

УДК 532
ББК 22.253.31/32
М 18

Н.В. Малай, Н.Н. Миронова

**Нахождение приближенных аналитических решений
линеаризованного по скорости уравнения Навье-Стокса
в сферoidalной системе координат
(Рецензирована)**

Аннотация

Получено решение линеаризованного по скорости уравнения Навье-Стокса в сферoidalной системе координат со степенным видом зависимости коэффициента динамической вязкости от температуры.

Ключевые слова: обтекание, сфероид, уравнение Навье-Стокса.

N.V. Malay, N.N. Mironova

**Finding the approximated analytical solutions
of the Navier-Stokes equation in a spheroidal coordinate system**

Abstract

The solution of the Navier-Stokes equation in a spheroidal coordinate system with a power kind of dependence of dynamic viscosity factor upon temperature has been obtained.

Key words: a flow, a spheroid, the Navier-Stokes equation.

Уравнения Навье-Стокса – это система дифференциальных уравнений в частных производных, описывающих движение вязкой ньютоновской жидкости. Система состоит из уравнения движения и уравнения непрерывности. Уравнение Навье-Стокса является одним из важнейших в гидро- и газовой динамике и применяется для описания многих природных явлений и технических задач [1-3]. Эти уравнения имеют и большой интерес с точки зрения математики. В частности, весьма важны доказательства существования глобального гладкого решения задачи Коши для трехмерных уравнений Навье-Стокса, нахождение общего аналитического решения системы Навье-Стокса для пространственного или плоского потока и т.д. До сих пор решения этих уравнений найдены лишь для некоторых частных случаев [1-3]. При описании движения частиц в разнотемпературных каналах, при зондировании атмосферы лазерным излучением и т.п. средняя температура поверхности частиц может существенно отличаться от температуры окружающей среды вдали от них. В этом случае система уравнений Навье-Стокса решается совместно с уравнениями тепло- и массопереноса. Это вызвано тем, что коэффициенты молекулярного переноса (вязкости, теплопроводности и диффузии) уже нельзя считать постоянными величинами. В результате мы получаем довольно сложную краевую задачу.

При решении многих прикладных задач газовой динамики, как правило, их рассматривают в системе координат, связанной с центром масс частицы. В этом случае задача по существу сводится к задаче обтекания неподвижной частицы плоскопараллельным потоком газа со скоростью, равной по величине и направленной в противоположную сторону характерной скорости задачи. Таким образом, при математическом описании движения нагретых частиц в вязкой неизотермической газообразной среде природа сил, вызывающих это движение, нас интересовать не будет. Она может быть магнитной, электрофоретической, термофоретической, гравитационной и т.д.,

что позволяет распространить разработанный математический метод решения линейаризованного по скорости уравнения Навье-Стокса на очень широкий класс физических задач.

Частицы, входящие в состав реальных систем (газ, жидкость), могут иметь форму поверхности, отличной от сферической, например, сфероидальную (вытянутый или сплюснутый эллипсоид вращения). В данной работе получено решение линейаризованного по скорости уравнения Навье-Стокса в сфероидальной системе координат. При этом предполагается степенной вид зависимости коэффициентов вязкости $\mu_g = \mu_\infty t_g^\beta$, теплопроводности $\lambda_g = \lambda_{g\infty} t_g^\alpha$, $\lambda_p = \lambda_{p\infty} t_p^\gamma$ и плотности $\rho_g = \rho_{g\infty}/t_g$ газообразной среды от температуры ($\mu_\infty = \mu_g(T_\infty)$, $\lambda_{g\infty} = \lambda_g(T_\infty)$, $\rho_{g\infty} = \rho_g(T_\infty)$, $t_g = T_g/T_\infty$, $0,5 \leq \alpha, \beta \leq 1$, $-1 \leq \gamma \leq 1$). Здесь и далее индексы "g" и "p" будем относить соответственно к газообразной среде и частице; индексом " ∞ " обозначены параметры газообразной среды на бесконечности в невозмущенном потоке, а индексом "s" – значения физических величин, взятых при средней температуре поверхности частицы, равной T_s .

Определяющими параметрами задачи являются $\rho_{g\infty}, \mu_{g\infty}, \lambda_{g\infty}$ и сохраняющиеся в процессе движения частицы величины a, T_∞, U_∞ . Из этих параметров можно составить две безразмерные комбинации: число Рейнольдса $Re_\infty = U_\infty \rho_{g\infty} a / \mu_{g\infty} \ll 1$ и тепловое число Пекле $Pe_\infty = c_{pg} U_\infty \rho_{g\infty} a / \lambda_{g\infty} \ll 1$, где a – большая полуось сфероиды, $U_\infty = |U_\infty|$ – характерная скорость.

