**УДК 37.016:510.6**
**ББК 74.262**
**И 20**

**И.А. Иванов**
*Кандидат педагогических наук, доцент кафедры общей математики Сочинского государственного университета туризма и курортного дела; E-mail: IVIGAN@mail.ru*

# ИСТОРИЧЕСКИЕ ПРЕДПОСЫЛКИ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ЛОГИКИ РАЦИОНАЛЬНЫХ РАССУЖДЕНИЙ В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ МАТЕМАТИКИ ДЛЯ ПРОФИЛЬНЫХ КЛАССОВ ЕСТЕСТВЕННО-НАУЧНОГО НАПРАВЛЕНИЯ

*(РЕЦЕНЗИРОВАНА)*

*Аннотация.* В статье рассматривается гносеологический аспект применения логики рациональных рассуждений в эволюции математики как науки в историческом контексте и анализируется возможность ее использования в систематическом курсе математики в профильных классах основной школы.

*Ключевые слова*: прикладная математика, теоретическая математика, рациональная логика.

**I.A. Ivanov**
*Candidate of Pedagogy, Assistant Professor of General Mathematics Department of the Sochi State University of Tourism and Resort Business; E-mail: IVIGAN@mail.ru*

# HISTORICAL PRECONDITIONS OF THE USE OF LOGIC OF RATIONAL ARGUMENTATIONS IN SCHOOL COURSE OF MATHEMATICS FOR FORMS WITH EXTRA MATHEMATICS LESSONS OF NATURAL-SCIENCE DIRECTION

*Abstract.* In this paper we regard the rational argumentations as an integral part of mathematics as a science and an important constituent part of a modern school subject of mathematics (forms with extra mathematics lessons).

*Key words*: applied mathematics, theoretical mathematics, rational logic.

Современная образовательная парадигма направлена на развитие личности ученика средствами предмета при его непосредственном участии как субъекта процесса обучения. Обучение математике в средней школе имеет двоякую направленность: с одной стороны у ученика требуется сформировать умения, связанные с построением формальных логических доказательств (требование математики как теоретической науки), с другой – сформировать умения по построению простейших математических моделей (требование математики как прикладной науки). Для реализации целей обучения математике в указанном контексте предусматривается личностно ориентированное обучение в профильных классах. Так сложилось исторически, что формированию умений по построению формальнологических доказательств в методической науке уделялось и уделяется достаточное внимание. Вопросы же формирования умений построения математических моделей объективно отходили на второй план, реализуясь в различных «методических подходах», выразившихся в «разработке принципа политехнизма» или «прикладной направленности обучения». При этом речь, в основном, сводилась к осуществлению попыток «усиления реализации» прикладной направленности обучения математике и т.д., которые в настоящее время уже не актуальны. Основным недостатком этих процессов, на наш взгляд, является отсутствие учета специфического компонента прикладной математики – ее логики, – *логики рациональных рассуждений*. Теоретическая и практическая разработка этого вопроса представляется весьма перспективным направлением методической науки в силу исторически сложившейся ситуации – прикладные отрасли знания в настоящий момент определяют прогресс науки и техники.

Рассмотрим некоторые аспекты проблемы обучения рациональным рассуждениям в школьном курсе математики в контексте исторического развития науки математики.

