УДК 517.925.41
ББК 22.161.61
У 95

Ушхо А.Д.
Старший преподаватель кафедры теоретической физики физического факультета Адыгейского государственного университета, тел. (8772) 59-39-08

Исследование полиномиальных дифференциальных систем на плоскости, имеющих оси симметрии S-типа

(Рецензирована)

Аннотация

Вводится понятие оси симметрии S-типа поля направлений системы дифференциальных уравнений, правые части которых представляют собой взаимно простые многочлены степени n с действительными коэффициентами. Для $n = 2;3$ проводится исследование этой системы на S-симметрию. Изучается вопрос о сосуществовании осей симметрии S-типа и прямых изоклин системы, отличных от осей симметрии и проходящих через начало координат. Доказывается утверждение: если эта система при $n \geq 2$ имеет n^2 особых точек в конечной части фазовой плоскости и $n+1$ осей симметрии N-типа при отсутствии осей симметрии S-типа или $n+1$ осей симметрии S-типа при отсутствии осей симметрии N-типа, то все особые точки расположены на осях симметрии, причем начало координат $O(0;0)$ – особая точка.

Ключевые слова: *оси симметрии, полиномиальная дифференциальная система, особая точка, взаимно простые многочлены.*

Ushkho A.D.
Senior Lecturer of Theoretical Physics Department at Physics Faculty of Adyghe State University, ph. (8772) 59-39-08

Plane polynomial differential systems with the S-type symmetry axis

Abstract

The paper introduces the concept of S-type symmetry axis of the field lines of system of differential equations, whose right side is relatively prime polynomials with real coefficients. The author examines the question on coexistence of the axes of S-type symmetry and straight-line isoclines of the system, differing from the axes of symmetry and passing through the origin of coordinates. It is proved that if the system for $n \geq 2$ has the n^2 of singular points in the finite part of the phase plane and $n+1$ of axes of N-type symmetry in the absence of S-type symmetry axes or $n+1$ axis of S-type symmetry in the absence of the axes of N-type symmetry, then all singular points are located on the symmetry axes, and the origin of coordinates $O(0;0)$ is a singular point.

Key words: *symmetry axes, polynomial differential system, singular point, coprime polynomials.*

В статье [1] было введено понятие оси симметрии N-типа и проведено исследование на данный тип симметрии системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = P_n(x,y), \quad \frac{dy}{dt} = Q_n(x,y), \tag{3}$$

где P_n и Q_n – взаимно простые многочлены с действительными коэффициентами, в случаях $n = 2;3$.

Настоящая работа является в некотором смысле продолжением упомянутой статьи [1], поэтому для удобства изложения будем придерживаться порядка нумерации формул, теорем, следствий, замечаний, утверждений и определений, имеющихся в ней.

Определение 2. Пусть преобразование

$$\overline{x} = x + ky, \quad \overline{y} = -kx + y \tag{$*$}$$

переводит систему (3) в систему

$$\frac{d\overline{x}}{dt} = \overline{P}_n(\overline{x}, \overline{y}), \quad \frac{d\overline{y}}{dt} = \overline{Q}_n(\overline{x}, \overline{y}). \qquad (4).$$

Прямую $y = kx$ назовем осью симметрии S-типа поля направлений системы (3), если

$$\overline{P}_n(\overline{x}, -\overline{y}) \equiv \overline{P}_n(\overline{x}, \overline{y}), \quad \overline{Q}_n(\overline{x}, \overline{y}) \equiv \overline{y}\,\overline{Q}_{n-1}(\overline{x}, \overline{y}), \quad \overline{Q}_{n-1}(\overline{x}, -\overline{y}) \equiv \overline{Q}_{n-1}(\overline{x}, \overline{y}),$$

где $\overline{Q}_i(\overline{x}, \overline{y})$ – многочлены степени $i(i = n, n-1)$, $\overline{P}_n(\overline{x}, \overline{y})$ – многочлен степени n.

Теорема 12. Если прямая $y = kx$ – ось симметрии S-типа векторного поля, определяемого системой (3), то эта прямая является инвариантной для системы (3), то есть имеет место равенство

$$\frac{Q_n(x, kx)}{P_n(x, kx)} \equiv k.$$

Доказательство. Прежде всего, заметим, что случаю $k = \infty$ соответствуют тождества:

$$P_n(x, y) \equiv xP_{n-1}(x, y), \quad P_{n-1}(-x, y) \equiv P_{n-1}(x, y), \quad Q_n(-x, y) \equiv Q_n(x, y),$$

а значит $x = 0$ не только ось симметрии S-типа, но и инвариантная прямая.