Предполагается также, что коэффициент теплопроводности частицы по величине много больше коэффициента теплопроводности газа ($\lambda_p \gg \lambda_g$). Это допущение приводит к тому, что в коэффициенте динамической вязкости можно пренебречь зависимостью от угла η в системе частица – газообразная среда (слабая угловая асимметрия распределения температуры). В этом случае можно считать, что $\mu_g(t_g) \approx \mu_g(t_{g0})$. Здесь $t_g(\lambda, x) = t_{g0}(\lambda) + \delta t(\lambda, x)$, $|\delta t(\lambda, x)| \ll t_{g0}(\lambda)$; $\delta t(\lambda, x)$ и $t_{g0}(\lambda)$ определяются из решения тепловой задачи. Это допущение позволяет рассматривать гидродинамическую часть отдельно от тепловой части, а связь между ними осуществляется через граничные условия.

В рамках сформулированных выше допущений система газодинамических уравнений, описывающая распределения полей скорости U_g , давления P_g и температур вне T_g и внутри T_p частицы, имеет вид [2, 3]

$$\frac{\partial P_g}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \mu_g \left(\frac{\partial U_k}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_k} - \frac{2}{3} \delta_{jk} \frac{\partial U_m}{\partial x_m} \right) \right\}, \quad \text{div}(\rho_g U_g) = 0, \quad (1)$$

$$\text{div}(\lambda_g \nabla T_g) = 0, \quad \text{div}(\lambda_p \nabla T_p) = -q_p, \quad (2)$$

где через U_k – обозначены физические составляющие массовой скорости U_g ($k, j, m = 1, 2, 3$); $q_p(\tau, \eta)$ – плотность тепловых источников неоднородно распределенных внутри частицы, зависящая от сфероидальных координат τ, η . За счет q_p происходит нагрев частиц, появление которых может быть обусловлено, например, протеканием объемной химической реакции, процессом радиоактивного распада вещества частицы, поглощением электромагнитного излучения и т.п.

Система (1), (2) решается со следующими граничными условиями в сферической системе координат (τ, η, φ) :

$$\begin{aligned} \tau \rightarrow \infty, \quad U_g(\tau, \eta) &= U_\infty \cos \eta, \quad U_\eta(\tau, \eta) = -U_\infty \sin \eta, \quad T_g = T_\infty, \\ \tau \rightarrow 0, \quad T_p &\neq \infty, \\ \tau = \tau_0, \quad T_g &= T_p, \quad \lambda_g \frac{\partial T_g}{\partial \tau} = \lambda_p \frac{\partial T_p}{\partial \tau}. \end{aligned}$$

В граничных условиях на поверхности частицы $\tau = \tau_0$ учтено условие равенства температур и непрерывность радиального потока тепла. Поверхности частицы соответствует координатная поверхность со значением τ , равным τ_0 . При этом положение декартовой системы координат фиксировано относительно частицы таким образом, что ось oz совпадает с осью симметрии сфероида.

Исследования показали, что при поиске выражений для компонент массовой скорости в виде

$$U_g(\tau, \eta) = \frac{U_\infty}{c \operatorname{ch} \tau H_\tau} G(\tau) \cos \eta, \quad U_\eta(\tau, \eta) = -\frac{U_\infty}{c H_\tau} g(\tau) \sin \eta, \quad (3)$$

где $G(\tau)$ и $g(\tau)$ – некоторые произвольные функции, зависящие от радиальной координаты τ (связь между функциями $G(\tau)$ и $g(\tau)$ определяется из уравнения непрерывности (2) – см. формулу (6)), задачу можно свести к обыкновенному неоднородному дифференциальному уравнению третьего порядка для функции $G(\tau)$, решение которого можно получить в виде обобщенных степенных рядов [4-8].

В выражении (3) введены следующие обозначения: $c = \sqrt{b^2 - a^2}$ – в случае вытянутого сфероида ($a < b$, формула (4)) и $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ – в случае сплюснутого сфероида ($a > b$, формула (5)); a и b – полуоси сфероида; $0 \leq \tau < \infty$, $0 \leq \eta \leq \pi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $H_\tau = H_\eta = c \sqrt{\operatorname{ch}^2 \tau - \sin^2 \eta}$ – коэффициенты Ламэ. Декартовы координаты связаны со сферическими координатами (τ, η, φ) соотношениями (4) – (5)

$$x = c \operatorname{sh} \tau \sin \eta \cos \varphi, \quad y = c \operatorname{sh} \tau \sin \eta \sin \varphi, \quad z = c \operatorname{ch} \tau \cos \eta, \quad (4)$$

$$x = c \operatorname{ch} \tau \sin \eta \cos \varphi, \quad y = c \operatorname{ch} \tau \sin \eta \sin \varphi, \quad z = c \operatorname{sh} \tau \cos \eta, \quad (5)$$

$$g(\lambda) = \frac{1}{2} \frac{dG}{d\lambda} - \frac{1}{2} f G, \quad \text{где } f = \frac{1}{t_{g0}} \frac{dt_{g0}}{d\lambda}, \quad \lambda = \operatorname{sh} \tau. \quad (6)$$

Функция $t_{g0}(\lambda)$, входящая в (6), находится из решения тепловой задачи и имеет вид:

$$t_{g0}(\lambda) = \left(1 + \frac{\gamma_0}{c} \operatorname{arcctg} \lambda \right)^{\frac{1}{1+\alpha}}, \quad (7)$$

где γ_0 – постоянная, определяемая из граничных условий на поверхности сфероида.

