УДК 517.91
ББК 22.161.61
С 78

Сташ А.Х.
Старший преподаватель кафедры математического анализа и методики преподавания математики факультета математики и компьютерных наук Адыгейского государственного университета, тел. (8772) 59-39-03

Асимптотические свойства решений линейных дифференциальных систем
(Рецензирована)

Аннотация
В статье изучаются асимптотические свойства решений систем линейных однородных и неоднородных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. Рассматривается отдельно специальный класс линейных систем с почти постоянной матрицей.
Ключевые слова: *асимптотические свойства, линейная дифференциальная система, характеристический показатель Ляпунова.*

Stash A.Kh.
Senior Lecturer of Department of Mathematical Analysis and Methodology of Teaching Mathematics at Faculty of Mathematics and Computer Sciences of Adyghe State University, ph. (8772) 59-39-05

Asymptotic properties of solutions to linear differential systems

Abstract
The paper discusses asymptotic properties of solutions to systems of linear homogeneous and heterogeneous differential equations with variable coefficients. Also the author examines a special set of linear systems with the almost constant matrix. The investigation is carried out by the analytical methods.
Key words: *asymptotic properties, linear differential system, Lyapunov's characteristic exponent.*

1. Введение

В настоящей статье изучаются асимптотические свойства решений линейных дифференциальных систем.

Рассмотрим линейную однородную дифференциальную систему

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x, \quad x \in R^n, \tag{1}$$

где $A(t)$ – матрица-функция, определенная и непрерывная на промежутке $[t_0, +\infty)$.

Для системы (1) задача Коши имеет единственное решение, определенное на всей бесконечной полупрямой [1, с. 70].

Напомним некоторые известные факты из теории устойчивости, которые понадобятся нам в дальнейшем.

Определение 1 [1]**.** Говорят, что дифференциальные системы

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x) \quad \text{и} \quad \frac{dy}{dt} = g(t,y)$$

асимптотически эквивалентны, если между их решениями $x(t)$ и $y(t)$ можно установить взаимно однозначное соответствие такое, что

$$\lim_{t\to\infty}[x(t) - y(t)] = 0 .$$

Определение 2 [2]**.** Характеристическим показателем Ляпунова (короче, характеристическим показателем) непрерывной вектор-функции $x(t)$ называется число (или символ $-\infty$ или $+\infty$), определяемое формулой

$$\chi[x] = \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t} \ln\|x(t)\|$$

(здесь знак $\|\cdot\|$ означает евклидову норму).

Имеет место следующая

Теорема [1] **(Левинсон).** Пусть решения системы

$$\frac{dx}{dt} = Ax, \tag{2}$$

где A – постоянная $(n\times n)$ - матрица, ограничены на $[t_o,\ \infty)$.

Тогда система

$$\frac{dy}{dt} = [A + B(t)]y, \tag{3}$$

где

$$B(t) \in C[t_0,\infty) \quad \text{и} \quad \int_{t_0}^{\infty}\|B(t)\|dt < \infty,$$

асимптотически эквивалентна системе (2).

Доказательство теоремы Левинсона можно найти, например, в [1].

Хорошо известна следующая

Лемма 1 [1] **(Гронуолла-Беллмана).** Пусть непрерывная на промежутке $[t_0,+\infty)$ функция $u(t) \ge 0$ удовлетворяет при $t \ge t_0$ интегральному неравенству

$$u(t) \le c + \int_{t_0}^{t} f(\tau)u(\tau)d\tau,$$

где c – положительная константа, а $f(t) \ge 0$ непрерывная на $[t_0,+\infty)$ функция.