Пусть $y = kx$, $k \in R$ – ось симметрии S-типа системы (3). В результате преобразования $(*)$ система (3) перейдет в систему (4), где

$$\overline{P}_n(\overline{x}, \overline{y}) \equiv P_n(x, y) + kQ_n(x, y), \quad \overline{Q}_n(\overline{x}, \overline{y}) \equiv -kP_n(x, y) + Q_n(x, y). \tag{5}$$

В равенствах (5) x и y следует заменить по формулам:

$$x = \frac{\overline{x}}{k^2 + 1} - \frac{k\overline{y}}{k^2 + 1}, \quad y = \frac{k\overline{x}}{k^2 + 1} + \frac{\overline{y}}{k^2 + 1}. \tag{51}$$

Согласно определению 2 $\overline{Q}_n(\overline{x}, 0) \equiv 0$, т.е.

$$-kP_n(x, kx) + Q_n(x, kx) \equiv 0.$$

Из последнего тождества следует требуемое равенство

$$\frac{Q_n(x, kx)}{P_n(x, kx)} \equiv k. \tag{52}$$

Следствие 3. Если $y = kx$ – ось симметрии S-типа поля направлений системы (3), то имеет место тождество

$$Q_n(x, y) \equiv (y - kx)R_{n-1}(x, y) + kP_n(x, y),$$

где $R_{n-1}(x, y) = \sum\limits_{i+j=0}^{n-1} r_{ij} x^i y^j$.

Найдем коэффициентные условия того, что система (3) при $n = 3$ имеет в качестве оси симметрии S-типа прямую $y = kx$.

Согласно следствию 3 система (3) при $n = 3$ запишется в виде

$$\frac{dx}{dt} = P_3(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = (y - kx)R_2(x, y) + kP_3(x, y). \tag{53}$$

Сделаем в системе (53) преобразование $(*)$ и потребуем, чтобы прямая $\bar{y}=0$ была осью симметрии S-типа. В результате получим следующие ограничения на коэффициенты:

$$\begin{aligned}
&r_{01}=r_{10}k,\ r_{11}k^2-2(r_{02}-r_{20})k-r_{11}=0,\ a_{01}=(a_{10}-r_{00})k,\\
&(r_{01}-a_{11})k^2+(r_{10}+2a_{02}-2a_{20})k+a_{11}=0,\\
&(r_{02}-a_{12})k^3+(r_{11}-2a_{21}+3a_{03})k^2+(r_{20}-3a_{30}+2a_{12})k+a_{21}=0,\\
&(r_{20}-a_{30})k^3+(-r_{11}+a_{21})k^2+(r_{02}-a_{12})k+a_{03}=0.
\end{aligned} \tag{54}$$

Теорема 13. Прямая $y=kx$ является осью симметрии S-типа поля направлений системы дифференциальных уравнений (3) тогда и только тогда, когда она имеет вид

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt}&=a_{00}+a_{10}x+a_{01}y+a_{20}x^2+a_{11}xy+a_{02}y^2+a_{30}x^3+a_{21}x^2y+a_{12}xy^2+a_{03}y^3,\\
\frac{dy}{dt}&=(y-kx)(r_{00}+r_{10}x+r_{01}y+r_{20}x^2+r_{11}xy+r_{02}y^2)+\\
&+k(a_{00}+a_{10}x+a_{01}y+a_{20}x^2+a_{11}xy+a_{02}y^2+a_{30}x^3+a_{21}x^2y+a_{12}xy^2+a_{03}y^3),
\end{aligned} \tag{55}$$

причем коэффициенты в (55) удовлетворяют системе (54).