С учетом выражения (7) формула для коэффициента динамической вязкости принимает вид

$$\mu_g(t_g(\tau, \eta)) \approx \mu_g(t_{g0}) = \left(1 + \frac{\gamma_0}{c} \right)^{\frac{\beta}{1+\alpha}}. \quad (8)$$

Подставляя (8), (6) в (1), получаем следующее уравнение для функции $G(\lambda)$ в системе координат сплюснутого сфероида

$$\begin{aligned}
& \left(-1 + \frac{1+\lambda^2}{\lambda} \operatorname{arctg} \frac{1}{\lambda} \right) \frac{d^3 G}{d\lambda^3} + \left\{ -\frac{1}{\lambda} - \frac{1-\lambda^2}{\lambda^2} \operatorname{arctg} \frac{1}{\lambda} + f(1-\beta) \left(1 - \frac{1+\lambda^2}{\lambda} \operatorname{arctg} \frac{1}{\lambda} \right) \right\} \frac{d^2 G}{d\lambda^2} + \\
& + \left\{ \frac{2}{1+\lambda^2} - \frac{2}{\lambda} \operatorname{arctg} \frac{1}{\lambda} + \left(2 \frac{df}{d\lambda} + \beta f^2 \right) \left(1 - \frac{1+\lambda^2}{\lambda} \operatorname{arctg} \frac{1}{\lambda} \right) + \frac{f(1-\beta)}{\lambda} \left(1 + \frac{1-\lambda^2}{\lambda} \operatorname{arctg} \frac{1}{\lambda} \right) \right\} \frac{dG}{d\lambda} + \\
& + \left\{ \frac{2(1-\lambda^2)}{\lambda(1+\lambda^2)^2} + \frac{2}{\lambda^2} \operatorname{arctg} \frac{1}{\lambda} + \left(\frac{d^2 f}{d\lambda^2} + \beta f \frac{df}{d\lambda} \right) \left(1 - \frac{1+\lambda^2}{\lambda} \operatorname{arctg} \frac{1}{\lambda} \right) + \right. \\
& \left. + \left(\frac{df}{d\lambda} + \beta f^2 \right) \left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1-\lambda^2}{\lambda^2} \operatorname{arctg} \frac{1}{\lambda} \right) + \frac{4\beta f}{1+\lambda^2} \left(1 - \lambda \operatorname{arctg} \frac{1}{\lambda} \right) \right\} G = -\frac{D}{(1+\lambda^2)^2 t_{g_0}^\beta} \quad (9)
\end{aligned}$$

с краевыми условиями

$$G(\lambda)|_{\lambda=\lambda_0} = N_1, \quad \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{G(\lambda)}{c^2(1+\lambda^2)} = 1, \quad g(\lambda)|_{\lambda=\lambda_0} = N_2, \quad \lim_{\lambda \rightarrow \infty} g(\lambda) = 1, \quad (10)$$

где N_1, N_2 - постоянные, вид которых определяется конкретной физической задачей.

В уравнении (9) перейдем к новой переменной $\nu = \frac{1}{\lambda}$, в результате имеем

$$\begin{aligned}
& \nu^3 \left\{ -1 + \frac{1+\nu^2}{\nu} \operatorname{arctg} \nu \right\} \frac{d^3 G}{d\nu^3} + \nu^2 \left\{ -5 + \frac{5+7\nu^2}{\nu} \operatorname{arctg} \nu + \left(\frac{\nu}{1+\nu^2} - \operatorname{arctg} \nu \right) \gamma_1 L \right\} \frac{d^2 G}{d\nu^2} + \\
& + \nu \left\{ -2 \frac{1+2\nu^2}{1+\nu^2} + 2 \frac{1+4\nu^2}{\nu} \operatorname{arctg} \nu + \left(\frac{\gamma_2 \nu + \gamma_1 \nu^3}{(1+\nu^2)^2} - \frac{\gamma_2 + 3\gamma_1 \nu^2}{1+\nu^2} \operatorname{arctg} \nu \right) L - \right. \\
& - \left. \left(\frac{\nu^2}{(1+\nu^2)^2} - \frac{\nu}{1+\nu^2} \operatorname{arctg} \nu \right) \gamma_3 L^2 \right\} \frac{dG}{d\nu} + \left\{ 2 \frac{1-\nu^2}{(1+\nu^2)^2} - \frac{2}{\nu} \operatorname{arctg} \nu + \frac{4\nu L}{(1+\nu^2)^2} \times \right. \\
& \times \left. \left(\frac{\gamma_4 - \gamma_1 \nu^2}{1+\nu^2} - \frac{\gamma_4}{\nu} \operatorname{arctg} \nu \right) + \left(\frac{\gamma_5 + \gamma_6 \nu^2}{1+\nu^2} - \frac{\gamma_5 - \gamma_6 \nu^2}{\nu} \operatorname{arctg} \nu \right) \right\} \frac{\nu^2 L^2}{(1+\nu^2)^2} + \\
& + \left. \left(\frac{1}{1+\nu^2} - \frac{1}{\nu} \operatorname{arctg} \nu \right) \frac{\gamma_3 \nu^3 L^3}{(1+\nu^2)^2} \right\} G = \frac{D\nu}{(1+\nu^2)^2 t_{g_0}^\beta}. \quad (11)
\end{aligned}$$

