УДК 512.55
ББК 22.144.3
К 59

Козлов В.А.
Кандидат физико-математических наук, доцент, зав. кафедрой математического анализа Армавирского государственного педагогического университета, e-mail: shagin196@ yandex.ru

Построение систем образующих кольца $K^*(G/H)$ одной серии однородных пространств G/H *
(Рецензирована)

Аннотация

Системы образующих $K^*(SU(N)/SU(2))\otimes Q$ *и их характеры Черна построены в явном виде для однородных пространств* $SU(N)/SU(2)$, *в которых группа* $SU(2)$ *дана тензорным произведением представлений небольших размерностей.*

Ключевые слова: K *-теория, кольцо* $K^*(X)$, *группа Ли, однородное пространство, представление группы Ли, характер Черна, операции Адамса.*

Kozlov V.A.
Candidate of Physics and Mathematics, Assistant Professor, Head of Mathematical Analysis Department of the Armavir State Pedagogical University, e-mail: shagin196@ yandex.ru

Construction of ring generating systems $K^*(G/H)$ of one series homogeneous spaces G/H

Systems of $K^*(SU(N)/SU(2))\otimes Q$ *generators and their Chern characters are constructed in an explicit form for homogeneous spaces* $SU(N)/SU(2)$ *in which group* $SU(2)$ *is given by tensor product of small dimension representations.*

Key words: K *-theory, ring* $K^*(X)$, *Lie group, homogeneous space, Lie group representation, Chern characters, Adams's operations.*

1. Образующие в кольце $K^*(SU(N)/SU(2))\otimes Q$

В [1] и [2] предложен алгоритм, позволяющий строить элементы группы $K^1(SU(N)/SU(2))\otimes Q$, в случае, когда компактная группа $SU(2)$ вложена в $SU(N)$ тензорным произведением своих неприводимых представлений, то есть вполне приводимым представлением. Там же доказано, что из этих элементов можно выбрать систему образующих всего кольца $K^*(SU(N)/SU(2))\otimes Q$. Доказано также, что характеры Черна этих представлений нетривиальны. Эти результаты носят характер «теоремы существования», причем, предполагают определенные ограничения.

Здесь строятся системы образующих и их характеры Черна в явном виде уже без ограничений, что позволяет надеяться снять ограничения и в общем случае.

* *Публикуется при финансовой поддержке РФФИ и администрации Краснодарского края. Проект № 09-01-96512 р_юг_а.*

Основные результаты [1] и [2] опишем в следующей форме.

Пусть стационарная группа $SU(2)$ дана представлением $\varphi = \varphi_p \otimes \varphi_l$, где φ_p и φ_l – неприводимые представления группы $SU(2)$ размерностей $p+1$ и $q+1$ соответственно. Обозначим $k_0 = p+l$.

Теорема 2. Элементы $\gamma(\theta_0), \gamma(\theta_1), \cdots, \gamma(\theta_{N-3})$ при нечетном k_0 и $\gamma(\theta'_0), \gamma(\theta'_1), \cdots, \gamma(\theta'_{N-3})$ при четном k_0 являются образующими в кольце $K^*(SU(N)/SU(2)) \otimes Q$, где группа $SU(2)$ дана в представлении $\varphi = \varphi_p \otimes \varphi_l$.

В теореме 1 $\theta_0, \theta_1, \cdots, \theta_{N-3}$ и $\theta'_0, \theta'_1, \cdots, \theta'_{N-3}$ - виртуальные представления группы $SU(N)$, обращающиеся в нуль при ограничении на $SU(2)$ (см. [1]):

$$\theta_i = \theta_i(\psi_1, \psi_{2^{r+i}}) = \operatorname{Re} s_t \left(P_1(t) - \psi_1, P_{2^{r+i}}(t) - \psi_{2^{r+i}}\right), \ i = 0,1,2,\cdots, \ N-3,$$

r – достаточно велико, $t = \varphi_1$ – 2-мерное простейшее неприводимое представление группы $SU(2)$, рассматриваемое как образующий элемент в кольце $RSU(2)$ представлений группы $SU(2)$.