Тогда при $t \ge t_0$ имеет место оценка

$$u(t) \le c\exp\int_{t_0}^{t} f(\tau)d\tau .$$

Справедлива следующая

Лемма 2. Для любого решения системы (1) справедлива следующая двусторонняя оценка

$$\|x(t_0)\|\exp\left[-\int_{t_0}^{t}\|A(t_1)\|dt_1\right] \le \|x(t)\| \le \|x(t_0)\|\exp\left[\int_{t_0}^{t}\|A(t_1)\|dt_1\right] \quad \text{при} \quad t \ge t_0. \tag{4}$$

Для доказательства неравенства (4) рассмотрим функцию $r(t) := \|x(t)\|$, где $x(t)$ – нетривиальное решение системы (1). Дифференцируя обе части равенства $r(t)^2 = (x(t), x(t))$ и используя неравенство Коши для оценки скалярного произведения, получаем

$$\left|\frac{dr(t)}{dt}\right| \le \left\|\frac{dx(t)}{dt}\right\|,$$

или в силу (1)

$$\left|\frac{dr(t)}{dt}\right| \le \|A(t)\| \cdot r(t).$$

Поскольку $x(t)$ – нетривиальное решение системы (1), то по теореме существования и единственности $r(t) > 0$ для всех $t \in [t_0, +\infty)$. Поэтому из последнего неравенства имеем

$$-\|A(t)\|dt \le \frac{dr(t)}{r(t)} \le \|A(t)\|dt, \quad t \in [t_0, +\infty).$$

Интегрируя обе части последнего дифференциального неравенства от t_0 до t, получаем оценку (4). Лемма 2 доказана.

Ниже нами даны полные доказательства утверждений, принадлежащих Беллману, Бебернесу, Демидовичу, Коддингтону и Левинсону.

2. Асимптотическое поведение решений однородной системы

Сначала рассмотрим однородные системы.

Теорема 1 (Демидович). Пусть задана линейная система (1). Тогда для любого ее решения $x(t)$ справедливо соотношение:

$$\int_{t_o}^{t}\|\dot{x}(\tau)\|d\tau \le \|x(t_0)\|\exp\left[\int_{t_0}^{t}\|A(\tau)\|d\tau - 1\right] \quad \text{при} \quad t \ge t_0. \tag{5}$$

Далее, если

$$\int_{t_0}^{\infty}\|A(\tau)\|d\tau < \infty, \tag{6}$$

то для любого решения $x(t)$ системы (1) существует $\lim_{t\to\infty} x(t)$.

Доказательство. Из системы (1), с учетом свойств нормы, имеем

$$\|\dot{x}(t)\| \le \|A(t)\| \cdot \|x(t)\|. \tag{7}$$

Отсюда с учетом леммы 3 получаем при $t \ge t_0$

$$\|\dot{x}(t)\| \le \|A(t)\| \cdot \|x(t_0)\| \exp \int_{t_0}^{t} \|A(\tau)\| d\tau = \frac{d}{dt}\left(\|x(t_0)\| \cdot \left[\exp \int_{t_0}^{t} \|A(\tau)\| d\tau + C \right] \right). \tag{8}$$

Интегрируя обе части неравенства (8) от t_0 до t, будем иметь при $t \ge t_0$

$$\int_{t_o}^{t} \|\dot{x}(\tau)\| d\tau \le \|x(t_0)\| \exp\left[\int_{t_0}^{t} \|A(\tau)\| d\tau + C \right] - \|x(t_0)\| \cdot [1 + C] = \|x(t_0)\| \exp\left[\int_{t_0}^{t} \|A(\tau)\| d\tau - 1 \right]. \tag{9}$$

Таким образом, установлена справедливость неравенства (5).

Докажем теперь существование предела любого решения $x(t)$ системы (1).