Здесь $D = \text{const}$, $\gamma_1 = \frac{1-\beta}{1+\alpha}$, $\gamma_2 = \frac{5-\beta}{1+\alpha}$, $\gamma_3 = \frac{2+2\alpha-\beta}{(1+\alpha)^2}$, $\gamma_4 = \frac{1+\beta}{1+\alpha}$,

$$\gamma_5 = \frac{\beta-5\alpha-5}{(1+\alpha)^2}, \quad \gamma_6 = \frac{1+\alpha-\beta}{(1+\alpha)^2}; \quad L = \frac{\Gamma_0}{1+\Gamma_0 \cdot \operatorname{arctg} \nu}, \quad \Gamma_0 = \frac{\gamma_0}{c}.$$

Точка $\nu=0$ для однородного уравнения, соответствующего неоднородному уравнению (11), является регулярной особой точкой [4, 5]. Поэтому решение однородного дифференциального уравнения будем искать с помощью обобщенных степенных рядов. Для этого разложим в степенные ряды в окрестности нуля функции, входящие в уравнение (11). При этом основную сложность составляет поиск раз-

ложения в ряд функции L . Построим степенной ряд таким образом, чтобы он начинался с 1 и аппроксимировал нашу функцию L с достаточно высокой точностью. Ряд вида $L = \sum_{n=0}^{\infty} F_n \cdot e^{-Av}$ удовлетворяет всем выше перечисленным требованиям, причем погрешность приближения не превышает 5%. Ниже приведены графики, показывающие с какой точностью полученный ряд аппроксимирует исходную функцию L при различных значениях температуры (количество и значения коэффициентов F_n для каждой температуры различны). Сплошной линией изображена исходная функция L , а точками - аппроксимирующая ее функция.

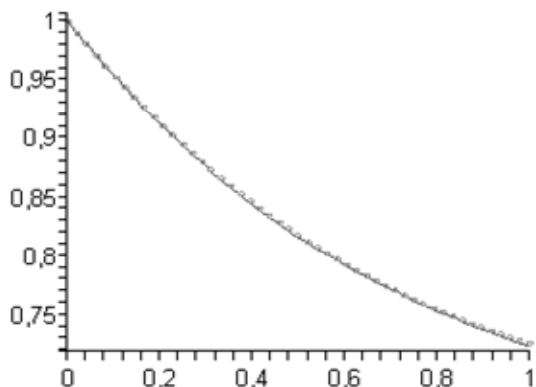


Рис. 1.

$$T=300, A=0,35, \\ F_1=1, F_2=-0,1356384, \\ F_3=0,166226$$

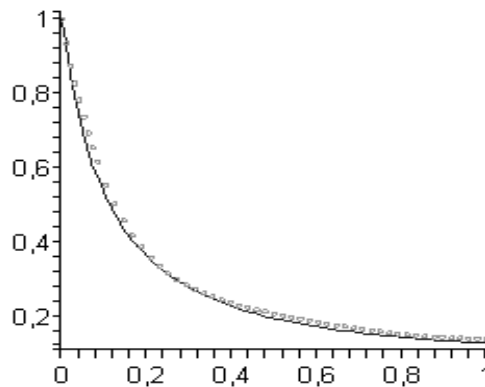


Рис. 2.

$$T=600, A=2,4, F_1=1, \\ F_2=-3,7773998, F_3=11,0057611, \\ F_4=-12,10147, F_5=5,4274344$$

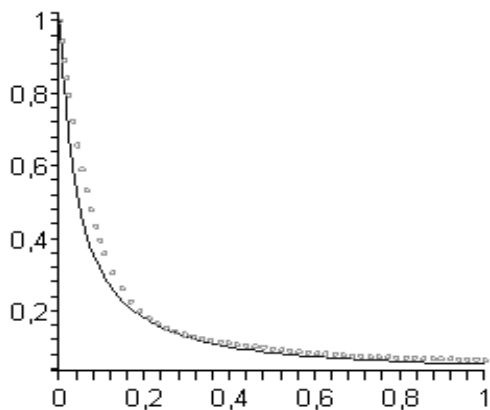


Рис. 3.

