vec{Z}(t,s')\,ds', \quad (15)$$

где $k=\dim G$. Тогда из (14) найдем

$$\dot{\vec{z}}_k^{\,c}(t)=A\,\vec{z}_k^{\,c}(t)+\alpha\,B\;\vec{z}_k^{\,c}(t)=(A+\alpha\,B)\,\vec{z}_k^{\,c}(t),$$

где $\alpha=\int_G ds$. Для простоты выберем параметризацию s области G так, чтобы $\alpha=1$, тогда

$$\dot{\vec{z}}_k^{\,c}(t)=(A+B)\,\vec{z}_k^{\,c}(t). \quad (16)$$

Решение системы (16) дается формальным выражением

$$\vec{z}_k^{\,c}(t)=e^{(A+B)\,t}\;\vec{z}_k^{\,c}(0),\ \text{где}\ \vec{z}_k^{\,c}(0)=\int_G \vec{Z}_0(s)\,d\,s. \quad (17)$$

С помощью (17) систему Эйнштейна-Эренфеста (12) приведем к линейной неоднородной системе следующего вида:

$$\dot{\vec{Z}}(t,s)=A\,\vec{Z}(t,s)+B\,\vec{z}_k^{\,c}(t)=A\,\vec{Z}(t,s)+\vec{f}(t)\ ,\ \ \vec{f}(t)=B\,\vec{z}_k^{\,c}(t). \quad (18)$$

Решение однородного уравнения

$$\dot{\tilde{\vec{Z}}}(t,s)=A\tilde{\vec{Z}}(t,s)$$

запишем с помощью матрицианта $U(t)$ системы (18),

$$\tilde{\vec{Z}}(t,s)=U(t)\vec{Z}_0(s). \quad (19)$$

Матрициант $U(t)$ определяется задачей Коши

$$\dot{U}(t)=AU(t),\ U(0)=1, \quad (20)$$

формальное решение которой дается выражением

$$U(t)=e^{At}. \quad (21)$$

Представим частное решение неоднородной системы (18) в виде

$$\vec{Z}(t)=U(t)\,\vec{v}(t), \quad (22)$$

тогда из (18), (20) получим

$$\dot{\vec{v}}(t)=U^{-1}(t)\;\vec{f}\,(t),$$

откуда

$$\vec{v}(t)=\int_0^t U^{-1}(\xi)\,\vec{f}\,(\xi)\,d\xi. \quad (23)$$

Объединив (19), (22), (23), найдем решение задачи Коши (18), (13)

$$\vec{Z}(t,s)=U(t)\vec{Z}_{\,0}(s)+\int_0^t U(t)U^{-1}(\xi)\,\vec{f}\,(\xi)d\xi. \quad (24)$$

С помощью (21) решение (24) примет вид

$$\vec{Z}(t,s)=e^{At}\,\vec{Z}_{0}(s)+\int_0^t e^{A(t-\xi)}\vec{f}(\xi)d\xi\,.$$

Подставим из (17), (18) явный вид вектора $\vec{f}(t)$, получим

$$\vec{Z}(t,s)=e^{At}\,\vec{Z}_0(s)+\int_0^t d\xi\, e^{A(t-\xi)}B\,e^{(A+B)\xi}\int_G \vec{Z}_0(s)\,ds\ . \tag{25}$$

3. Пример

Проиллюстрируем влияние размерности носителя решения уравнения (1) на эволюцию объектов в фазовом пространстве, определяемую соотношением (25). Для этого рассмотрим решения уравнения (1), локализованные на многообразиях Λ_t^k при $k=1,2$. В качестве начального многообразия Λ_0^1 выберем окружность, заданную уравнением

$$\Lambda_0^1=\left\{\vec{z}\,\middle|\,\vec{z}=\vec{Z}(0,s)=\left(\cos s,\sin s,0\right)^{\mathrm{T}},\ s\in[0,2\pi]\right\}, \tag{26}$$

а в качестве Λ_0^2 – полусферу:

$$\Lambda_0^2=\left\{\vec{z}\,\middle|\,\vec{z}=\vec{Z}(0,s_1,s_2)=\left(\cos s_1\sin s_2,\sin s_1\sin s_2,\cos s_2\right)^{\mathrm{T}},\ s_1\in[0,2\pi],\ s_2\in[0,\frac{\pi}{2}]\right\}. \tag{27}$$

