МАТЕМАТИКА

УДК 517.91
ББК 22.161.61
С 92

Схаляхо Ч.А.
Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики и физики Краснодарского высшего военного училища (военный институт) имени С.М. Штеменко, тел. 88612681456, e-mail: scha1@mail.ru

Тугуз Н.С.
Кандидат педагогических наук, доцент кафедры общих математических и естественно-научных дисциплин филиала Майкопского государственного технологического университета в п. Яблоновском, тел. (771) 98-1-63, e-mail: tuguzns@mail.ru

Колеблемость решений дифференциальной системы типа Эмдена-Фаулера

(Рецензирована)

Аннотация

Приводятся достаточные условия колеблемости всех правильных решений системы дифференциальных уравнений типа Эмдена-Фаулера, обобщающие и уточняющие результаты ранее опубликованных работ в журнале «Дифференциальные уравнения».

Ключевые слова: *колеблемость, система дифференциальных уравнений типа Эмдена-Фаулера, правильное решение.*

Skhalyakho Ch.A.
Candidate of Physics and Mathematics, Assistant Professor of Mathematics and Physics Department of Krasnodar S.M. Shtemenko Military Higher Institution (Military Institute), ph. 88612681456, e-mail: scha1@mail.ru

Tuguz N.S.
Candidate of Pedagogy, Assistant Professor of General Mathematic and Natural Science Disciplines Department of Branch of Maikop State Polytechnic University in the settlement of Yablonovsky, ph. (771) 98-1-63, e-mail: tuguzns@mail.ru

Variability of solutions of Emden-Fowler type differential system

Abstract

The paper discusses sufficient conditions for variability of all correct solutions for system of Emden-Fowler type equations, generalizing and specifying the results of works published previously in journal «The Differential Equations».

Key words: *variability, system of Emden-Fowler type differential equations, a correct solution.*

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений типа Эмдена-Фаулера

$$u_1'(t) = a_1(t)\left|u_2(t)\right|^{\lambda_1} sign\, u_2(t)\ , \quad u_2'(t) = a_2(t)\left|u_1(t)\right|^{\lambda_2} sign\, u_1(t)\ , \qquad (1)$$

где $\lambda_i = const > 0\ (i=1,2)$, $a_i : [0,+\infty] \to R\ (i=1,2)$ – локально суммируемые функции, кроме того

$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 1\ . \qquad (2)$$

Определение 1. Решение (u_1, u_2) системы (1), заданное на некотором бесконечном промежутке $[t_0, +\infty)$, называется *правильным* решением, если

$$\sup\{\sum_{i=1}^{2} | u_i(s) | : s \ge t\} > 0 \quad \text{при} \quad t \ge t_0.$$

Определение 2. Правильное решение (u_1, u_2) системы (1) называется *колеблющимся,* если каждая его компонента имеет последовательность нулей, сходящуюся к $+\infty$, и *неколеблющимся* – в противном случае.

В данной заметке приводятся достаточные условия колеблемости всех правильных решений системы (1), обобщающие и уточняющие результаты работ [1-3].

Пусть $[a,b]$ некоторый отрезок из промежутка $[0,+\infty]$, а c некоторое число из интервала (a,b). Положим

$$A(t) = -sign\,(c-t)\int_t^c a_2(s)ds\,,\ a \le t \le b\,.$$

$$p_1(t) = p_1^*(t) = A(t)\,,$$

$$p_k(t) = A(t) + \lambda_2 \int_t^c a_1(s)\left|p_{k-1}(s)\right|^{1+\lambda_1} ds\ ,\ k = 2,3,\dots\ ,\ a \le t \le c\,, \tag{3}$$

$$p_k^*(t) = A(t) + \lambda_2 \int_c^t a_1(s)\left|p_{k-1}^*(s)\right|^{1+\lambda_1} ds\ ,\ k = 2,3,\dots\ ,\ c \le t \le b\,. \tag{4}$$

Теорема 1. Пусть соблюдается условие (2) и $a_1(t) \ge 0$ при $t \in (a,b)$. Пусть, далее, существуют числа $c \in (a,b)$, $m > 0$ и натуральное число k такие, что

$$2m^{\frac{1}{1+\lambda_2}}\int_a^c (\lambda_2 a_1(t) - \frac{[a_2(t) + \lambda_2 m a_1(t)]_+}{\left|p_k(t)\right|^{1+\lambda_1} + m})dt \ge \gamma\,,$$

$$2m^{\frac{1}{1+\lambda_2}}\int_c^b (\lambda_2 a_1(t) - \frac{[a_2(t) + \lambda_2 m a_1(t)]_+}{\left|p_k^*(t)\right|^{1+\lambda_1} + m})dt \ge \gamma\,,$$

где

$$\gamma = 2\pi\left[(1+\lambda_1)\sin\frac{\pi}{1+\lambda_1}\right]^{-1}, \tag{5}$$

$$[x(t)]_+ = \max\{0, x(t)\},$$

функции p_k и p_k^* заданы соответственно равенствами (3) и (4).

Тогда компонента u_1 любого ненулевого решения системы (1) имеет нуль на отрезке $[a,b]$.