$$T=900, A=3,4, F_1=1, F_2=-7,00949, \\ F_3=27,4012794, F_4=-47,8568459, \\ F_5=40,9996872, F_6=-12,5382442$$

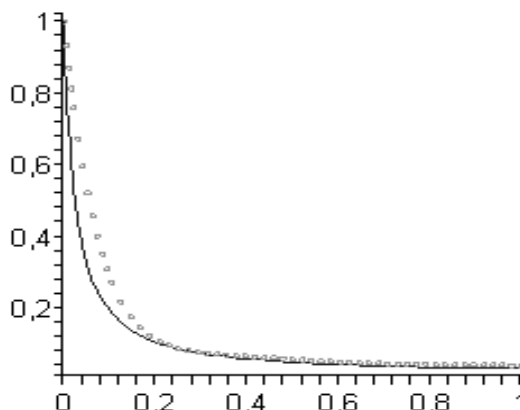


Рис. 4.

$$T=1200, A=4,1, F_1=1, F_2=-8,4758062, \\ F_3=33,9054718, F_4=-60,1746712, \\ F_5=51,2487679, F_6=-15,0619678$$

После разложения функций уравнения (11) в ряды, имеем следующее уравнение:

$$\left(v^3 - 3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n v^{2n+5}}{(2n+3)(2n+5)} \right) \frac{d^3 G}{dv^3} + \left\{ 8v^2 - 6 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+5) v^{2n+4}}{(2n+3)(2n+5)} - 3\gamma_1 \Gamma_0 \sum_{n=0}^{\infty} \Theta_n^{(1)} v^{n+3} \right\} \frac{d^2 G}{dv^2} +$$

$$\begin{aligned}
& + \left\{ 8v + 6 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n^2 + 5n - 1) v^{2n+3}}{(2n+3)(2n+5)} + \frac{3}{2} \Gamma_0 \sum_{n=0}^{\infty} \Theta_n^{(2)} v^{n+2} + 3\gamma_3 \Gamma_0^2 \sum_{n=0}^{\infty} \Theta_n^{(3)} v^{n+3} \right\} \frac{dG}{dv} + \\
& + \left\{ -8 + 12 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+2)(n+3) v^{2n+2}}{(2n+5)} - 6\Gamma_0 \sum_{n=0}^{\infty} \Theta_n^{(4)} v^{n+1} + 3\Gamma_0^2 \sum_{n=0}^{\infty} \Theta_n^{(5)} v^{n+2} - \right. \\
& \left. - 3\Gamma_0^3 \sum_{n=0}^{\infty} \Theta_n^{(6)} v^{n+3} \right\} G = -6A_2 \sum_{n=0}^{\infty} \Theta_n^{(7)} v^{n-1}, \quad (D = \tilde{D} \cdot A_2, \tilde{D} = -4). \quad (12)
\end{aligned}$$

Рекуррентные соотношения для коэффициентов $\Theta_n^{(i)}$ ($i=1, 2, \dots, 7$), получаемых при перемножении рядов для функции $\arctg v$ и L в степени m ($m=1, 2, 3$), имеют громоздкий вид, поэтому в данной статье они приведены не будут.

Решение однородного уравнения, соответствующего неоднородному уравнению (12), будем искать в виде следующего функционального ряда:

$$G = v^\rho \sum_{n=0}^{\infty} C_n v^n, \quad C_0 \neq 0. \quad (13)$$

Вычисляя производные, получим:

$$\begin{aligned}
G' &= v^{\rho-1} \sum_{n=0}^{\infty} (\rho+n) C_n v^n, \quad G'' = v^{\rho-2} \sum_{n=0}^{\infty} (\rho+n)(\rho+n-1) C_n v^n, \\
G''' &= v^{\rho-3} \sum_{n=0}^{\infty} (\rho+n)(\rho+n-1)(\rho+n-2) C_n v^n.
\end{aligned}$$

Подставляя (13) в однородное уравнение, соответствующее неоднородному уравнению (12), и приравнявая коэффициенты при v^n , получаем определяющее уравнение

$$r(r-1)(r-2) + 8r(r-1) + 8r - 8 = 0,$$

корни которого равны соответственно $r_1 = 1$, $r_2 = -2$, $r_3 = -4$.

Заметим, что разность корней равна целому числу. Следовательно, согласно общей теории решения дифференциальных уравнений в виде обобщенных степенных рядов (методом Фробениуса) во всех остальных решениях, кроме первого, соответствующего $r_1 = 1$, появляется дополнительное слагаемое, содержащее множитель $\ln\left(\frac{v_0}{v}\right)$, умноженный на первое решение [4, 5].