В этом случае соотношение (15) примет вид

$$\vec{z}_1^{\,c}(0)=\int_0^{2\pi}\vec{Z}(0,s)ds=\left(0,0,0\right)^{\mathrm{T}},\qquad \vec{z}_2^{\,c}(0)=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\vec{Z}(0,s_1,s_2)ds_1ds_2=\left(0,0,1\right)^{\mathrm{T}}. \tag{28}$$

Матрицы A и B в соотношении (11) выберем в виде

$$A=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}3&0&-3\\-7&2&7\\5&-1&-5\end{pmatrix}. \tag{29}$$

Собственные значения матрицы B являются чисто мнимыми

$$\lambda_1=\sqrt{3}i,\qquad \lambda_2=-\sqrt{3}i,\qquad \lambda_3=0.$$

Предложенный в (29) выбор матриц A и B позволят наглядно проиллюстрировать влияние размерности многообразия на его динамику. Для этого на многообразии Λ_0^2 выберем замкнутую кривую (будем обозначать ее Γ_0) таким образом, что в момент времени t=0, кривая Γ_0 совпадает с кривой Λ_0^1, определяемой соотношением (26) (см. рис. 1). Эволюции кривых Λ_0^1 и Γ_0 представлены на рис. 2 - 9. Кривая Λ_t^1 является стационарной, то есть $\Lambda_t^1=\Lambda_0^1$ (на рис. 2 – 9 кривая Λ_t^1 изображена пунктиром), поскольку в выражении (25) вектор $\vec{z}_1^{\,c}(0)$ и матрица A являются нулевыми согласно (28) и (29). В то же время, эволюция кривой Γ_0 определяется как матрицей A, так и матрицей B (поскольку вектор $\vec{z}_2^{\,c}(0)$ ненулевой), следовательно, кривая Γ_t не является стационарной. Характер эволюции кривой Γ_t в рассматриваемом случае определяется собственными числами матрицы B, которые могут быть вещественными или комплексными. Собственные числа матрицы B (29) являются чисто мнимыми, поэтому кривая Γ_t изменяется во времени периодически (на рис. 10 пунктиром показано движение геометрического центра кривой Γ_t).

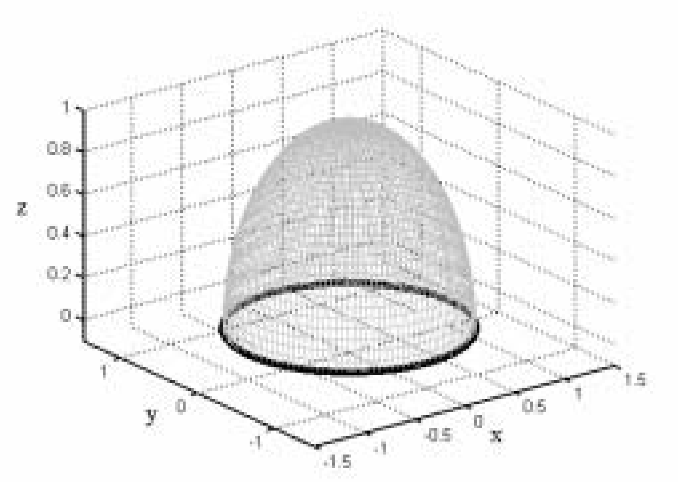

Рис. 1. Кривая Γ_0, выделенная на полусфере, совпадает с кривой Λ_0^1 (кривая изображена сплошной линией в основании полусферы)