История становления математики как науки и математики как учебного предмета свидетельствуют о том, что развитие *логики*, используемой при доказательствах и обоснованиях как в теоретической, так и в прикладной математике, неразрывно связано с эволюцией и применением так называемых *рациональных рассуждений*. Термин «*рационализм*» (от лат. rationalis - разумный, ratio - разум) – «точка зрения рассудка, соответственно - разума; совокупность философских направлений, делающих центральным пунктом анализа разум, мышление, рассудок - с субъективной стороны, а разумность, логический порядок вещей - с объективной» [8, с. 386]. Противоположным понятием понятию «рациональное» является понятие «иррациональное» (лат. irrationalis - неразумное) - то, что не может быть постигнуто разумом, что явно не подчиняется законам логики, что оценивается как «сверхразумное», «противоразумное»…» [8, с. 188]. Рациональная логика, используемая при построении математических моделей реальных объектов и процессов, оперирует с утверждениями и обоснованиями, которые с точки зрения теоретической математики являются совершенно недопустимыми. Тем не менее, очевиден тот факт, что достижения в науке и технике не были бы возможны без использования логики прикладной математики. Развитие прикладных направлений современной математики открывают новые аспекты проблемы логического обоснования в науке математике - проблемы, исконно связываемой с теоретической математикой, но теперь являющейся объектом изучения и прикладной математики. В прикладной математике формализация понятия «рациональное рассуждение» как основы существования «рациональной логики» осуществляется следующим образом [1]. «Сложное рациональное рассуждение или система таких рассуждений могут иметь весьма неоднородную структуру: такое рассуждение может включать физические соображения, ссылки на интуицию, различные более или менее правдоподобные упрощения, решения математических задач и ссылки на теоремы на чисто дедуктивном уровне, вычисления...» [1, с. 93]. Далее, «пусть рациональное рассуждение $A$ состоит из $n$ указанных выше компонентов $A_i$ ($i$=1, $n$) со степенью достоверности (вероятностью) $p_i$ и имеет конъюнктивную структуру, т.е. $A = \bigwedge_{i=1}^{i=n} A_i$, тогда степень достоверности рассуждения $A$ может быть представлена следующим образом: $p_A = \prod_{i=1}^{i=n} p_i$ [1, с. 93]. Дедуктивные рассуждения представляют собой предельный случай рациональных рассуждений и степень их достоверности принимается равной единице.

Вместе с тем, природа рациональных рассуждений остается недостаточно исследованной и в наши дни: нет четкого понимания механизма возникновения таких рассуждений при решении прикладных и чисто математических задач. Проблема изучения *всего* комплекса проблем, связанных с построением теории рациональных рассуждений безусловно лежит в плоскости психологических исследований (внутренний план проблемы). Но для исследования вопросов, связанных с результатом применения рациональных рассуждений для получения конкретного математического знания, является доступным внешний план проблемы, выраженный в исторических фактах, зафиксированных в математическом наследии человечества. Известно, что математическая наука развивается в диалектическом единстве двух своих ветвей - *теоретической математики* и *прикладной математики*, объективно существующих и оказывающих влияние на все составляющие математической науки (содержание и применяемая логика). На современном этапе развития математики как науки не мыслится без понимания взаимодействия этих ветвей и учете их гносеологического потенциала в будущем. Ниже фрагментарно рассматривается процесс развития математики с позиции применения в ней рациональных рассуждений и их роли в развитии математической науки в *древнейший период*, так как именно этот период характеризуется широким применением рациональных рассуждений при возникновении и эволюционировании фундаментальных разделов математики (теория чисел, теория функций, тригонометрия, метод координат, элементы теории приближенных вычислений и др.), а эти вопросы составляют основу как школьного, так и вузовского курсов математики.

Первоначально, как известно, возникла потребность в счете. Преодолев стадию «чувственного счета» [6, с. 9], человек сделал первый шаг к возникновению счета путем установления «взаимно однозначного соответствия» между подсчитываемыми предметами и некоторым другим множеством-эталоном, которое символизировало некоторое конкретное число и в дальнейшем привело к понятию числа (Древний Египет, Вавилон).