Рассмотрим случай двух осей симметрии S-типа кубической дифференциальной системы. Если система (3) при $n=3$ имеет две оси симметрии S-типа: $y=k_1x$, $y=k_2x$, то согласно следствию 3 имеют место равенства

$$Q_3(x,y)-k_1P_3(x,y)\equiv(y-k_1x)R_2(x,y), \tag{56}$$

$$Q_3(x,y)-k_2P_3(x,y)\equiv(y-k_2x)S_2(x,y). \tag{57}$$

Разрешив систему (56), (57) относительно P_3 и Q_3, получаем следующие соотношения:

$$P_3(x,y)=\frac{1}{k_2-k_1}[(y-k_1x)R_2(x,y)-(y-k_2x)S_2(x,y)], \tag{58}$$

$$Q_3(x,y)=\frac{1}{k_2-k_1}[k_2(y-k_1x)R_2(x,y)-k_1(y-k_2x)S_2(x,y)]. \tag{59}$$

Учитывая (58) и (59), а также замену переменной $d\tau=\dfrac{dt}{k_2-k_1}$, систему (3) при $n=3$ можно переписать в виде

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{d\tau}&=(y-k_1x)R_2(x,y)-(y-k_2x)S_2(x,y),\\
\frac{dy}{d\tau}&=k_2(y-k_1x)R_2(x,y)-k_1(y-k_2x)S_2(x,y).
\end{aligned} \tag{60}$$

Если система (60) имеет две взаимно перпендикулярные оси симметрии S-типа, то, очевидно, $k_1\cdot k_2=-1$ (если $k_1=0$, то $k_2=\infty$). Обозначим k_1 через k, тогда $k_2=-\dfrac{1}{k}$ $(k\neq 0)$ и системе (60) можно придать вид

$$\begin{aligned}\frac{dx}{d\tau} &= k(y-kx)R_2(x,y)-(x+ky)S_2(x,y),\\ \frac{dy}{d\tau} &= -(y-kx)R_2(x,y)-k(x+ky)S_2(x,y).\end{aligned}\tag{61}$$

Система (61) получена умножением обеих частей уравнений системы (60) на k, но при этом мы оставили прежнее обозначение времени τ.

Здесь $R_2(x,y)=\sum_{i+j=0}^{2} r_{ij}x^iy^j$, $S_2(x,y)=\sum_{i+j=0}^{2} s_{ij}x^iy^j$. Применяя к системе (61) преобразование $(*)$ и учитывая, что прямые $\bar{x}=0$ и $\bar{y}=0$ – оси симметрии S-типа, убеждаемся в выполнении следующих условий на коэффициенты системы (61):

$$r_{10}=r_{01}=s_{10}=s_{01}=0,\quad r_{11}k^2-2(r_{02}-r_{20})k-r_{11}=0,\quad s_{11}k^2-2(s_{02}-s_{20})k-s_{11}=0.$$

Тем самым доказана

Теорема 14. Две прямые $y=kx$ и $x=-ky$ являются осями симметрии S-типа системы (3) при $n=3$ тогда и только тогда, когда эта система имеет вид

$$\begin{aligned}\frac{dx}{d\tau} &= k(y-kx)\left(r_{00}+r_{20}x^2+r_{11}xy+r_{02}y^2\right)-(x+ky)\left(s_{00}+s_{20}x^2+s_{11}xy+s_{02}y^2\right),\\ \frac{dy}{d\tau} &= -(y-kx)\left(r_{00}+r_{20}x^2+r_{11}xy+r_{02}y^2\right)-k(x+ky)\left(s_{00}+s_{20}x^2+s_{11}xy+s_{02}y^2\right),\end{aligned}\tag{62}$$

причем выполняются условия

$$r_{11}k^2-2(r_{02}-r_{20})k-r_{11}=0,\tag{63}$$

$$s_{11}k^2-2(s_{02}-s_{20})k-s_{11}=0.\tag{64}$$

Пусть далее система (3) при $n=3$ имеет три оси симметрии S-типа, тогда система (60), кроме прямых $y=k_1x$ и $y=k_2x$, имеет еще третью ось симметрии S-типа $y=k_3x$. Согласно следствию 3 имеет место равенство

$$S_2(x,y)\equiv(y-k_3x)T_1(x,y)+R_2(x,y).\tag{65}$$

С учетом (65) перепишем систему (60) в виде

$$\begin{aligned}\frac{dx}{d\tau} &= (k_2-k_1)xR_2(x,y)-(y-k_2x)(y-k_3x)T_1(x,y),\\ \frac{dy}{d\tau} &= (k_2-k_1)yR_2(x,y)-k_1(y-k_2x)(y-k_3x)T_1(x,y).\end{aligned}\tag{66}$$

где $T_1(x,y)=t_{00}+t_{10}x+t_{01}y$, k_2 и k_3 определены по формулам (26) [1], $R_2(x,y)=\sum_{i+j=0}^{2} r_{ij}x^iy^j$, $k_1\in\left[0;\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\cup\left(\frac{1}{\sqrt{3}};\sqrt{3}\right]$.