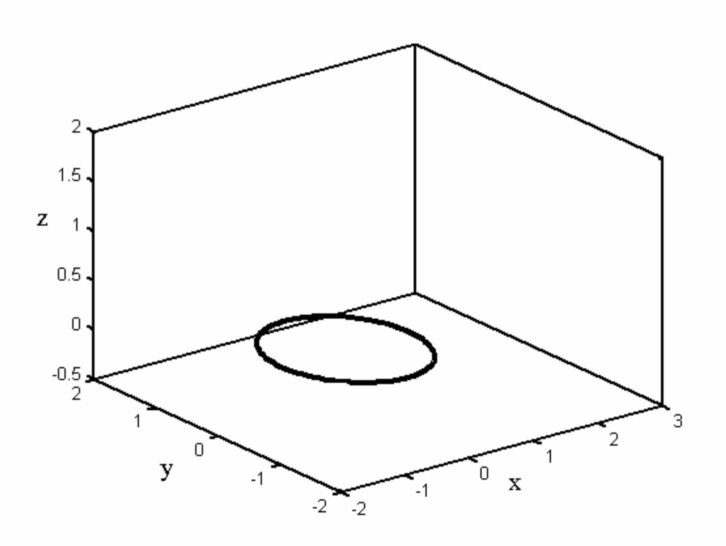

Рис. 2. Кривые Λ_t^1 и Γ_t в момент времени t=0 совпадают

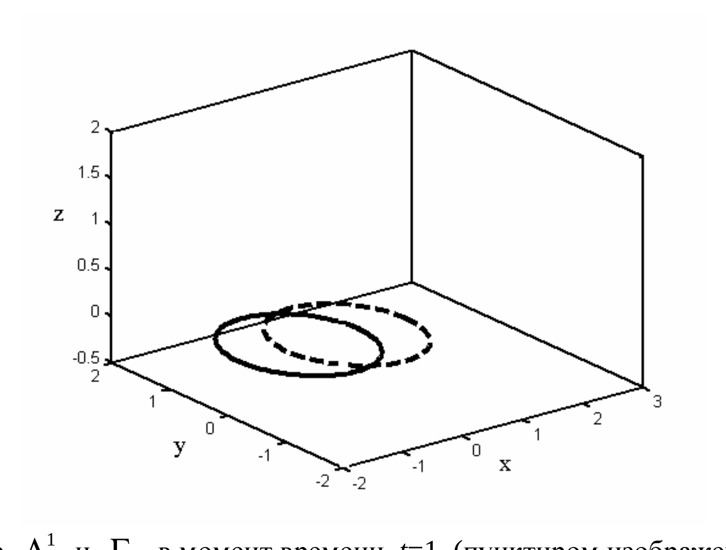

Рис. 3. Кривые Λ_t^1 и Γ_t в момент времени t=1 (пунктиром изображена кривая Λ_t^1)

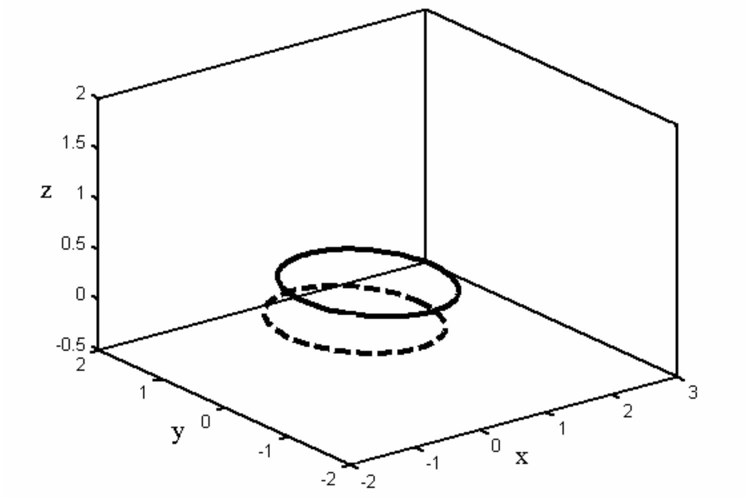

Рис. 4. Кривые Λ_t^1 и Γ_t в момент времени t=1,5 (пунктиром изображена кривая Λ_t^1)

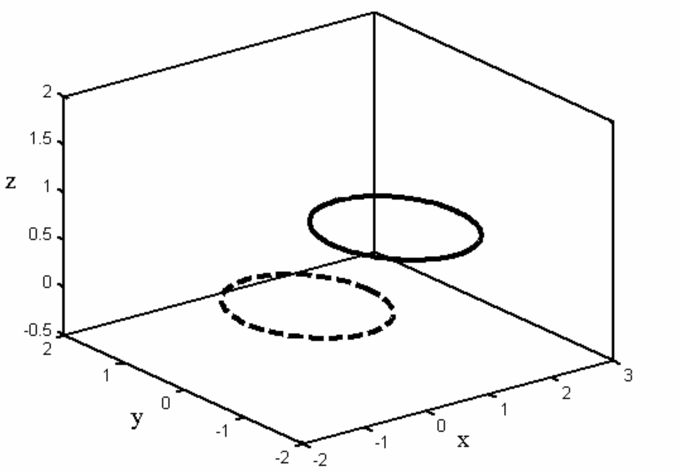

Рис. 5. Кривые Λ_t^1 и Γ_t в момент времени t=2 (пунктиром изображена кривая Λ_t^1)