Если $k_0 = p+l$ четное, то соответственно

$$\theta'_i = \theta'_i(\psi_1, \psi_{2^{r+i}}) = \operatorname{Re} s_u \left(P_1(u) - \psi_1, P_{2^{r+i}}(u) - \psi_{2^{r+i}}\right), \ i = 0,1,2,\cdots, N-3,$$

r – достаточно велико, $u = t \otimes t - t^2$.

И при k_0 нечетном:

$$ch\gamma(\theta_i) = \frac{c_3(f(\theta_i))x_5}{2!} - \frac{c_4(f(\theta_i))x_7}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^{N-1} c_N(f(\theta_i))x_{2N-1}}{(N-1)!}, \qquad (1)$$

где

$$c_s(f(\theta_i)) = \left(2^{2(r+i)} - 2^{s(r+i)}\right)(-1)^{k_0-1} \frac{1}{6} \sum_{j=0}^{l} (k_j+1)(k_j+2k_j) \cdot \operatorname{Re} s_t \left(\frac{\tilde{P}_1(\tilde{t})}{\tilde{t}}, \frac{\tilde{P}_{2^{r+i}}(\tilde{t})}{\tilde{t}} \right); \qquad (2)$$

при k_0 четном:

$$ch\gamma(\theta'_i) = \frac{c_3(f(\theta'_i))x_5}{2!} - \frac{c_4(f(\theta'_i))x_7}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^{N-1} c_N(f(\theta'_i))x_{2N-1}}{(N-1)!}, \qquad (3)$$

где

$$c_s(f(\theta'_i)) = \left(2^{2(r+i)} - 2^{s(r+i)}\right)(-1)^{k_0-1} \frac{1}{24} \sum_{j=0}^{l} (k_j+1)(k_j^2+2k_j) \cdot \operatorname{Re} s_{\tilde{u}} \left(\frac{\tilde{P}'_1(\tilde{u})}{\tilde{u}}, \frac{\tilde{P}'_{2^{r+i}}(\tilde{u})}{\tilde{u}} \right), \qquad (4)$$

$i = 0,1,2,..., N-3$; $x_5, x_7, \cdots, x_{2N-1}$ – примит ивные образующие кольца когомологий $H^*(SU(N)/SU(2)) \otimes Q$. Здесь $P_i(t) = \psi_i(\varphi(t))$ – полином от переменной t в кольце представлений $RSU(2)$, соответственно $P_i(u) = \psi_i(\varphi(u))$; $\tilde{P}(\tilde{t})$ – получен из $P_i(t) - N$ подстановкой $t = \tilde{t}+2$, $\tilde{t} = t-2$, N – N-мерное, 2 – 2-мерное тривиальные представления группы $SU(2)$: $\tilde{P}(\tilde{t}) = P_i(\tilde{t}) - N$. Соответственно $\tilde{P}(\tilde{u}) = P_i(\tilde{u}) - N$.

2. Построение систем образующих и их характеров Черна

1^0. Рассмотрим случай, когда группа $SU(2)$ дана в представлении $\varphi = \varphi_1 \otimes \varphi_1$, $\dim \varphi_1 = 2$, φ – неприводимое представление $SU(2)$, определяющее вложение: $SU(2) \subset SU(4)$. Группа $SU(4)$ задана в простейшем представлении Λ_1 наименьшей размерности: $\dim \Lambda_1 = 4$ (Λ_1 – первая внешняя степень группы $SU(4)$).

Из формулы Клебша-Гордона:

$$\varphi = \varphi_1 \otimes \varphi_1 = \varphi_2 + \varphi_0, \ \dim \varphi_2 = 3, \ \dim \varphi_0 = 1,$$

φ_0 – одномерное тривиальное, φ_2 – неприводимое представление группы $SU(2)$.