Очевидно, что любое решение системы (1) удовлетворяет интегральному уравнению

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} A(\tau) x(\tau) d\tau. \tag{10}$$

Выберем t_1 и t_2 так, чтобы $t_2 \ge t_1 \ge t_0$. С учетом установленной выше оценки (5), будем иметь

$$\|x(t_2) - x(t_1)\| = \left\| \int_{t_0}^{t_2} A(\tau)x(\tau)d\tau - \int_{t_0}^{t_1} A(\tau)x(\tau)d\tau \right\| = \left\| \int_{t_1}^{t_2} A(\tau)x(\tau)d\tau \right\| \le \int_{t_1}^{t_2} \|A(\tau)x(\tau)\| d\tau =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \|\dot{x}(\tau)\| d\tau \le \|x(t_1)\| \cdot \left[\exp \int_{t_1}^{t_2} \|A(\tau)\| d\tau - 1 \right] \le \|x(t_1)\| \cdot \left[\exp \int_{t_1}^{\infty} \|A(\tau)\| d\tau - 1 \right].$$

В силу леммы 2, с учетом условия (6), каждое решение системы (1) ограничено на $[t_o,\ \infty)$. Следовательно, из последнего неравенства, с учетом (6), получаем

$$\|x(t_2) - x(t_1)\| \to 0 \quad \text{при} \quad t_1 \to \infty. \tag{11}$$

Из соотношения (11) в силу критерия Коши следует существование предела каждого решения $x(t)$ системы (1). Теорема доказана.

Теорема 2 (Бебернес). Пусть $X(t)$ ($X(0) = E$) – нормированная фундаментальная матрица системы (1), где $A(t) \in C[0,\ \infty)$. Пусть, далее, $B(t) \in C[0,\ \infty)$-$(n \times n)$ – матрица такая, что

$$\int_{0}^{\infty} \|X^{-1}(t)B(t)X(t)\| dt < \infty. \tag{12}$$

Тогда решения системы

$$\frac{dy}{dt} = [A(t) + B(t)]y \tag{13}$$

представимы в виде

$$y(t) = X(t)c(t), \tag{14}$$

где существует

$$\lim_{t\to\infty} c(t) = c\,. \tag{15}$$

Доказательство. Покажем, что решения системы (13) представимы в виде (14). В самом деле, рассматривая в (13) слагаемое $B(t)y$ как свободный член и применяя метод вариаций произвольных постоянных Лагранжа, получим, что каждое решение $y(t)$ этой системы удовлетворяет следующему интегральному уравнению

$$y(t) = X(t)y(0) + \int_0^t X(t)X^{-1}(\tau)B(\tau)y(\tau)d\tau\,,$$

или

$$y(t) = X(t)\left[y(0) + \int_0^t X^{-1}(\tau)B(\tau)y(\tau)d\tau \right] = X(t)c(t)$$

(где $c(t) = y(0) + \int_0^t X^{-1}(\tau)B(\tau)y(\tau)d\tau$).

Подставим значение $y(t)$ в систему (13):

$$\dot{X}(t)c(t) + X(t)\dot{c}(t) = A(t)X(t)c(t) + B(t)X(t)c(t)\,. \tag{16}$$

Так как $X(t)$ фундаментальная матрица системы (1), то

$$\dot{X}(t) = A(t)X(t)\,. \tag{17}$$

С учетом (17) равенство (16) принимает вид:

$$X(t)\dot{c}(t) = B(t)X(t)c(t)\,. \tag{18}$$

Умножая обе части равенства (18) на $X^{-1}(t)$, получим

$$\frac{dc(t)}{dt} = X^{-1}(t)B(t)X(t)c(t)\,. \tag{19}$$

По условию матрица $X^{-1}(t)B(t)X(t)$ абсолютно интегрируема, поэтому в силу леммы 1 полученная система асимптотически эквивалентна системе с нулевой матрицей

$$\frac{dz}{dt} = 0\,. \tag{20}$$

Из определения асимптотической эквивалентности систем следует, что

$$\lim_{t\to\infty}[c(t) - c] = 0\,,$$

где c – решение системы (20). Теорема доказана полностью.