Таким образом, учитывая значения корней определяющего уравнения, система линейно независимых решений однородного уравнения, соответствующего неоднородному уравнению (9), имеет вид:

$$\begin{aligned}
G_1(v) &= v \sum_{n=0}^{\infty} C_n^{(1)} v^n, \quad G_3(v) = \frac{1}{v^2} \sum_{n=0}^{\infty} C_n^{(3)} v^n + \omega_1 \ln\left(\frac{v_0}{v}\right) G_1(v), \\
G_4(v) &= \frac{1}{v^4} \sum_{n=0}^{\infty} C_n^{(4)} v^n + \omega_3 \ln\left(\frac{v_0}{v}\right) G_1(v). \quad (14)
\end{aligned}$$

Из вида правой части неоднородного уравнения (9) следует, что его частным решением будет функция

$$\tilde{G} = A_2 G_2, \quad G_2(v) = \frac{1}{v} \sum_{n=0}^{\infty} C_n^{(2)} v^n + \omega_2 \ln\left(\frac{v_0}{v}\right) G_1(v). \quad (15)$$

Подставляя (14), (15) в уравнение (12) и используя метод неопределенных коэффициентов, получим следующую рекуррентную формулу для нахождения коэффициентов C_n^i , $i = 1, 2, 3$:

$$\begin{aligned}
C_n^{(1)} &= -\frac{3}{n} \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{(-1)^k (n-4k)}{(2k+1)(2k+3)} C_{n-2k}^{(1)} - \frac{3}{2n(n+3)(n+5)} \times \\
&\times \left\{ \Gamma_0 \sum_{k=0}^{n-1} [(n-k)\Theta_k^{(2)} - 2\gamma_1(n-k-1)(n-k)\Theta_k^{(1)} - 4\Theta_k^{(4)}] C_{n-k-1}^{(1)} + \right. \\
&+ 2\Gamma_0^2 \sum_{k=0}^{n-2} [\Theta_k^{(5)} - \gamma_3(n-k-1)\Theta_k^{(3)}] C_{n-k-2}^{(1)} - 2\gamma_3 \Gamma_0^3 \sum_{k=0}^{n-3} \Theta_k^{(6)} C_{n-k-3}^{(1)} \left. \right\}, \\
C_n^{(3)} &= -\frac{3}{n-3} \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{(-1)^k (n-4k-3)}{(2k+1)(2k+3)} C_{n-2k}^{(3)} - \frac{3}{2n(n-3)(n+2)} \times \\
&\times \left\{ \Gamma_0 \sum_{k=0}^{n-1} [\Theta_k^{(2)}(n-k-3) - 2\gamma_1 \Theta_k^{(1)}(n-k-3)(n-k-4) - 4\Theta_k^{(4)}] C_{n-k-1}^{(3)} + \right. \\
&+ 2\Gamma_0^2 \sum_{k=0}^{n-2} [\gamma_3 \Theta_k^{(3)}(n-k-4) + \Theta_k^{(5)}] C_{n-k-2}^{(3)} - 2\gamma_3 \Gamma_0^3 \sum_{k=0}^{n-3} \Theta_k^{(6)} C_{n-k-3}^{(3)} + \\
&+ \omega_1 \left(2 \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-3}{2} \rfloor} \frac{(-1)^k (n+1)(3n-8k-5) - 1}{(2k+1)(2k+3)} C_{n-2k-3}^{(1)} + \right. \\
&+ \left. \Gamma_0 \sum_{k=0}^{n-4} [\Theta_k^{(2)} - 2\gamma_1 \Theta_k^{(1)}(2n-2k-7)] C_{n-k-4}^{(1)} + 2\gamma_3 \Gamma_0^2 \sum_{k=0}^{n-5} \Theta_k^{(3)} C_{n-k-5}^{(1)} \right) \left. \right\}, \\
C_n^{(2)} &= -\frac{3}{n-2} \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{(-1)^k (n-4k-2)}{(2k+1)(2k+3)} C_{n-2k}^{(2)} - \frac{3}{2(n+1)(n-2)(n+3)} \times \\
&\times \left\{ -\tilde{D} \Theta_n^{(7)} + \Gamma_0 \sum_{k=0}^{n-1} [\Theta_k^{(2)}(n-k-2) - 2\gamma_1 \Theta_k^{(1)}(n-k-2)(n-k-3) - 4\Theta_k^{(4)}] C_{n-k-1}^{(2)} + \right. \\
&+ 2\Gamma_0^2 \sum_{k=0}^{n-2} [\Theta_k^{(5)} + \gamma_3 \Theta_k^{(3)}(n-k-3)] C_{n-k-2}^{(2)} - 2\gamma_3 \Gamma_0^3 \sum_{k=0}^{n-3} \Theta_k^{(6)} C_{n-k-3}^{(2)} + \\
&+ \omega_2 \left(2 \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor} \frac{(-1)^k (n+2)(3n-8k-2) - 1}{(2k+1)(2k+3)} C_{n-2k-2}^{(1)} + \right. \\
&+ \left. \Gamma_0 \sum_{k=0}^{n-3} [\Theta_k^{(2)} - 2\gamma_1 \Theta_k^{(1)}(2n-2k-5)] C_{n-k-3}^{(1)} + 2\gamma_3 \Gamma_0^2 \sum_{k=0}^{n-4} \Theta_k^{(3)} C_{n-k-4}^{(1)} \right) \left. \right\}.
\end{aligned}$$