В терминах теоремы 1 $N = 4$, $k_0 = 1 + 1 = 2$ – четное и требуется найти

$$\theta_i' = \theta_i'(\psi_1, \psi_2) = \operatorname{Re} s_u \left(P_1(u) - \psi_1, P_2(u) - \psi_2\right), \tag{5}$$

$$\theta_i' = \theta_i'(\psi_1, \psi_4) = \operatorname{Re} s_u \left(P_1(u) - \psi_1, P_4(u) - \psi_4\right), \tag{6}$$

и, соответственно,

$$ch\gamma(\theta_0') = \frac{c_3(f(\theta_0'))x_5}{2!} - \frac{c_4(f(\theta_0'))x_7}{3!}, \tag{7}$$

$$ch\gamma(\theta_1') = \frac{c_3(f(\theta_1'))x_5}{2!} - \frac{c_4(f(\theta_1'))x_7}{3!}, \tag{8}$$

$u = t \otimes t = t^2$.

Заметим, что в нашем случае r не требуется предполагать достаточно большим, возьмем $r = 1$.

Вычислим полиномы $P_1(u), P_2(u), P_4(u)$ от переменной u в кольце представлений $RSU(2)$. По определению $P_1(u) = \psi_1(\varphi(u))$, $P_2(u) = \psi_2(\varphi(u))$, $P_4(u) = \psi_4(\varphi(u))$. Очевидно, $\varphi(u) = u$. Выразить операции Адамса ψ_i через внешние степени можно с помощью формул Ньютона:

$$\psi_k - \Lambda_1 \psi_{k-1} + \Lambda_2 \psi_{k-2} - \ldots + (-1)^k \Lambda_k = 0,$$

$$\psi_k - \Lambda_1 \psi_{k-1} + \Lambda_2 \psi_{k-2} - \ldots + (-1)^n \Lambda_n \psi_{k-n} = 0 \quad \text{при} \quad k > n.$$

Следовательно, $\psi_1 = \Lambda_1$, $\psi_2 = \Lambda_1^2 - 2\Lambda_2$, $\psi_4 = \Lambda_1^4 - 4\Lambda_1^2\Lambda_2 + 2\Lambda_2^2 - 4\Lambda_1\Lambda_3 - 4$, $\Lambda_4 = 1$, $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3$ – внешние степени группы $SU(4)$.

Ограничения $\Lambda_1(u), \Lambda_2(u), \Lambda_3(u)$ на подгруппу $SU(2)$, данную в представлении $u = \varphi_1 \otimes \varphi_1$, найдем, используя методы теории представлений:

$$\Lambda_1(u) = u, \ \Lambda_2(u) = 2u - 2, \ \Lambda_4(u) = u.$$

Найдем теперь $\psi_1(\varphi(u))$, $\psi_2(\varphi(u))$, $\psi_4(\varphi(u))$:

$$\psi_1(\varphi(u)) = \Lambda_1(u) = u,$$

$$\psi_2(\varphi(u)) = \Lambda_1^2(u) - 2\Lambda_2(u) = u^2 - 4u + 4,$$

$$\psi_4 = \Lambda_1^4(u) - 4\Lambda(u)\Lambda_2(u) + 2\Lambda_2^2(u) - 4\Lambda_1(u)\Lambda_3(u) - 4 == u^4 - 8u^3 + 20u^2 - 16u + 4. \quad (9)$$

Итак,

$$P_1(u) = u, \quad P_2(u) = u^2 - 4u + 4, P_4(u) = u^4 - 8u^3 + 20u^2 - 16u + 4. \quad (10)$$