Теорема 3 (Беллман). Пусть наряду с системой (1) задана еще система

$$\frac{dy}{dt} = B(t)y \tag{21}$$

с непрерывной матрицей на $[0,\ \infty)$ и

$$\int_0^\infty \|B(t)-A(t)\|\cdot\|X(t)\|\cdot\|X^{-1}(t)\|dt<\infty, \tag{22}$$

где $\dot{X}(t)=A(t)X(t)$, $X(0)=E$.

Тогда решения системы (21) представимы в виде

$$y(t)=X(t)c+o(\|X(t)\|) \tag{23}$$

(c – постоянный вектор).

Доказательство. Решение системы (21) будем искать в виде $y(t)=X(t)c(t)$. Подставляя в систему (21) значение $y(t)$, будем иметь

$$\dot{X}(t)c(t)+X(t)\dot{c}(t)=B(t)X(t)c(t). \tag{24}$$

Заменяя в этом равенстве $\dot{X}(t)$ на $A(t)X(t)$, получим

$$A(t)X(t)c(t)+X(t)\dot{c}(t)=B(t)X(t)c(t). \tag{25}$$

После несложных преобразований система (25) принимает вид

$$\frac{dc(t)}{dt}=X^{-1}(t)[B(t)-A(t)]X(t)c(t). \tag{26}$$

Очевидно, что полученная система асимптотически эквивалентна системе с нулевой матрицей в силу условия (22). Рассуждая аналогично, как и при доказательстве теоремы 2, получаем

$$\lim_{t\to\infty} c(t)=c. \tag{27}$$

Из равенства (27) имеем

$$c(t)=c+o(1). \tag{28}$$

Подставляя найденное значение $c(t)$ в выражение (14), получим утверждение теоремы. Теорема доказана.

3. Асимптотическое поведение решений неоднородной системы

Изучим теперь поведение решений неоднородных систем.

Теорема 4 (Демидович). Пусть линейная однородная система

$$\frac{dx}{dt}=Ax \tag{29}$$

с постоянной матрицей A асимптотически устойчива, а неоднородная возмущенная система

$$\frac{dy}{dt}=[A+B(t)]y+f(t) \tag{30}$$

такова, что

$$B(t),\ f(t) \in C[t_0,\ \infty), \tag{31}$$

$$B(t) \to 0 \quad \text{при} \quad t \to \infty, \tag{32}$$

$$\int_{t_0}^{\infty} \| f(t) \| dt < \infty. \tag{33}$$

Тогда все решения $y(t)$ системы (30) имеют предел

$$\lim_{t \to \infty} y(t) = 0. \tag{34}$$

Доказательство. Из асимптотической устойчивости системы (29) и условия (32) следует в силу теоремы [1, с. 114] асимптотическая устойчивость системы

$$\frac{dz}{dt} = [A + B(t)]z. \tag{35}$$

Пусть $Z(t) = (z^{(1)}(t), z^{(2)}(t), ..., z^{(n)}(t))$ – нормированная фундаментальная матрица этой системы и $\chi[z^{(k)}(t)] = \alpha_k$ $(k = 1,...,n)$. Как известно [2, с. 99], характеристический показатель осуществляет оценку роста решения (принимая за начальный момент не $t = 0$, а какое-либо $t = t_0$):

$$\|z^{(k)}(t)\| \le \|z^{(k)}(t_0)\| D_\varepsilon e^{(\alpha_k + \varepsilon)(t - t_0)} \quad (k = 1,...,n). \tag{36}$$

Общее решение системы (35) имеет вид

$$z(t) = Z(t)c,$$

где c – произвольный постоянный вектор. По определению нормы матрицы

$$\|Z(t)Z^{-1}(t_1)\| = \max_{y \ne 0} \frac{\|Z(t)Z^{-1}(t_1)y\|}{\|y\|}.$$

Полагая $Z^{-1}(t_1)y = c$, будем иметь

$$\|Z(t)Z^{-1}(t_1)\| = \max_{y \ne 0} \frac{\|Z(t)Z^{-1}(t_1)y\|}{\|y\|} = \max \frac{\|Z(t)c\|}{\|Z(t_1)c\|} = \max \frac{\|z(t)\|}{\|z(t_1)\|},$$