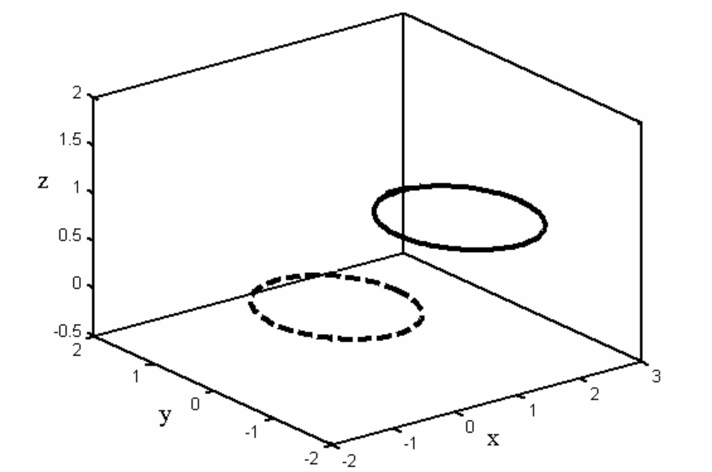

Рис. 6. Кривые Λ_t^1 и Γ_t в момент времени t=2,5 (пунктиром изображена кривая Λ_t^1)

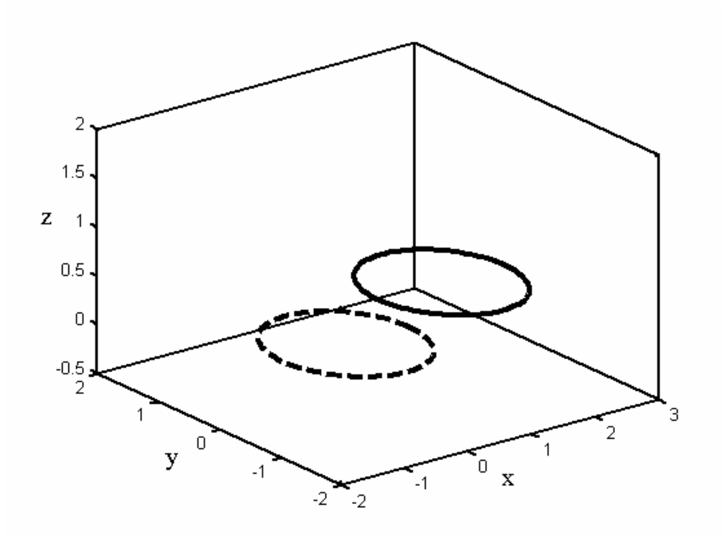

Рис. 7. Кривые Λ_t^1 и Γ_t в момент времени t=3 (пунктиром изображена кривая Λ_t^1)

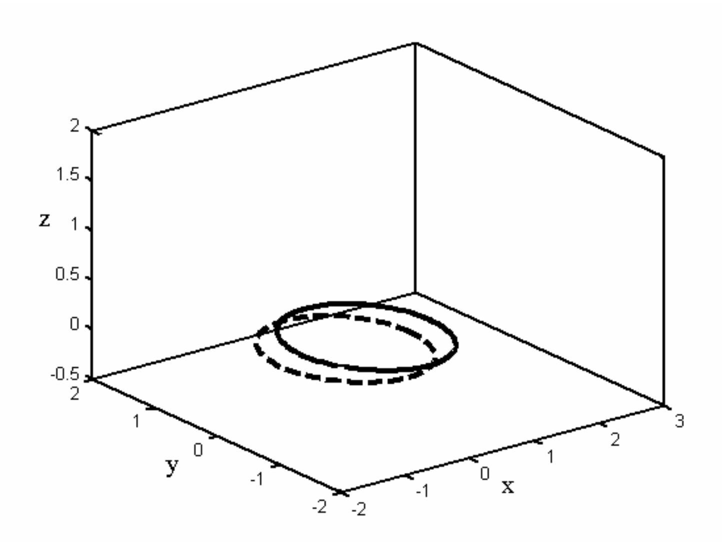

Рис. 8. Кривые Λ_t^1 и Γ_t в момент времени t=3,5 (пунктиром изображена кривая Λ_t^1)