Тогда

$$\theta_0' = \theta_0'(\psi_1, \psi_2) = \operatorname{Re} s_u \left(P_1(u) - \psi_1, P_2(u) - \psi_2\right) =$$

$$= \operatorname{Re} s_u (u - \psi_1, u^2 - 4u + 4 - \psi_2) = \psi_1^2 - 4\psi_1 - \psi_2 + 4;$$

$$\theta_0' = \psi_1^2 - 4\psi_1 - \psi_2 + 4. \quad (11)$$

$$\theta_1' = \theta_1'(\psi_1, \psi_4) = \operatorname{Re} s_u \left(P_1(u) - \psi_1, P_4(u) - \psi_4\right) =$$

$$= \operatorname{Re} s_u (u - \psi_1, u^4 - 8u^3 + 20u^2 - 16u + 4 - \psi_4) = \psi_1^8 - 8\psi_1^7 + 20\psi_1^6 - 16\psi_1^5 + 4\psi_1^4 - \psi_1^4\psi_2;$$

$$\theta_0' = \psi_1^8 - 8\psi_1^7 + 20\psi_1^6 - 16\psi_1^5 + 4\psi_1^4 - \psi_1^4\psi_2. \quad (12)$$

Найдем характеры Черна $\gamma(\theta_0')$ и $\gamma(\theta_1')$. В соответствии с (7), (8) вычислим коэффициенты Дынкина отображений $f(\theta_0')$ и $f(\theta_1')$ (считаем $r = 1$).

$$C_3\left(f(\theta_0')\right) = \left(2^2 - 2^3\right)\cdot(-1)^{k_0 - 1}\frac{1}{24}\left[\sum_{j=0}^{1}\left((k_j + 1)(k_j^2 + 2k_j)\right)\right]\cdot \operatorname{Re} s_{\tilde{u}}\left(\frac{\tilde{P}_1(\tilde{u})}{\tilde{u}}, \frac{\tilde{P}_2(\tilde{u})}{\tilde{u}}\right),$$

здесь $k_0 = p + l$, $k_1 = p + l - 2$, $k_2 = p + l - 4, \ldots,$ $k_l = p + l - 2l$;

$$C_3\left(f(\theta_0')\right) = \operatorname{Re} s_{\tilde{u}}\left(\frac{\tilde{P}_1(\tilde{u})}{\tilde{u}}, \frac{\tilde{P}_2(\tilde{u})}{\tilde{u}}\right);$$

$$\tilde{P}_1(u) = (\tilde{u} + 4) - \tilde{u}, \quad P_2(u) = \tilde{u}^2 + 4\tilde{u}, \quad P_4(u) = u^4 - 8u^3 + 20u^2 - 16u + 4;$$

$$\operatorname{Re} s_{\tilde{u}}\left(\frac{\tilde{P}_1(\tilde{u})}{\tilde{u}}, \frac{\tilde{P}_2(\tilde{u})}{\tilde{u}}\right) = 1; \qquad C_3\left(f(\theta_0')\right) = 1.$$

$$C_4\left(f(\theta_0')\right) = \left(2^{2(r-0)} - 2^{4(r+0)}\right)\cdot(-1)^{k_0 - 1}\frac{1}{24}\left[\sum_{j=0}^{1}\left((k_j + 1)(k_j^2 + 2k_j)\right)\right]\cdot \operatorname{Re} s_{\tilde{u}}\left(\frac{\tilde{P}_1(\tilde{u})}{\tilde{u}}, \frac{\tilde{P}_4(\tilde{u})}{\tilde{u}}\right) =$$

$$= 12\operatorname{Re} s_{\tilde{u}}\left(\frac{\tilde{P}_1(\tilde{u})}{\tilde{u}}, \frac{\tilde{P}_2(\tilde{u})}{\tilde{u}}\right) = 1, \;\; r = 1; \qquad \operatorname{Re} s_{\tilde{u}}\left(\frac{\tilde{P}_1(\tilde{u})}{\tilde{u}}, \frac{\tilde{P}_2(\tilde{u})}{\tilde{u}}\right) = 1; \qquad C_4\left(f(\theta_0')\right) = 12.$$

$$ch\gamma(\theta_0') = \frac{x_5}{2} - 2x_7. \quad (13)$$

Для отображения $f(\theta_1')$ $(r = 1)$:

$$C_3\left(f\left(\theta_1'\right)\right)=\left(2^{2(r+1)}-2^{3(r+1)}\right)\cdot(-1)^{k_0-1}\frac{1}{24}\left[\sum_{j=0}^{1}\left(\left(k_j+1\right)\left(k_j^2+2k_j\right)\right)\right]\cdot \operatorname{Res}_{\tilde u}\left(\frac{\tilde P_1(\tilde u)}{\tilde u},\frac{\tilde P_4(\tilde u)}{\tilde u}\right);$$

$$C_3\left(f\left(\theta_1'\right)\right)=16\operatorname{Res}_{\tilde u}\left(\frac{\tilde P_1(\tilde u)}{\tilde u},\frac{\tilde P_4(\tilde u)}{\tilde u}\right).$$

Находим $\tilde P(\tilde u)$:

$$\tilde P(\tilde u)=\tilde u^4+8\tilde u^3+20\tilde u^2+16\tilde u,$$

тогда

$$C_3\left(f\left(\theta_1'\right)\right)=16.$$

$$C_4\left(f\left(\theta_1'\right)\right)=\left(2^{2(r+1)}-2^{4(r+1)}\right)\cdot(-1)^{k_0-1}\frac{1}{24}\left[\sum_{j=0}^{1}\left(\left(k_j+1\right)\left(k_j^2+2k_j\right)\right)\right]\cdot \operatorname{Res}_{\tilde u}\left(\frac{\tilde P_1(\tilde u)}{\tilde u},\frac{\tilde P_4(\tilde u)}{\tilde u}\right);$$

$$C_4\left(f\left(\theta_1'\right)\right)=240.$$

Таким образом,

$$ch\gamma(\theta_1')=8x_5-40x_7. \tag{14}$$

Как следует из вычислений $ch\gamma(\theta_0')$ и $ch\gamma(\theta_1')$ невырождены и элементы $\gamma(\theta_0')$ и $\gamma(\theta_1')$ – система образующих.

2^0. Пусть группа $SU(2)$ дана в представлении $\varphi=\varphi_2\otimes\varphi_1$ (в терминах диаграмм Дынкина $\overset{2}{\circ}\otimes\overset{1}{\circ}$), $\dim\varphi=6$, $N=6,\ p=2,\ l=1,\ k_0=p+l=3$. По формуле Клебша-Гордона получим разложение тензорного произведения $\varphi_2\otimes\varphi_1$ в прямую сумму неприводимых компонент:

$$\varphi=\varphi_2\otimes\varphi_1=\varphi_3+\varphi_1,\quad k_0=3,\quad k_1=1. \tag{15}$$

При описанных условиях образующими элементами в кольце $K^*\left(SU(N)/SU(2)\right)\otimes Q$ будут (см. т. 1 при k_0 – нечетном):

$$\gamma(\theta_0),\ \gamma(\theta_1),\ \gamma(\theta_2),\ \gamma(\theta_3). \tag{16}$$

При этом

$$\theta_i=\theta_i(\psi_1,\psi_{2^{r+i}})=\operatorname{Res}_t(P_1(t)-\psi_1,P_{2^{r+i}}(t)-\psi_{2^{r+i}}), \tag{17}$$

$i=0,1,2,3$. Как и в 1^0 будем проводить вычисления при $r=1$.

Прежде всего, требуется представить φ в виде полинома от переменной $t=\varphi_1$ в кольце представлений $RSU(2)$: из (15) получаем

$$\varphi(t)=t^3-t. \tag{18}$$

В кольце представлений $RSU(2)$ группы Ли $SU(6)$ образующими элементами служат ее внешние степени – $\Lambda_0,\Lambda_1,\Lambda_2,\Lambda_3,\Lambda_4,\Lambda_5$.