Последовательно применяя преобразования $\bar{x}=x+k_iy$, $\bar{y}=-k_ix+y$ $(i=1,2,3)$ к системе (66) и учитывая после каждого преобразования, что прямая $\bar{y}=0$ – ось симметрии S-типа поля направлений получаемой в результате указанных преобразований системы, убедимся в выполнении условий

$$t_{10} = t_{01} = 0\,, \quad r_{01} = r_{10}k_1\,, \quad r_{11} = 0\,, \quad r_{02} = r_{20} \neq 0\,, \quad t_{00} = \frac{-\left(\sqrt{3} + 3k_1\right)}{2} r_{10}\,. \tag{67}$$

Рассматривая (67), приходим к выводу, что имеет место

Теорема 15. Система дифференциальных уравнений (3) при $n = 3$ имеет три оси симметрии S-типа: $y = k_1 x$, $y = k_2 x$, $y = k_3 x$ тогда и только тогда, когда эта система имеет вид

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{d\tau} &= 2\left(k_1^2 + 1\right)x\,\left[r_{00} + r_{10}\left(x + k_1 y\right) + r_{20}\left(x^2 + y^2\right)\right] + \\
&\quad + r_{10}\left[\left(1 - k_1\sqrt{3}\right)y - \left(k_1 + \sqrt{3}\right)x\right]\cdot\left[\left(1 + k_1\sqrt{3}\right)y - \left(k_1 - \sqrt{3}\right)x\right], \\
\frac{dy}{d\tau} &= 2\left(k_1^2 + 1\right)y\left[r_{00} + r_{10}\left(x + k_1 y\right) + r_{20}\left(x^2 + y^2\right)\right] + \\
&\quad + r_{10}k_1\left[\left(1 - k_1\sqrt{3}\right)y - \left(k_1 + \sqrt{3}\right)x\right]\cdot\left[\left(1 + k_1\sqrt{3}\right)y - \left(k_1 - \sqrt{3}\right)x\right].
\end{aligned} \tag{68}$$

При этом $k_1 \in \left[0; \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{3}}; \sqrt{3}\right]$, k_2 и k_3 определены по формулам (29).

Замечание 4. Обе части уравнений системы (66) предварительно мы разделили на $\frac{\sqrt{3}}{2\left(1 - k_1\sqrt{3}\right)}$ и обозначение переменной τ оставили без изменения. Кроме этого, в системе (68) $r_{11} \cdot r_{20} \neq 0$, ибо в противном случае либо правые части уравнений системы (68) имеют общий многочлен, либо эта система вырождается в квадратичную систему.

Рассмотрим теперь случай четырех осей симметрии S-типа системы (3) при $n = 3$.

Пусть $k_1 = tg\varphi_1$, $k_2 = tg\varphi_2$, $k_3 = tg\varphi_3$, $k_4 = tg\varphi_4$, где $0 \leq \varphi_1 < \varphi_2 < \varphi_3 < \varphi_4 < \pi$. Не уменьшая общности, примем $0 \leq \varphi_1 < \frac{\pi}{4}$, т.е. $0 \leq k_1 < 1$. Тогда в силу работы [2] имеют место соотношения $\varphi_2 - \varphi_1 = \varphi_3 - \varphi_2 = \varphi_4 - \varphi_3 = \frac{\pi}{4}$.

Отметим, что при $k_1 = 0$ имеют место равенства $k_2 = 1$, $k_3 = \infty$ ($x = 0$ – ось симметрии S-типа), $k_4 = -1$. Поэтому мы будем полагать, что $k_1 \in (0;1)$. Тогда

$$k_2 = \frac{1 + k_1}{1 - k_1}, \quad k_3 = \frac{-1}{k_1}, \quad k_4 = \frac{k_1 - 1}{1 + k_1}. \tag{$**$}$$

В предположении, что система (3) при $n = 3$ имеет четыре оси симметрии S-типа, эту систему можно привести к виду

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= \left(k_2 - k_1\right)xS_2(x, y) + \left(y - k_1 x\right)\left(y - k_3 x\right)\left(y - k_4 x\right)t_{00}\,, \\
\frac{dy}{dt} &= \left(k_2 - k_1\right)yS_2(x, y) + k_2\left(y - k_1 x\right)\left(y - k_3 x\right)\left(y - k_4 x\right)t_{00}\,,
\end{aligned} \tag{69}$$

где $S_2(x, y) = \sum_{i+j=0}^{2} s_{ij} x^i y^j$, $t_{00} \in R \setminus \{0\}$.