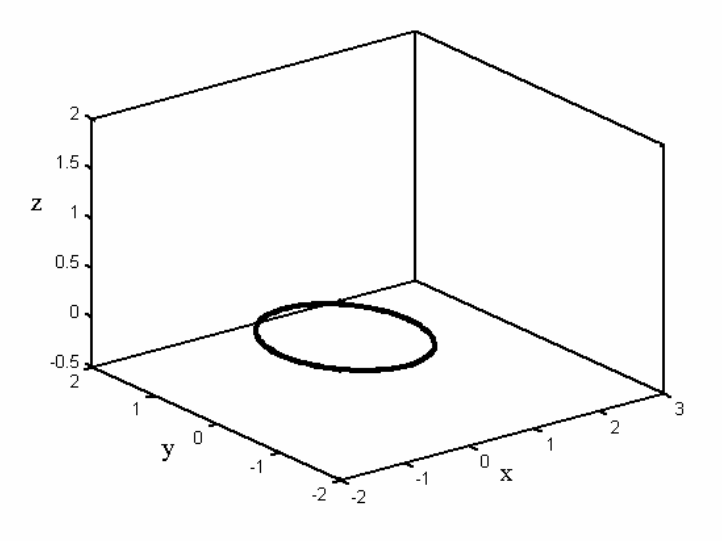

Рис. 9. Кривые Λ_t^1 и Γ_t в момент времени t=3,63 совпадают: прошел один цикл

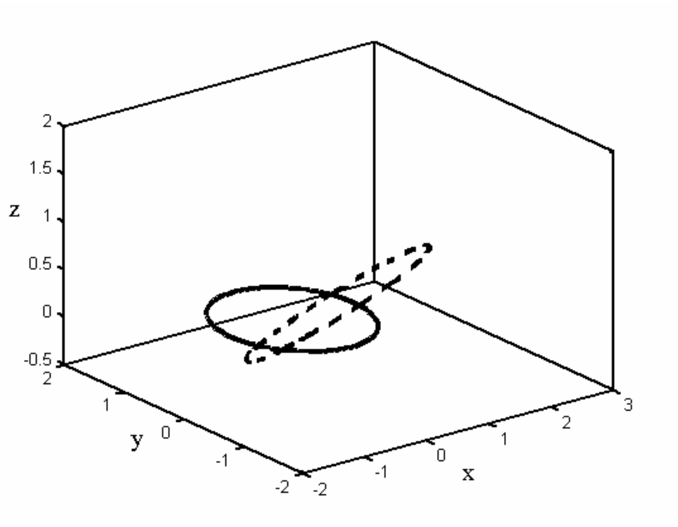

Рис. 10. Сплошной линией изображена кривая Γ_0,
пунктиром – движение геометрического центра кривой Γ_t

Таким образом, данный пример показывает, что эволюция одной и той же кривой различна в зависимости от размерности начального многообразия, которому она принадлежит. Это различие определяется нелинейным слагаемым в уравнении (1), которое пропорционально параметру κ (в данном примере $\kappa = 0{,}25$).

Заключение

В работе получена динамическая система Эйнштейна-Эренфеста, позволяющая изучать некоторые свойства нелинейного уравнения Фоккера-Планка без явного построения решений уравнения. Это особенно важно, поскольку не известны общие методы построения решений нелинейного уравнения ФП в многомерном пространстве с внешними полями. Существование стационарных решений динамической системы Эйнштейна-Эренфеста связано с существованием стационарных решений уравнения ФП. Полученная нелокальная динамическая СГЭ типа $(k,1)$, $k>0$ описывает эволюцию объектов, распределенных в фазовом пространстве. Исследование таких объектов представляет самостоятельный интерес в различных задачах.

Примечания:

1. Гихман И.И., Скороход А.В. Введение в теорию случайных процессов. М.: Наука, 1965. 160 с.
2. Евланов Л.Г., Константинов В.М. Системы со случайными параметрами. М.: Наука, 1976. 568 с.
3. Ито К., Маккин Г. Диффузионные процессы и их траектории. М.: Иностр. лит., 1968. 354 с.
4. Стратонович Р.А. Избранные вопросы теории флюктуаций в радиотехнике. М.: Сов. радио, 1961. 558 с.