где max берется по всем решениям $z(t)$ системы (35). Отсюда, с учетом (36) при $t_0 = t_1$, получим

$$\|Z(t)Z^{-1}(t_1)\| = \max \frac{\|z(t)\|}{\|z(t_1)\|} \le \max \frac{\|z(t_1)\| D_\varepsilon e^{(\alpha + \varepsilon)(t - t_1)}}{\|z(t_1)\|} = D_\varepsilon e^{(\alpha + \varepsilon)(t - t_1)}, \tag{37}$$

где $\alpha = \max_k \alpha_k$.

В силу замечания [1, с. 148] общее решение системы (35) может быть записано в виде

$$z = \sum_{i=1}^{n} c_i \xi_i(t) e^{\alpha_i t} \ ,$$

где c_i произвольные постоянные, $\chi[\xi_i(t)] = 0$, α_i – точки спектра, $\xi_i(t)e^{\alpha_i t}$ – линейно независимые частные решения. При этом α_i повторяется столько раз, сколько раз повторяется частное решение с характеристическим показателем α_i в нормальной фундаментальной системе решений. Поэтому, допустив неотрицательность хотя бы одного из α_i, придем к противоречию с теоремой [1, с. 83]. Таким образом, все α_i отрицательны.

В неравенстве (37) выберем $\varepsilon > 0$ столь малым, чтобы имело место неравенство

$$\alpha + \varepsilon < 0 . \tag{38}$$

Известно, что каждое решение системы (30) удовлетворяет интегральному уравнению

$$y(t) = Z(t) y(t_0) + \int_{t_0}^{t} Z(t) Z^{-1}(t_1) f(t_1) dt_1 . \tag{39}$$

В силу теоремы [1, с. 83]

$$\|Z(t)\| \to 0 \quad \text{при} \quad t \to \infty . \tag{40}$$

Из равенства (39) с учетом неравенства (37) получим

$$\|y(t)\| \le \|Z(t)\| \cdot \|y(t_0)\| + \int_{t_0}^{t} D_\varepsilon e^{(\alpha+\varepsilon)(t-t_1)} \|f(t_1)\| dt_1 .$$

Воспользовавшись первой теоремой о среднем на отрезке $[t_0,\ t]$, получим

$$\|y(t)\| \le \|Z(t)\| \cdot \|y(t_0)\| + D_\varepsilon e^{(\alpha+\varepsilon)(t-\eta)} \int_{t_0}^{t} \|f(t_1)\| dt_1 ,$$

где $\eta \in (t_0,\ t)$.

Переходя в последнем неравенстве к пределу при $t \to \infty$ и учитывая условия (33), (38), (40), получим (34). Теорема доказана.

Теорема 5 (Демидович). Пусть выполняются условия теоремы 4, кроме (32) и (33). Пусть, далее

$$f(t) \to 0 \quad \text{при} \quad t \to \infty , \tag{41}$$

$$\int_{t_0}^{\infty} \|B(t)\| dt < \infty . \tag{42}$$

Тогда все решения $y(t)$ системы (30) имеют предел (34).

Доказательство. Из асимптотической устойчивости системы (29) в силу теоремы [1, с. 89] следует, что собственные значения $\lambda_j(A)$ матрицы A обладают отрицательными вещественными частями. Положим

$$\alpha = \max_j \mathrm{Re}\,\lambda_j(A) < 0 \tag{43}$$

и выберем число $\varepsilon > 0$ столь малым, чтобы имело место неравенство

$$\alpha + \varepsilon < 0\,. \tag{44}$$

В уравнении (30) сделаем замену переменных

$$y = e^{At} z\,. \tag{45}$$

Тогда

$$\frac{dy}{dt} \equiv e^{At}\frac{dz}{dt} + Ae^{At}z = [A + B(t)]e^{At}z + f(t)$$