Через $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ обозначена целая часть числа $\frac{n}{2}$.

При вычислении коэффициентов $C_n^{(1)}$ ($n \geq 1$), $C_n^{(2)}$ ($n \geq 3$), $C_n^{(3)}$ ($n \geq 4$) по приведенным выше рекуррентным соотношениям необходимо учитывать, что

$$C_o^{(1)} = 1, \quad C_o^{(2)} = -\frac{\tilde{D} \Theta_0^{(7)}}{4}, \quad C_1^{(2)} = -\frac{3}{16} [\tilde{D} \Theta_1^{(7)} + \Gamma_0 C_0^{(2)} (4\gamma_1 \Theta_0^{(1)} + \Theta_0^{(2)} + 4\Theta_0^{(4)})], \quad C_2^{(2)} = 1,$$

$$\begin{aligned}
C_o^{(3)} &= 1, \quad C_1^{(3)} = -\frac{1}{2}\Gamma_0 C_0^{(3)}(6\gamma_1\Theta_0^{(1)} + \Theta_0^{(2)} + 2\Theta_0^{(4)}), \quad C_3^{(3)} = 0, \quad C_o^{(2)} = 1, \\
C_2^{(3)} &= C_0^{(3)} - \frac{3\Gamma_0}{16} \{ (4\gamma_1\Theta_0^{(1)} + \Theta_0^{(2)} + 4\Theta_0^{(4)})C_1^{(3)} + 2(6\gamma_1\Theta_1^{(1)} + \Theta_1^{(2)} + 2\Theta_1^{(4)})C_0^{(3)} \} + \\
&\quad + \frac{3\Gamma_0^2}{8} (\Theta_0^{(5)} - 2\gamma_3\Theta_0^{(3)})C_0^{(3)}, \\
\omega_1 &= \frac{1}{10C_0^{(1)}} \{ -8C_1^{(3)} + \Gamma_0 [4\Theta_0^{(4)}C_2^{(3)} + (4\gamma_1\Theta_1^{(1)} + \Theta_1^{(2)} + 4\Theta_1^{(4)})C_1^{(3)} + \\
&\quad + C_0^{(3)}(12\gamma_1\Theta_2^{(1)} + 2\Theta_2^{(2)} + 4\Theta_2^{(4)})] + 2\Gamma_0^2 [C_1^{(3)}(\gamma_3\Theta_0^{(3)} - \Theta_0^{(5)}) + (2\gamma_3\Theta_1^{(3)} - \Theta_1^{(5)})C_0^{(3)}] + \\
&\quad + 2\gamma_3\Gamma_0^3\Theta_0^{(6)}C_0^{(3)} \}, \\
\omega_2 &= \frac{1}{10C_0^{(1)}} \{ -8C_0^{(2)} + \tilde{D}\Theta_2^{(7)} + \Gamma_0 [(4\gamma_1\Theta_1^{(1)} + \Theta_1^{(2)} + 4\Theta_1^{(4)})C_0^{(2)} + 4\Theta_0^{(4)}C_1^{(2)}] + \\
&\quad + 2\Gamma_0^2(\gamma_3\Theta_0^{(3)} - \Theta_0^{(5)})C_0^{(2)} \}.
\end{aligned}$$

Заметим, что выбор постоянных $C_0^{(1)}$, $C_0^{(2)}$ и $C_0^{(3)}$ осуществляется таким образом, чтобы функции $G_1(\nu)$, $G_2(\nu)$ и $G_3(\nu)$ стремились к соответствующим функциям для эллипсоида вращения при малых относительных перепадах температуры [2].

Четвертое решение уравнения (12), вычисляемое по формуле (14), не удовлетворяет краевому условию (10) $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{G(\lambda)}{c^2(1+\lambda^2)} = 1$, поэтому его явный вид мы приводить не будем.