References:

1. Gihman I.I., Skorokhod A.V. Introduction in the theory of casual processes. M.: Nauka, 1965. 160 pp.
2. Evlanov L.G., Konstantinov V.M. Sistems with casual parametres. M.: Nauka, 1976. 568 pp.
3. Ito K., Makkin G. Diffusion processes and their trajectories. M.: Inostr. Lit., 1968. 354 pp.
4. Stratonovich R.A. The selected questions of the theory of fluctuations in a radio engineering. M.: Sov. Radio, 1961. 558 pp.

5. Гихман И.И., Скороход А.В. Стохастические дифференциальные уравнения. Киев: Наукова думка, 1968. 354 с.
6. Risken H. The Fokker-Planck equation: Methods of Solution and Applications. N.Y.: Springer, 1989. 472 p.
7. Frank D. Nonlinear Fokker-Plank equations. Fundamentals and applications. N.Y.; L.: Springer: Verlag, 2005. 407 p.
8. Shapovalov A.V., Trifonov A.Yu., Masalova E.A. Nonlinear Fokker-Planck Equation in the Model of Asset Returns Sym // Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications. 2008. Vol. 4, № 038. P. 1-10.
9. Shiino M. Free energies based on generalized entropies and H-theorems for nonlinear Fokker-Planck equations // J. Math. Phys. 2001. Vol. 42. P. 2540-2553.
10. Drozdov A.N., Morillo M. Validity of basic concept in nonlinear cooperative Fokker-Planck models // Phys. Rev. E. 1996. Vol. 54. P. 3304-3313.
11. Martinez S., Plastino A.R., Plastino A. Nonlinear Fokker-Planck equations and generalized entropies // Physica A. 1998. Vol. 259. P. 183-192.
12. Frank T.D., Daffertshofer A. Exact time-dependent solutions of the Renyi Fokker-Planck equations and Fokker-Planck equations related to the entropies proposed by Sharma and Mittal // Physica A. 2000. Vol. 285. P. 129-144.
13. Frank T.D., Daffertshofer A. Multivariate nonlinear Fokker-Planck equations and generalized thermostatistics // Physica A. 2001. Vol. 292. P. 392-410.
14. Frank T.D., Daffertshofer A. H-theorem for nonlinear Fokker-Planck equations related to generalized thermostatistics // Physica A. 2001. Vol. 295. P. 455-474.
15. Kaniadakis G. Non Linear Kinetics underlying Generalized Staistics // Physica A. 2001. Vol. 296. P. 405-425.
16. Pedron I.T., Mendes R.S., Malacurne L.C. N-dimetional nonlinear Fokker-Planck equation whith time-dependent coefficient // Phys. Rev. E. 2002. Vol. 65. Iss. 5.
17. Frank T.D. A note on the Markov property of stochastic process described by nonlinear Fokker-Planck equations // Physica A. 2003. Vol. 320. P. 204-210.
18. Маслов В.П. Теория возмущения и асимптотические методы. М.: Изд-во МГУ, 1965. 549 с.

5. Gihman I.I., Skorokhod A.V. The differential equations. Kiev: Naukova dumka, 1968. 354 pp.
6. Risken H. The Fokker-Planck equation: Methods of Solution and Applications. N.Y.: Springer, 1989. 472 p.
7. Frank D. Nonlinear Fokker-Plank equations. Fundamentals and applications. N.Y.; L.: Springer: Verlag, 2005. 407 pp.
8. Shapovalov A.V., Trifonov A.Yu., Masalova E.A. Nonlinear Fokker-Planck Equation in the Model of Asset Returns Sym // Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications. 2008. Vol. 4, No. 038. P. 1-10.
9. Shiino M. Free energies based on generalised entropies and H-theorems for nonlinear Fokker-Planck equations // J. Math. Phys. 2001. Vol. 42. P. 2540-2553.
10. Drozdov A.N., Morillo M. Validity of basic concept in nonlinear co-operative Fokker-Planck models // Phys. Rev. E. 1996. Vol. 54. P. 3304-3313.
11. Martinez S., Plastino A.R., Plastino A. Nonlinear Fokker-Planck equations and generalised entropies // Physica A. 1998. Vol. 259. P. 183-192.
12. Frank T.D., Daffertshofer A. Exact time-dependent solutions of the Renyi Fokker-Planck equations and Fokker-Planck equations related to the entropies proposed by Sharma and Mittal // Physica A. 2000. Vol. 285. P. 129-144.
13. Frank T.D., Daffertshofer A. Multivariate nonlinear Fokker-Planck equations and generalised thermostatistics // Physica A. 2001. Vol. 292. P. 392-410.
14. Frank T.D., Daffertshofer A. H-theorem for nonlinear Fokker-Planck equations related to generalised thermostatistics // Physica A. 2001. Vol. 295. P. 455-474.
15. Kaniadakis G. Non Linear Kinetics underlying Generalized Staistics // Physica A. 2001. Vol. 296. P. 405-425.
16. Pedron I.T., Mendes R.S., Malacurne L.C. N-dimetional nonlinear Fokker-Planck equation whith time-dependent coefficient // Phys. Rev. E. 2002. Vol. 65. Iss. 5.
17. Frank T.D. A note on the Markov property of stochastic process described by nonlinear Fokker-Planck equations // Physica A. 2003. Vol. 320. P. 204-210.
18. Maslov V.P. Excitation theory and asymptotic methods. M.: Moscow State University Publishing House, 1965. 549 pp.