В папирусах древних *египтян* обнаруживаются первые приемы счета чисел, основанные на аддитивности системы счисления, а также представления о дробях, делимости чисел, прогрессиях и первоначальные знания о площадях и объемах. Математика используется для решения практических задач (землемерие, вычисление объемов сосудов, практический счет и т.д.) простейшими арифметическими, алгебраическими и геометрическими методами, т.е. математика в древнем Египте - наука *прикладная*. Математические знания египтян не систематизированы, но, вместе с тем, предпринимаются попытки по их обобщению [4, 6, 9]. Аналогичная ситуация существует и у *вавилонян*, разработавших специальную нумерацию и алгебраические методы решения квадратных уравнений (здесь же, *приближенное* вычисление квадратных корней) и некоторых видов систем алгебраических уравнений. В прикладном аспекте им были доступны вопросы вычисления сложных процентов, решения геодезических и астрономических задач. Несмотря на довольно обширный запас математических знаний, исследователи математической культуры древних вавилонян [2, 10, 11] находят, что эти знания также не систематизированы.

*Теоретическая* математика, по-видимому, возникла впервые в *Древней Греции* в связи с софистикой и отчетливо отделялась от прикладной именно *дедуктивным способом* построения теории [3, с. 30], позволившим разрабатывать вопросы арифметики целых чисел и дробей, рассмотреть теорию отношений и делимости, заложить основы геометрической алгебры, открыть первые неразрешимые задачи и парадоксы бесконечного (апории Зенона) и т.д. [4, 5, 12]. Представителем другого направления в построении математической науки является *Евклид*. Его «Начала», т.е. соответствующие 13 книг, построены в едином логическом формате: каждая книга начинается с определений, далее, формулируются постулаты и доказываются теоремы.

В этот период развития математики наряду с методами, использующими дедуктивные рассуждения, появляются такие методы как «метод исчерпывания» Евдокса (фактически начала теории пределов), *уровень строгости* которого существенно отличается от уровня строгости теорий, построенных на дедуктивных рассуждениях с привлечением аксиоматического аппарата. Тем не менее, с помощью леммы Евдокса Архимед на основании разработанного им интегрального метода смог правильно вычислить некоторые площади и объемы [7]. В этих вычислениях он использовал ряд соотношений, которые в современной записи имеют вид:

$$\sum_{k=1}^{n} kh = \frac{n(n+1)}{2}\cdot h, \qquad \sum_{k=1}^{n} (kh)^2 = \frac{n\cdot(n+1)\cdot(2\cdot n+1)}{6}\cdot h^2.$$

Общеизвестна и роль дифференциальных методов *Архимеда*, разработанных им в сочинении «О спирали». Отыскивая в этой работе касательную в некоторой точке *P* спирали $\rho = a\cdot\varphi$ Архимед, во-первых, задает спираль не аналитически, а *кинематически* (прямая *OA* равномерно вращается вокруг точки *O* против часовой стрелки и одновременно точка *M* равномерно движется по прямой в направлении от *O* к *A*) - этим обеспечивалось существование и непрерывность кривой, и, во-вторых, широко использует представления об «эквивалентных бесконечно малых». В своих рассуждениях Архимед часто, как пишет И.Г. Башмакова [4, с. 126], «молчаливо находит», например, какойнибудь, по-существу, предел, а затем методом от противного доказывает его справедливость. Аналогичная ситуация имеет место и при определении *экстремумов функции*. Архимед нашел общий метод сведения проблем определения экстремумов к проблемам нахождения касательных. Этот метод, дающий решение для достаточно широкого класса задач, также не имеет строгого логического обоснования в конкретно-исторической логической культурной традиции, являясь, по сути, (в современной терминологии), *рациональным*, поэтому в этот период развития математики дифференциальные и интегральные методы Архимеда не получили широкого распространения и развития [4, с. 118-129].

Ярким представителем *теоретической* математики древности является греческий геометр и астроном эпохи эллинизма - *Аполлоний*, автор теории конических сечений. В алгебре Аполлоний в работе – «О неупорядоченных иррациональностях», - продолжил классификацию иррациональностей Евклида. Высшего расцвета античная алгебра достигла у *Диофанта*. Основная проблема «Арифметики», - его научного трактата - это решение неопределенных уравнений в положительных рациональных числах. Решения отыскиваются во всей области положительных рациональных чисел (вопрос актуален и сейчас). *Герон Александрийский* в своем математическом творчестве интересуется не только логически строгими построениями, но и приближенными правилами, в частности, с его именем связывается формула для приближенного вычисления квадратного корня. *Менелай Александрийский* и *Клавдий Птолемей* разработали элементы сферической геометрии и тригонометрии хорд, а также таблицы *приближенных* значений величин хорд в зависимости от стягивающих углов, необходимых для вычисления положений Солнца и планет на небесной сфере в теории, просуществовавшей до XVI в., когда Н. Коперник выдвинул гелиоцентрическую модель Солнечной системы.