Следствие 1. Пусть соблюдается условие (2) и $a_1(t) \ge 0$ при $t \in (a,b)$. Пусть, далее, существуют числа $c \in (a,b)$, $m > 0$ и натуральное число k такие, что

$$-a_2(t) \le \lambda_2 m a_1(t) \quad \text{при} \quad a \le t \le b,$$

$$2m^{\frac{1}{1+\lambda_2}} \int_a^c \frac{\lambda_2 |p_k(t)|^{1+\lambda_1} a_1(t) - a_2(t)}{|p_k(t)|^{1+\lambda_1} + m} dt \ge \gamma,$$

$$2m^{\frac{1}{1+\lambda_2}} \int_c^b \frac{\lambda_2 |p_k^*(t)|^{1+\lambda_1} a_1(t) - a_2(t)}{|p_k^*(t)|^{1+\lambda_1} + m} dt \ge \gamma,$$

где число γ и функции p_k и p_k^* заданы соответственно равенствами (5), (3) и (4). Тогда компонента u_1 любого ненулевого решения системы (1) имеет нуль на отрезке $[a,b]$.

Теорема 2. Пусть соблюдается условие (2) и существуют последовательности

$$(a_n)_{n=1}^{+\infty}, \quad (b_n)_{n=1}^{+\infty}, \quad (c_n)_{n=1}^{+\infty}, \quad (m_n)_{n=1}^{+\infty},$$

для которых при любом значении n выполняются условия

$$a_n < b_n, \quad \lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty, \quad c_n \in (a_n, b_n), \quad m_n > 0, \quad n = 1,2,\dots, \quad a_1(t) \ge 0 \quad \text{при} \quad t \in (a_n, b_n),$$

$$2(m_n)^{\frac{1}{1+\lambda_1}} \int_{a_n}^{c_n} (\lambda_2 a_1(t) - \frac{[a_2(t) + \lambda_2 m_n a_1(t)]_+}{|p_{nk}(t)|^{1+\lambda_1} + m_n}) dt \ge \gamma,$$

$$2(m_n)^{\frac{1}{1+\lambda_1}} \int_{c_n}^{bn} (\lambda_2 a_1(t) - \frac{[a_2(t) + \lambda_2 m_n a_1(t)]_+}{|p_{nk}^*(t)|^{1+\lambda_1} + m_n}) dt \ge \gamma,$$

где

$$A_n(t) = -sign(c_n - t) \int_t^{c_n} a_2(s) ds, \qquad a_n \le t \le b_n,$$

$$p_{n1}(t) = p_{n1}^*(t) = A_n(t)$$

$$p_{nk}(t) = A_n(t) + \lambda_2 \int_t^c a_1(s) |p_{nk-1}(s)|^{1+\lambda_1} ds, \quad k = 2,3,\dots, \quad a_n \le t \le c_n, \tag{6}$$

$$p_{nk}^*(t) = A_n(t) + \lambda_2 \int_c^t a_1(s) |p_{nk-1}^*(s)|^{1+\lambda_1} ds, \quad k = 2,3,\dots, \quad c_n \le t \le b_n, \tag{7}$$

γ - число, определенное равенством (5). Тогда любое правильное решение системы (1) является колеблющимся.

Следствие 2. Пусть соблюдается условие (2) и существуют последовательности

$$(a_n)_{n=1}^{+\infty}, \quad (b_n)_{n=1}^{+\infty}, \quad (c_n)_{n=1}^{+\infty}, \quad (m_n)_{n=1}^{+\infty},$$

для которых при любом значении n выполняются условия

$$a_n < b_n\ , \quad \lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty, \quad c_n \in (a_n, b_n)\ , \quad m_n > 0, \quad n = 1, 2, \ldots, \quad a_1(t) \geq 0 \ \text{ при } \ t \in (a_n, b_n)\ ,$$

$$-a_2(t) \leq \lambda_2 m_n a_1(t) \ \text{ при } \ t \in (a_n, b_n)\ ,$$

$$2(m_n)^{\frac{1}{1+\lambda_2}} \int_a^c \frac{\lambda_2 \left|p_{nk}(t)\right|^{1+\lambda_1} a_1(t) - a_2(t)}{\left|p_{nk}(t)\right|^{1+\lambda_1} + m_n} dt \geq \gamma\,,$$

$$2(m_n)^{\frac{1}{1+\lambda_2}} \int_c^b \frac{\lambda_2 \left|p^*_{nk}(t)\right|^{1+\lambda_1} a_1(t) - a_2(t)}{\left|p^*_{nk}(t)\right|^{1+\lambda_1} + m_n} dt \geq \gamma\,,$$

где число γ и функции p_{nk} и p^*_{nk} заданы соответственно равенствами (5), (6) и (7). Тогда любое правильное решение системы (1) является колеблющимся.

Примечания:

1. Схаляхо Ч.А. О нулях решений одной двумерной дифференциальной системы на конечном промежутке // Дифференциальные уравнения. 1988. Т. 24, № 6. С. 1080-1083.
2. Схаляхо Ч.А. Колеблемость решений систем двух дифференциальных уравнений со знакопеременными правыми частями // Дифференциальные уравнения. 1992. Т. 28, № 10. С. 1736-1747.
3. Схаляхо Ч.А. О распределении нулей решений одной нелинейной системы // Дифференциальные уравнения. 1993. Т. 29, № 2. С. 232-239.