Таким образом, мы получили общее решение уравнения (12)

$$G(\nu) = A_1 G_1(\nu) + A_2 G_2(\nu) + A_3 G_3(\nu) + A_4 G_4(\nu).$$

Функция $G(\nu) = A_1 G_1(\nu) + A_2 G_2(\nu) + A_3 G_3(\nu) + A_4 G_4(\nu)$ формально удовлетворяет уравнению (12) по построению. Можно показать, что ряды, определяющие функции $G_i(\nu)$, $i=1,2,3,4$ равномерно сходятся при $\nu \in (0,1)$, причем радиус сходимости рядов равен единице. Постоянные интегрирования A_1 , A_2 , A_3 и A_4 однозначно определяются из граничных условий (10). Очевидно, $A_2 = 1$, $A_4 = 0$. Для определения постоянных A_1 , A_3 имеем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} A_1 G_1(\lambda_0) + A_3 G_3(\lambda_0) = N_1 - G_2(\lambda_0), \\ A_1 G_1'(\lambda_0) + A_3 G_3'(\lambda_0) = 2N_2 - G_2'(\lambda_0). \end{cases}$$

Эта система имеет единственное решение, поскольку ее главный определитель отличен от нуля в силу линейной независимости решений $G_1(\nu)$, $G_2(\nu)$ и $G_3(\nu)$. Таким образом, имеем:

$$A_1 = \frac{\begin{vmatrix} N_1 - G_2(\lambda_0) & G_3(\lambda_0) \\ 2N_2 - G_2'(\lambda_0) & G_3'(\lambda_0) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} G_1(\lambda_0) & G_3(\lambda_0) \\ G_1'(\lambda_0) & G_3'(\lambda_0) \end{vmatrix}}, \quad A_3 = \frac{\begin{vmatrix} G_1(\lambda_0) & N_1 - G_2(\lambda_0) \\ G_1'(\lambda_0) & 2N_2 - G_2'(\lambda_0) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} G_1(\lambda_0) & G_3(\lambda_0) \\ G_1'(\lambda_0) & G_3'(\lambda_0) \end{vmatrix}}. \quad (16)$$

В результате проведенного исследования доказана следующая теорема.

Теорема. Функция $G(v) = A_1 G_1(v) + G_2(v) + A_3 G_3(v)$ с коэффициентами, определяемыми формулой (16), является единственным решением уравнения (9), удовлетворяющим краевым условиям (10).

Заметим, что полученное решение справедливо при $v \in (0,1)$. Если интересующая нас область не принадлежит указанному интервалу, то можно найти аналитическое продолжение полученного решения.

Следует так же отметить, что приведенные выше формулы могут быть распространены и на случай, когда частица имеет форму поверхности вытянутого сфероида. Для этого необходимо заменить λ на $i\lambda$ и c на $-ic$ (i – мнимая единица).

Заключение

Известный в научной литературе метод решения обыкновенных дифференциальных уравнений с помощью обобщенных степенных рядов (метод Фробениуса) был применен для нахождения аналитического решения линеаризованного по скорости уравнения Навье-Стокса с учетом зависимости коэффициента динамической вязкости от температуры. Специальным выбором выражений для компонент массовой скорости при условии, что коэффициент теплопроводности частицы по величине много больше коэффициента теплопроводности газообразной среды (слабая угловая асимметрия распределения температуры в системе частица–газ), система уравнений Навье-Стокса сводится к неоднородному дифференциальному уравнению третьего порядка с изолированной особой точкой. Решение этого уравнения находилось в виде обобщенных степенных рядов. Доказана теорема существования и единственности полученного решения.

Примечания:

1. Ладыженская О.А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1970. 288 с.
2. Хаппель Дж., Бреннер Г. Гидродинамика при малых числах Рейнольдса. М.: Мир, 1976. 630 с.
3. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.
4. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука. 1961. 703 с.
5. Коддингтон Э.А., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Иностран. лит., 1958. 474 с.
6. Привалов И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного. М.: Наука, 1967. 444 с.
7. Двайт Г.Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы. М.: Наука, 1978. 222 с.
8. Бретшнайдер Ст. Свойства газов и жидкостей. Инженерные методы расчета. М.: Химия, 1966. 535 с.

References:

1. Ladyzhenskaya O.A. Mathematical questions of dynamics of a viscous incompressible liquid. M.: Nauka, 1970. 288 pp.
2. Happel J., Brenner H. Low Reynolds number hydrodynamics. M.: Mir, 1976. 630 pp.
3. Landau L.D., Lifshits E.M. Hydrodynamics. M.: Nauka, 1986. 736 pp.
4. Kamke E. Reference book on the ordinary differential equations. M.: Nauka. 1961. 703 pp.
5. Koddington E.A., Levinson N. The theory of the ordinary differential equations. M.: Inostr. Lit., 1958. 474 pp.
6. Privalov I.I. Introduction in the theory of functions of the complex variable. M.: Nauka, 1967. 444 pp.
7. Dvayt G.B. Tables of integrals and other mathematical formulas. M.: Nauka, 1978. 222 pp.
8. Bretshnaider St. Properties of gases and liquids. Engineering methods of calculation. M.: Chemistry, 1966. 535 pp.