Построим теперь полиномы $P_1(t),P_2(t),P_4(t),P_8(t),P_{16}(t)$. Напомним, что операции Адамса ψ_i обладают свойствами:

$$\psi_s(u_1+u_2)=\psi_s(u_1)+\psi_s(u_2),\quad \psi_s(u_1\otimes u_2)=\psi_s(u_1)\psi_s(u_2),\quad \psi_{st}(u)=\psi_s(\psi_t(u)).$$

По определению $P_i(t)$:

$$P_1(t)=\psi_1(\varphi(t))=\Lambda_1(\varphi)=\varphi(t)=t^3-t,\quad P_2(t)=\psi_2(\varphi(t))=\psi_1(\psi_2(t)).$$

В кольце $RSU(2)$ элемент t – первая внешняя степень λ_1 группы $SU(2)$: $\psi_1(t)=\lambda_1$, $\psi_2(t)=t^2-2$, $\lambda_2=1$. Таким образом, $\psi_1(t)=t$, $\psi_2(t)=\lambda_1^2-2\lambda_1$, тогда

$$P_2(t)=\psi_1(\psi_2(t))=\psi_1(t^2-2)=P_1(t^2-2)=(t^2-2)^3-(t^2-2).$$

Аналогично,

$$P_4(t)=\psi_4(\varphi(t))=\psi_2(\psi_2(t))=((t^2-2)^2-2)^3-((t^2-2)-2);$$

$$P_8(t)=\psi_8(\varphi(t))=\psi_2(\psi_4(t))=(((t^2-2)^2-2)^2-2)^3-(((t^2-2)-2)^2-2);$$

$$P_{16}(t)=\psi_{16}(\varphi(t))=\psi_2(\psi_8(t))=((((t^2-2)^2-2)^2-2)^2-2)^3-$$
$$((((t^2-2)-2)^2-2)^2-2).$$

Характеры Черна элементов $\gamma(\theta_0)$, $\gamma(\theta_1)$, $\gamma(\theta_2)$, $\gamma(\theta_3)$ найдем по формулам (1), (2):

$$ch\gamma(\theta_i)=\frac{c_3(f(\theta_i))x_5}{2!}-\frac{c_4(f(\theta_i))x_7}{3!}+\frac{c_5(f(\theta_i))x_9}{5!}-\frac{c_6(f(\theta_i))x_{11}}{6!},\quad i=0,1,2,3. \tag{18}$$

При вычислении коэффициентов Дынкина положим $r=1$:

$$c_s(f(\theta_i))=\left(2^{2(r+i)}-2^{s(r+i)}\right)(-1)^{k_0-1}\frac{1}{6}\sum_{j=0}^{l}(k_j+1)(k_j+2k_j)\cdot \operatorname{Re}s_t\left(\frac{\tilde P_1(\tilde t)}{\tilde t},\frac{\tilde P_{2^{r+i}}(\tilde t)}{\tilde t}\right), \tag{19}$$

$s=3,4,5,6$; $i=0,1,2,3$.

$$ch\gamma(\theta_0)=\left(-22x_5+22x_7-\frac{77}{6}x_9+\frac{11}{12}x_{11}\right)\cdot \operatorname{Re}s_{\tilde t}\left(\frac{\tilde P_1(\tilde t)}{\tilde t},\frac{\tilde P_2(\tilde t)}{\tilde t}\right);$$

$$ch\gamma(\theta_1)=\left(-586x_5+440x_7-\frac{682}{3}x_9+\frac{1397}{15}x_{11}\right)\cdot \operatorname{Re}s_{\tilde t}\left(\frac{\tilde P_1(\tilde t)}{\tilde t},\frac{\tilde P_4(\tilde t)}{\tilde t}\right);$$

$$ch\gamma(\theta_2)=\left(-2464x_5+7392x_7-\frac{44968}{3}x_9+9009x_{11}\right)\cdot \operatorname{Re}s_{\tilde t}\left(\frac{\tilde P_1(\tilde t)}{\tilde t},\frac{\tilde P_8(\tilde t)}{\tilde t}\right);$$

$$ch\gamma(\theta_3)=\left(-21120x_5+11\cdot128\cdot85x_7+11\cdot(2^8-2^{20})x_9-11\cdot(2^8-2^{24})x_{11}\right)\times$$
$$\times \operatorname{Re}s_{\tilde t}\left(\frac{\tilde P_1(\tilde t)}{\tilde t},\frac{\tilde P_{16}(\tilde t)}{\tilde t}\right),$$

x_5, x_7, x_9, x_{11} – примитивные образующие кольца когомологий $K^*\big(SU(N)/SU(2)\big)\otimes Q$.