и, следовательно,

$$\frac{dz}{dt} = e^{-At}B(t)e^{At}z + e^{-At}f(t)\,.$$

Переходя к интегральному уравнению, будем иметь

$$z(t) = z(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{-A\tau}B(\tau)e^{A\tau}z(\tau)d\tau + \int_{t_0}^{t} e^{-A\tau}f(\tau)d\tau\,.$$

Отсюда, на основании формулы (45), для решения $y(t)$ $(t_0 \le t < \infty)$ получаем интегральное уравнение

$$y(t) = e^{A(t-t_0)}y(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}B(\tau)y(\tau)d\tau + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}f(\tau)d\tau\,.$$

Производя оценку по норме, при $t \ge t_0$ найдем

$$\|y(t)\| \le \left\|e^{A(t-t_0)}\right\| \cdot \|y(t_0)\| + \int_{t_0}^{t} \left\|e^{A(t-\tau)}\right\| \cdot \|B(\tau)\| \cdot \|y(\tau)\| d\tau + \int_{t_0}^{t} \left\|e^{A(t-\tau)}\right\| \cdot \|f(\tau)\| d\tau\,.$$

Как известно [1, с. 57],

$$\left\|e^{tA}\right\| \le ce^{(\alpha+\varepsilon)t} \text{ при } t \ge 0\,,$$

где $c = c(\varepsilon)$ – некоторая положительная постоянная. Поэтому

$$\|y(t)\| \le c_1\|y(t_0)\|e^{(\alpha+\varepsilon)(t-t_0)} + \int_{t_0}^{t} ce^{(\alpha+\varepsilon)(t-\tau)}\|B(\tau)\| \cdot \|y(\tau)\| d\tau + \int_{t_0}^{t} ce^{(\alpha+\varepsilon)(t-\tau)}\|f(\tau)\| d\tau$$

или

$$e^{-(\alpha+\varepsilon)t}\|y(t)\| \le c_1\|y(t_0)\|e^{-(\alpha+\varepsilon)t_0} + \int_{t_0}^{\infty} ce^{-(\alpha+\varepsilon)\tau}\|f(\tau)\| d\tau + \int_{t_0}^{t} c\|B(\tau)\| \cdot e^{-(\alpha+\varepsilon)\tau}\|y(\tau)\| d\tau\,. \tag{46}$$

Из условия (41) следует, что функции $\|f(t)\|$ и $e^{\alpha t}$ эквивалентны при $t \to \infty$. Следовательно,

$$\int_{t_0}^{\infty} e^{-(\alpha+\varepsilon)\tau}\| f(\tau)\| d\tau = \int_{t_0}^{\infty} e^{-(\alpha+\varepsilon)\tau} e^{\alpha\tau} d\tau = \int_{t_0}^{\infty} e^{-\varepsilon\tau} d\tau = \frac{e^{-\varepsilon t_0}}{\varepsilon}.$$

Положим

$$c_1\|y(t_0)\| e^{-(\alpha+\varepsilon)t_0} + \int_{t_0}^{\infty} c e^{-(\alpha+\varepsilon)\tau}\| f(\tau)\| d\tau =: M\ . \tag{47}$$

Из неравенства (46) с учетом (47) получим

$$e^{-(\alpha+\varepsilon)t}\|y(t)\| \le M + \int_{t_0}^{t} c\|B(\tau)\| \cdot e^{-(\alpha+\varepsilon)\tau}\|y(\tau)\| d\tau\ . \tag{48}$$

Отсюда, применяя лемму Гронуолла-Беллмана, будем иметь

$$e^{-(\alpha+\varepsilon)t}\|y(t)\| \le M \exp\left[\int_{t_0}^{t} c\|B(\tau)\| d\tau\right].$$