Последовательно применяя преобразования $\bar{x} = x + k_i y$, $\bar{y} = -k_i y + y$, $i = 1;2$, к системе (69) и учитывая после каждого такого преобразования, что прямые $\bar{x} = 0$ и $\bar{y} = 0$ являются осями симметрии S-типа поля направлений получаемой системы, убеждаемся в выполнении условий

$$S_{10} = S_{01} = 0, \quad S_{11} = \frac{t_{00}(k_1 - 1)}{k_1}, \quad S_{02} = S_{20} - \frac{2t_{00}}{k_1 + 1}, \quad t_{00} \in R \setminus \{0\}. \tag{70}$$

Таким образом, справедлива

Теорема 16. Система дифференциальных уравнений (3) при $n = 3$ имеет четыре оси симметрии S-типа: $y = k_1 x$, $y = k_2 x$, $y = k_3 x$, $y = k_4 x$, где $k_1 \in (0;1)$, k_2, k_3, k_4 заданы по формулам $(**)$, тогда и только тогда, когда эта система имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= (k_2 - k_1)x\left[S_{00} + S_{20}x^2 + S_{11}xy + S_{02}y^2\right] + (y - k_1 x)(y - k_3 x)(y - k_4 x)t_{00}, \\ \frac{dy}{dt} &= (k_2 - k_1)y\left[S_{00} + S_{20}x^2 + S_{11}xy + S_{02}y^2\right] + k_2(y - k_1 x)(y - k_3 x)(y - k_4 x)t_{00}, \end{aligned} \tag{71}$$

причем выполняются условия (70).

Теорема 17. Система дифференциальных уравнений (3) при $n = 3$ имеет четыре оси симметрии S-типа: $y = 0$, $y = x$, $y = -x$, $x = 0$ тогда и только тогда, когда эта система имеет вид

$$\frac{dx}{dt} = x\left[S_{00} + S_{20}\left(x^2 + y^2\right) + t_{00}y^2\right], \quad \frac{dy}{dt} = y\left[S_{00} + S_{20}\left(x^2 + y^2\right) + t_{00}x^2\right], \tag{72}$$

где $t_{00} \in R \setminus \{0\}$.

Далее рассмотрим вопрос об условиях S-симметрии квадратичной системы. Так как квадратичная система имеет лишь одну или три оси симметрии S-типа, то сначала рассмотрим случай одной оси симметрии.

Замечание 5. Теоремы 4 и 5, доказанные в случае осей симметрии N-типа системы (3) в работе [1], остаются в силе и в случае осей симметрии S-типа. Более того, оценка числа осей симметрии N-типа, данная в работе [2], также справедлива по отношению к оси симметрии S-типа.

Теорема 18. Прямая $y = kx$ является осью симметрии S-типа поля направлений системы дифференциальных уравнений (3) при $n = 2$ тогда и только тогда, когда эта система имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= a_{00} + a_{10}x + a_{01}y + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2, \\ \frac{dy}{dt} &= (y - kx)(r_{00} + r_{10}x + r_{01}y) + k\left(a_{00} + a_{10}x + a_{01}y + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2\right), \end{aligned} \tag{73}$$

и при этом выполняются условия

$$r_{01} = r_{10}k, \quad a_{01} = (a_{10} - r_{00})k, \tag{74}$$

$$2(a_{02} - a_{20})k + a_{11}\left(1 - k^2\right) + \left(k^2 + 1\right)kr_{10} = 0. \tag{75}$$

Пусть система (3) при $n = 2$ имеет три оси симметрии S-типа: $y = k_1 x$, $y = k_2 x$, $y = k_3 x$, где k_2 и k_3 удовлетворяют равенствам (26) [1]. Тогда по необходимости эта система имеет вид

-

$$\frac{dx}{dt}=(k_2-k_1)xR_1(x,y)-(y-k_2x)(y-k_3x)t_{00}\,,$$
$$\frac{dy}{dt}=(k_2-k_1)yR_1(x,y)-k_1(y-k_2x)(y-k_3x)t_{00}\,, \tag{76}$$

где $t_{00}\in R\setminus\{0\}$, $R_1(x,y)=r_{00}+r_{10}x+r_{01}y$.