19. Маслов В.П. Операторные методы. М.: Наука, 1973. 544 с.
20. Маслов В.П., Федорюк М.В. Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики. М.: Наука, 1976.
21. Маслов В.П. Асимптотические методы и теория возмущения. М.: Наука, 1988. 312 с.
22. Маслов В.П. Комплексный метод ВКБ в нелинейных уравнениях. М.: Наука, 1977. 384 с.
23. Маслов В.П. Комплексные марковские цепи и континуальный интеграл Фейнмана. М.: Наука, 1976. 192 с.
24. Маслов В.П. Уравнения самосогласованного поля // Современные проблемы математики. 1978. Т.11. С. 153-234.
25. Маслов В.П. Квантование термодинамики и ультравторичное квантование. М.: Изд-во ИКИ, 2001. 384 с.
26. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Квантовая механика. М.: Наука, 1974. 752 с.
27. Bagrov V.G., Belov V.V., Trifonov A.Yu. Semiclassical trajectory-coherent approximation in quantum mechanics: I. High order corrections to multidimensional time-dependent equations of Schrodinger type // Ann. of Phys. 1996. Vol. 246, № 2. P. 231-280.
28. Belov V.V., Shapovalov A.V., Trifonov A.Yu. The Trajectory-Coherent Approximation and the System of Moments for the Hartree Type Equation // J. Math. and Math. Scien. 2002. Vol. 32, № 6. P. 325-370.
29. Белов В.В., Трифонов А.Ю., Шаповалов А.В Квазиклассическое траекторно-когерентное приближение для уравнения типа Хартри // Теор. Мат. Физ. 2002. Т.130, № 3. С. 460-492.

19. Maslov V.P. Operator methods. M.: Nauka, 1973. 544 pp.
20. Maslov V.P., Fedoryuk M.V. Semiclassical approximation for the equations of quantum mechanics. M.: Nauka, 1976.
21. Maslov V.P. Asymptotic methods and the excitation theory. M.: Nauka, 1988. 312 pp.
22. Maslov V.P. Complex method of phase integrals (method VKB) in the nonlinear equations. M.: Nauka, 1977. 384 pp.
23. Maslov V.P. Complex Markov chains and continual integral of Feynman. M.: Nauka, 1976. 192 pp.
24. Maslov V.P. The equations of the self-coordinated field // Modern problems of mathematics. 1978. Vol.11. P. 153-234.
25. Maslov V.P. Quantization of thermodynamics and ultrasecondary quantization. M.: IKI Publishing House, 2001. 384 pp.
26. Landau L.D., Lifshits E.M. The quantum mechanics. M.: Nauka, 1974. 752 pp.
27. Bagrov V.G., Belov V.V., Trifonov A.Yu. Semiclassical trajectory-coherent approximation in quantum mechanics I. High order corrections to multidimensional time-dependent equations of Schrodinger type // Ann. of Phys. 1996. Vol. 246, No. 2. P. 231-280.
28. Belov V.V., Shapovalov A.V., Trifonov A.Yu. The Trajectory-Coherent Approximation and the System of Moments for the Hartree Type Equation // J. Math. and Math. Scien. 2002. Vol. 32, No. 6. P. 325-370.
29. Belov V.V., Trifonov A.Yu., Shapovalov A.V. Quasiclassical trajectory-coherent approximation for the equation of Hartree type // Theory of Mat. Phys. 2002. Vol.130, No. 3. P. 460-492.