Следовательно,

$$\|y(t)\| \le M \exp\left[(\alpha+\varepsilon)t + \int_{t_0}^{t} c\|B(\tau)\| d\tau\right]. \tag{49}$$

На основании условия (42) найдется такое K, что для всех $t \ge t_0$ имеет место неравенство

$$\exp\left(\int_{t_0}^{t} c\|B(\tau)\| d\tau\right) \le K\ .$$

Из оценки (49) с учетом последнего неравенства, получаем

$$\|y(t)\| \le MK \exp[(\alpha+\varepsilon)t].$$

Переходя к пределу в последнем неравенстве при $t \to \infty$, получим заключение теоремы.

4. Асимптотическое поведение решений системы с почти постоянной матрицей

Имеет место следующая

Теорема 6 (Коддингтон, Левинсон). Пусть задана система (35), где постоянная матрица A имеет характеристические корни $\lambda_j = \lambda_j(A)$ $(j = 1,...,n)$ с простыми элементарными делителями и

$$\int_{0}^{\infty}\|B(t)\| dt < \infty\ . \tag{50}$$

Тогда существует фундаментальная система решений $z^{(j)}(t)$ $(j = 1,...,n)$ таких, что

$$\lim_{t\to\infty} z^{(j)}(t)e^{-\lambda_j t} = c_j, \qquad (51)$$

где c_j – соответствующие собственные векторы матрицы A.

Доказательство. Пусть C – постоянная матрица, приводящая матрицу A к диагональному, т.е. $C^{-1}AC = L$, где матрица L диагональна. Преобразование $z \to Cz$ переводит уравнение (35) в уравнение того же вида, но в котором матрица A будет уже диагональной, а новая матрица $B(t)$ также снова абсолютно интегрируема. Поэтому будем считать, что это преобразование уже выполнено.

Пусть λ_k – фиксированное характеристическое число, для которого

$$...\mathrm{Re}(\lambda_{k-1}) \le \mathrm{Re}(\lambda_k) \le \mathrm{Re}(\lambda_{k+1}) \le ..., \qquad (52)$$

а $y_k = e^{\lambda_k t}c_k = colon[0,...0,e^{\lambda_k t},0,...0]$, где $e^{\lambda_k t}$ стоит на k-том месте.

Представим фундаментальную матрицу системы

$$\frac{dy}{dt} = Ay \qquad (53)$$

в виде

$$e^{At} = Y_1(t) + Y_2(t), \qquad (54)$$

где

$$Y_1(t) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & . & . & 0 \\ . & 0 & e^{\lambda_k t} & 0 & . & \vdots \\ . & . & 0 & 0 & 0 & . \\ . & . & . & . & \ddots & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . & 0 \end{pmatrix}, \quad Y_2(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & . & . & 0 \\ . & 0 & 0 & 0 & . & \vdots \\ . & . & 0 & e^{\lambda_{k+1} t} & 0 & . \\ . & . & . & . & \ddots & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}. \qquad (55)$$

Рассмотрим уравнение

$$z(t) = e^{\lambda_k t}c_k + \int_a^t Y_1(t-s)B(s)z(s)ds - \int_t^\infty Y_2(t-s)B(s)z(s)ds. \qquad (56)$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что уравнение (35) является следствием уравнения (56).

Пусть $z_0 = y_k$ и

$$z_{m+1} = y_k + \int_a^t Y_1(t-s)B(s)z_m(s)ds - \int_t^\infty Y_2(t-s)B(s)z_m(s)ds, \qquad (57)$$

где a выбрано настолько большим, что

$$n\int_a^\infty \|B(t)\|dt < \frac{1}{2}. \qquad (58)$$

Покажем сначала по индукции, что при $t \ge a$ верно неравенство

$$\|z_m\| \le 2ne^{\operatorname{Re}(\lambda_k)t}. \tag{59}$$

Очевидно, что неравенство выполняется при $m = 0$. Предположим, что неравенство имеет место для некоторого m, и выведем отсюда его справедливость для $m+1$.