Определим условия на коэффициенты системы (76), для этого последовательно осуществим преобразования $\bar{x}=x+k_iy$, $\bar{y}=-k_ix+y$ $(i=1,2,3)$. После каждого такого преобразования будем требовать, чтобы прямая $\bar{y}=0$ была осью симметрии S-типа поля направлений получаемой системы.

Теорема 19. Система дифференциальных уравнений (3) при $n=2$ имеет три оси симметрии S-типа: $y=k_1x$, $y=k_2x$, $y=k_3x$, где $k_1\in\left[0;\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\cup\left(\frac{1}{\sqrt{3}};\sqrt{3}\right]$, k_2 и k_3 заданы по формулам (26) [1], тогда и только тогда, когда эта система имеет вид

$$\frac{dx}{dt}=(k_2-k_1)x(r_{00}+r_{10}x+r_{01}y)-t_{00}(y-k_2x)(y-k_3x),$$
$$\frac{dy}{dt}=(k_2-k_1)y(r_{00}+r_{10}x+r_{01}y)-k_1t_{00}(y-k_2x)(y-k_3x), \tag{77}$$

причем

$$r_{01}=r_{10}k_1,\quad r_{10}(k_1-k_2)+t_{00}(1+k_2k_3)=0\,,\quad t_{00}\in R\setminus\{0\}. \tag{78}$$

Замечание 6. Система дифференциальных уравнений (3) при $n=2$ имеет три оси симметрии S-типа: $y=0$, $y=\sqrt{3}x$, $y=-\sqrt{3}x$ в том и только в том случае, когда эта система имеет вид

$$\frac{dx}{dt}=x\left(r_{00}\sqrt{3}-2t_{00}x\right)+t_{00}\left(3x^2-y^2\right),$$
$$\frac{dy}{dt}=y\left(r_{00}\sqrt{3}-2t_{00}x\right), \tag{79}$$

где $t_{00}\in R\setminus\{0\}$.

Утверждение 2. Существуют полиномиальные дифференциальные системы (3), обладающие как осями симметрии N-типа, так и осями симметрии S-типа.

Пример 1. Поле направлений системы дифференциальных уравнений $\frac{dx}{dt}=-2xy$, $\frac{dy}{dt}=y^2-x^2$ имеет три оси симметрии N-типа: $y=0$, $y=\sqrt{3}x$, $y=-\sqrt{3}x$ и столько же осей симметрии S-типа: $y=\frac{1}{\sqrt{3}}x$, $y=-\frac{1}{\sqrt{3}}x$, $x=0$.

Пример 2. Векторное поле, определяемое системой дифференциальных уравнений $\frac{dx}{dt}=x\left(3y^2-x^2\right)$, $\frac{dy}{dt}=y\left(3x^2-y^2\right)$ имеет четыре оси симметрии S-типа: $y=0$,

$x=0$, $y=x$, $y=-x$ и столько же осей симметрии N-типа: $y=\left(\sqrt{2}+1\right)x$, $y=-\left(\sqrt{2}+1\right)x$, $y=\left(\sqrt{2}-1\right)x$, $y=-\left(\sqrt{2}-1\right)x$.

Замечание 7. Ранее доказанную теорему 5 [1] о том, что дифференциальная система (3) при $n=2m$ $(m\in N)$ не может иметь четного числа осей симметрии, следует понимать в том смысле, что эта система не может иметь четного числа осей симметрии N-типа и четного числа осей симметрии S-типа.

В этой связи можно отметить, что справедливо

Утверждение 3. Существуют системы вида (3), которые при $n=2m$ $(m\in N)$ имеют четное число осей симметрии, причем половина из них – оси симметрии N-типа, а другая половина – оси симметрии S-типа.

Пример 3. Поле направлений системы дифференциальных уравнений $\dfrac{dx}{dt}=1-x^2+y^2$, $\dfrac{dy}{dt}=xy$ имеет одну ось симметрии N-типа $x=0$ и одну ось симметрии S-типа $y=0$. Впрочем, никаких других осей симметрии данная система не имеет. Это следует из того, что никакая прямая $y=kx$, $k\in R\setminus\{0\}$ не является изоклиной. Но, как нами ранее доказано, любая ось симметрии, будь то N-типа или S-типа, является изоклиной.