*Выводы*. Достижения математиков древности *в теоретическом аспекте* (теория делимости чисел, теория иррациональных величин и классификация квадратичных иррациональностей и т.д.) и *в прикладном аспекте* (парадоксы бесконечного, «метод исчерпывания» и т.д.) заложили предпосылки развития математики как самостоятельной науки с присущими ей объектами и методами и определили дальнейшее развитие математики вплоть до нашего времени. Именно в древности на основе *рациональных рассуждений* зародились идеи, реализация которых потребовало порядка двух тысяч лет, а критический анализ методов математики древнейшего периода лег в основу научной революции в математике как в XVII в., так и в последующие периоды (XIX и XX в.в.).

Как видно из приведенного краткого исторического обзора гносеологические корни современной математики лежат в сфере *рациональной логики*, которая была основой математики древнейшего периода. В настоящее время любое математическое открытие (теория) также проходит стадию *рационального исследования* и, лишь через некоторое время, появляется его (ее) теоретическое обоснование, не лишенное, однако, рациональной основы (хотя бы на основании теоремы Геделя о неполноте).

Если ранее школьный предмет математики рассматривался как педагогическая проекция математики как науки (теоретической математики) и при этом основной акцент делался в большей мере на содержание образования, чем на логику, то в настоящее время, как было показано выше, актуальным становится не столько содержание образования, сколько полноценный учет логики рациональных рассуждений (логики прикладной математики).

**Примечания:**

1. Блехман И.И., Мышкис А.Д., Пановко Я.Г. Прикладная математика: предмет, логика, особенности подходов / Академия Наук УССР, Физико-технич. ин-т низких температур. Киев: Наукова Думка, 1976. 272 с.

2. Вилейтнер Г. Хрестоматия по истории математики, составленная по первоисточникам (арифметика и алгебра, геометрия и тригонометрия, аналитическая и синтетическая геометрия,

исчисление бесконечно малых) / пер. П.С. Юшкевича и А.П. Юшкевича. М.; Л.: ОНТИ НКТП СССР, 1935. 320 с.

3. Гжегорчик А. Популярная логика. М.: Наука, 1965.

4. История математики с древнейших времен до начала XIX столетия: в 3 т. Т. 1. С древнейших времен до начала нового времени. М.: Наука, 1970. 352 с.

5. История математики с древнейших времен до начала XIX столетия: в 3 т. Т. 2. Математика XVII столетия. М.: Наука, 1970. 300 с.

6. Ишлинский А.Ю. Математика и методы механики // История отечественной математики. Т. 4, кн. 2. Киев: Наукова думка, 1970.

7. Кольман Э. История математики в древности. М., 1959.

8. Краткая философская энциклопедия. М.: Прогресс: Энциклопедия, 1994. 576с.

9. Математика: хрестоматия по истории, методологии, дидактике / сост. Г.Д. Глейзер. М.: Изд-во УРАО, 2001. 384 с.

10. Рыбников К.А. История математики: учебник. М: Изд-во МГУ, 1994. 496 с.

11. Хрестоматия по истории математики. Арифметика и алгебра. Теория чисел. Геометрия / под ред. А.П. Юшкевича. М.: Просвещение, 1976. 318 с.

12. Яновская С.А. Преодолены ли в современной науке трудности, известные под названием «апорий Зенона»? // Проблемы логики. М.: Изд-во АН СССР, 1963.