Осталось проверить нетривиальность результантов.

Вычислим значения $\operatorname{Res}_{\tilde t}\left(\frac{\tilde P_1(\tilde t)}{\tilde t},\frac{\tilde P_2(\tilde t)}{\tilde t}\right)$:

$\tilde P_1(t) = P_1(\tilde t + 2) - 6 = (\tilde t + 2)^3 - (\tilde t + 2) = \tilde t^2 + 6\tilde t + 11\tilde t$.

$\tilde P_2(t) = P_2(\tilde t + 2) - 6 = ((\tilde t + 2)^3 - 2)^3 - ((\tilde t + 2)^2 - 2) =$

$\tilde t^6 + 2\tilde t^5 + 54\tilde t^4 + 112\tilde t^3 + 10\tilde t^2 + 44\tilde t$.

$$\operatorname{Res}_{\tilde t}\left(\frac{\tilde P_1(\tilde t)}{\tilde t},\frac{\tilde P_2(\tilde t)}{\tilde t}\right) = \operatorname{Res}_{\tilde t}\left(\frac{\tilde t^2 + 6\tilde t + 11\tilde t}{\tilde t},\frac{\tilde t^6 + 2\tilde t^5 + 54\tilde t^4 + 112\tilde t^3 + 10\tilde t^2 + 44\tilde t}{\tilde t}\right) =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 6 & 11 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 11 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 11 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 6 & 11 \\ 1 & 12 & 54 & 112 & 10 & 44 & 0 \\ 0 & 1 & 12 & 54 & 112 & 10 & 44 \end{vmatrix} = 11 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 396 \neq 0.$$

Аналогично, прямым подсчетом, проверяется нетривиальность результантов

$$\operatorname{Res}_{\tilde t}\left(\frac{\tilde P_1(\tilde t)}{\tilde t},\frac{\tilde P_4(\tilde t)}{\tilde t}\right),\ \operatorname{Res}_{\tilde t}\left(\frac{\tilde P_1(\tilde t)}{\tilde t},\frac{\tilde P_8(\tilde t)}{\tilde t}\right),\ \operatorname{Res}_{\tilde t}\left(\frac{\tilde P_1(\tilde t)}{\tilde t},\frac{\tilde P_{16}(\tilde t)}{\tilde t}\right).$$

Следовательно, при $r = 1$ характеры Черна $ch\gamma(\theta_0)$, $ch\gamma(\theta_1), ch\gamma(\theta_2), ch\gamma(\theta_3)$ невырождены, и в условиях теоремы 1 элементы $\gamma(\theta_0)$, $\gamma(\theta_1), \gamma(\theta_2), \gamma(\theta_3)$ являются системой образующих в кольце $K^*(SU(6)/SU(2))$, где группа $SU(2)$ дана в представлении $\varphi = \varphi_2 \otimes \varphi_1$, а $SU(6)$ – своим простейшим нетривиальным представлением.

Приводимые здесь примеры, а также другие вычисления с высокой степенью вероятности позволяют предполагать, что предъявленное к r требование быть достаточно большим (оно возникло в процессе доказательства (см. [1]) избыточно.

Примечания:

1. Козлов В.А. Об элементах кольца $K^*(G/H)$ и их характерах Черна для одной серии однородных пространств G/H // Труды ФОРА. 2009. № 14. С. 5-12. URL: http://fora.adygnet.ru
2. Козлов В.А. Образующие кольца $K^*(G/H)$ и их характеры Черна одной серии однородных пространств G/H // Вестник Адыгейского государственного университета. Сер. «Естественно-математические и технические науки». 2010. Вып. 2. С. 29-33. URL: http://vestnik.adygnet.ru