Нетрудно также проверить, что данная система имеет только два состояния равновесия: $(1;0)$, $(-1;0)$, и они являются простыми седлами.

Теорема 20. Пусть правые части уравнений системы дифференциальных уравнений (3) при $n=3$ содержат хотя бы один линейный или квадратичный член. Если эта система имеет три оси симметрии N-типа (S-типа), то она не имеет осей симметрии S-типа (N-типа).

Доказательство. Для определенности будем считать, что кубическая система дифференциальных уравнений имеет три оси симметрии N-типа, а также оси симметрии S-типа. Тогда, в силу заявленной симметрии, осей симметрии S-типа у системы (3) будет так же три. Иначе говоря, через начало координат кубической системы дифференциальных уравнений проходят шесть прямых изоклин (любая ось симметрии – прямая изоклина). Но это противоречит теореме 3.1 [3], согласно которой через особую точку $O(0;0)$ проходят не более пяти прямых изоклин.

Следствие 4. Если кубическая система дифференциальных уравнений имеет не менее трех осей симметрии (не важно, какого типа), причем правые части уравнений этой системы содержат хотя бы один некубический член, то она не имеет прямых изоклин, проходящих через начало координат и отличных от указанных осей симметрии.

Пример 4. Поле направлений системы дифференциальных уравнений $\dfrac{dx}{dt}=y\left(-3-2x+x^2+y^2\right)$, $\dfrac{dy}{dt}=-x\left(-3-2x+x^2+y^2\right)+3x^2-y^2$ имеет три оси симметрии N-типа: $y=0$, $y=\sqrt{3}x$, $y=-\sqrt{3}x$. Кроме этих трех прямых, данная система не имеет прямых изоклин, проходящих через точку покоя $O(0;0)$.

Пример 5. Система дифференциальных уравнений $\dfrac{dx}{dt}=y\left(1+x^2-y^2\right)$, $\dfrac{dy}{dt}=-x\left(2y^2-2x^2-1\right)$ имеет две оси симметрии N-типа: $y=0$, $x=0$ и столько же осей симметрии S-типа: $y = x$, $y = -x$. Никаких других прямых изоклин, проходящих через состояние равновесия $O(0;0)$, система не имеет.

Теорема 21. Пусть правые части уравнений системы дифференциальных уравнений (3) при $n = 2$ содержат хотя бы один линейный член. Если эта система имеет три оси симметрии N-типа (S-типа), то она не имеет осей симметрии S-типа (N-типа).

Доказательство аналогично доказательству предыдущей теоремы.

Теорема 22. Пусть квадратичная система дифференциальных уравнений имеет две оси симметрии при условии, что правые части уравнений этой системы содержат хотя бы один неквадратичный член. Тогда обе оси симметрии являются либо изоклинами нуля, либо изоклинами бесконечности.

Доказательство. Повернем координатные оси так, чтобы ось абсцисс совместилась с осью симметрии S-типа (N-типа). Тогда прямая $y = 0$ – изоклина нуля (изоклина бесконечности), а прямая $x = 0$ – ось симметрии N-типа (S-типа). По теореме 1 [1] (по теореме 12) $x = 0$ – изоклина нуля (изоклина бесконечности). Теорема доказана.

Пример 6. Векторное поле системы дифференциальных уравнений $\frac{dx}{dt} = xy$, $\frac{dy}{dt} = 1 - x^2 + y^2$ имеет две оси симметрии: $x = 0$ – ось симметрии S-типа, $y = 0$ – ось симметрии N-типа. Других осей симметрии данная система не имеет. Обоснуем это утверждение. Если квадратичная система имеет не менее трех прямых изоклин, то, по крайней мере, на двух из них эта система индуцирует различные направления (см. Т. 2.4 [3]). Так как все оси симметрии являются изоклинами и проходят через точку $O(0;0)$, то $O(0;0)$ – особая точка. Но в нашем случае это не так. Попутно заметим, что особыми точками системы являются $(-1;0)$, $(1;0)$ – центры.

Отметим, что система, приведенная в примере 3, также удовлетворяет условиям теоремы 22.

Из теорем 21 и 22 следует

Утверждение 4. Если квадратичная система дифференциальных уравнений имеет не менее двух осей симметрии при условии, что правые части уравнений этой системы содержат хотя бы один неквадратичный член, то она не имеет прямых изоклин, проходящих через начало координат $O(0;0)$ и отличных от указанных осей симметрии.

Пример 7. Поле направлений системы дифференциальных уравнений $\frac{dx}{dt} = x(1 - 2x) + 3x^2 - y^2$, $\frac{dy}{dt} = y(1 - 2x)$ имеет три оси симметрии S-типа: $y = 0$, $y = \sqrt{3}x$, $y = -\sqrt{3}x$. Через начало координат $O(0;0)$ не проходит ни одна прямая изоклина этой системы, отличная от указанных осей симметрии.

Теорема 23. Если поле направлений дифференциальной системы (3) имеет максимальное (конечное) число осей симметрии N-типа и такое же число осей симметрии S-типа, то правые части уравнений этой системы суть взаимно простые однородные многочлены n-ной степени.

Доказательство. Пусть система (3) имеет $n+1$ осей симметрии N-типа и столько же осей симметрии S-типа. Тогда общее число осей симметрии S-типа системы (3) равно $2n+2$, т.е. через начало координат $O(0;0)$ проходят не менее $2n+2$ прямых изоклин. Если бы правые части уравнений системы (3) содержали хотя бы один одночлен размерности m $(1 \le m < n)$, то число прямых изоклин системы, проходящих через точку $O(0;0)$, согласно теореме 3.1 [3] не превосходило бы $2m+1$, но $2m+1 < 2n+2$. Теорема доказана.

Примеры 1 и 2 иллюстрируют утверждение последней теоремы.

Теперь сформулируем теоремы об особых точках полиномиальных систем, имеющих оси симметрии.

Теорема 24. Пусть при n – нечетном $(n \ge 3)$ система дифференциальных уравнений (3) имеет n^2 особых точек в конечной части фазовой плоскости, а поле ее направлений симметрично относительно $n+1$ осей симметрии N-типа (осей симметрии S-типа нет) или относительно $n+1$ осей симметрии S-типа (осей симметрии N-типа нет). Тогда все особые точки системы расположены на осях симметрии, причем $O(0;0)$ – состояние равновесия системы.

Доказательство. Пусть L – одна из осей симметрии системы (3). Тогда эта прямая, как изоклина системы, проходит через n особых точек. Так как n – нечетное, то $O(0;0)$ – особая точка системы. Общее число особых точек системы, принадлежащих $n+1$ осям симметрии, равно $(n+1)n - n = n^2$. Следовательно, система не имеет состояний равновесия, расположенных вне осей симметрии. Теорема доказана.

Утверждение 5. В условиях теоремы 24 на всех осях системы (3) не может быть индуцировано одно и то же направление поля (3).

В самом деле, если предположить противное, то согласно работе [3] найдется линейное невырожденное преобразование, переводящее все $n+1$ оси симметрии либо в изоклину бесконечности, либо в изоклину нуля. Это означает, что в полученной таким образом системе правая часть одного из двух дифференциальных уравнений представляет собой произведение $n+1$ линейных множителей (т.е. многочлен степени $n+1$). Линейное преобразование, примененное к полиномиальной системе дифференциальных уравнений, не увеличивает степень многочлена.

Пример 8. Поле направлений дифференциальной системы $\frac{dx}{dt} = y\left(4 + x^2 - 4y^2\right)$, $\frac{dy}{dt} = -x\left(4 - 4x^2 + y^2\right)$ симметрично относительно четырех осей симметрии N - типа: $y=0$, $x=0$, $y=x$, $y=-x$, а сама система имеет девять состояний равновесия: $O(0;0)$, $A(0;1)$, $B(0;-1)$, $C(1;0)$, $D(-1;0)$, $E\left(\frac{2}{\sqrt{3}};\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$, $G\left(-\frac{2}{\sqrt{3}};-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$, $H\left(\frac{2}{\sqrt{3}};-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$, $F\left(-\frac{2}{\sqrt{3}};\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$. Легко видеть, что все указанные состояния равновесия расположены на осях симметрии, кроме того, в силу [3] система не имеет прямых изоклин, отличных от осей симметрии N-типа и проходящих через начало координат. Следовательно, мы находимся в условиях теоремы 24. Заметим также, что O, E, G, H, F – центры, а остальные состояния равновесия – простые седла.

Утверждение 6. Любая простая особая точка системы (3), расположенная на оси симметрии S-типа, является либо седлом, либо узлом.