Имеем

$$\|z_{m+1}\| \le \|y_k\| + \int_a^t \|Y_1(t-s)B(s)z_m(s)\|ds + \int_t^\infty \|Y_2(t-s)B(s)z_m(s)\|ds \le ne^{\operatorname{Re}(\lambda_k)t} +$$

$$+ k\int_a^t e^{\operatorname{Re}(\lambda_k)(t-s)}\|B(s)\|2ne^{\operatorname{Re}(\lambda_k)s}ds + (n-k)\int_t^\infty e^{\operatorname{Re}(\lambda_n)(t-s)}\|B(s)\|2ne^{\operatorname{Re}(\lambda_k)s}ds \le$$

$$\le ne^{\operatorname{Re}(\lambda_k)t} + 2kne^{\operatorname{Re}(\lambda_k)t}\int_a^\infty \|B(s)\|ds + 2n(n-k)e^{\operatorname{Re}(\lambda_k)t}\int_a^\infty \|B(s)\|ds \le ne^{\operatorname{Re}(\lambda_k)t} + ne^{\operatorname{Re}(\lambda_k)t} = 2ne^{\operatorname{Re}(\lambda_k)t}.$$

Из оценки (59) следует сходимость второго интеграла в формуле (57). Тем самым доказано, что функции z_m определены и непрерывны на $[a, +\infty)$.

Чтобы показать сходимость функциональной последовательности z_m, рассмотрим ряд $\sum_{m=0}^{\infty}(z_{m+1} - z_m)$. По индукции докажем, что

$$\|z_{m+1} - z_m\| \le \frac{ne^{\operatorname{Re}(\lambda_k)t}}{2^{m+1}}. \tag{60}$$

Имеем

$$\|z_1 - z_0\| \le \int_a^t \|Y_1(t-s)B(s)z_0(s)\|ds + \int_t^\infty \|Y_2(t-s)B(s)z_0(s)\|ds \le$$

$$\le k\int_a^t e^{\operatorname{Re}(\lambda_k)(t-s)}\|B(s)\|e^{\operatorname{Re}(\lambda_k)s}ds + (n-k)\int_t^\infty e^{\operatorname{Re}(\lambda_n)(t-s)}\|B(s)\|e^{\operatorname{Re}(\lambda_k)s}ds \le$$

$$\le ke^{\operatorname{Re}(\lambda_k)t}\int_a^t \|B(s)\|ds + (n-k)e^{\operatorname{Re}(\lambda_k)t}\int_t^\infty \|B(s)\|ds \le \frac{ne^{\operatorname{Re}(\lambda_k)t}}{2}.$$

Пусть неравенство $\|z_m - z_{m-1}\| \le \dfrac{ne^{\operatorname{Re}(\lambda_k)t}}{2^m}$ верно. Тогда имеем

$$\|z_{m+1} - z_m\| \le \int_a^t \|Y_1(t-s)B(s)\|\|z_m - z_{m-1}\|ds + \int_t^\infty \|Y_2(t-s)B(s)\|\|z_m - z_{m-1}\|ds \le$$

$$\le k\int_a^t e^{\operatorname{Re}(\lambda_k)(t-s)}\|B(s)\|\frac{ne^{\operatorname{Re}(\lambda_k)s}}{2^m}ds + (n-k)\int_t^\infty e^{\operatorname{Re}(\lambda_n)(t-s)}\|B(s)\|\frac{ne^{\operatorname{Re}(\lambda_k)s}}{2^m}ds \le$$

$$\le \frac{kne^{\operatorname{Re}(\lambda_k)t}}{2^m}\int_a^\infty \|B(s)\|ds + \frac{(n-k)ne^{\operatorname{Re}(\lambda_k)t}}{2^m}\int_a^\infty \|B(s)\|ds \le \frac{ne^{\operatorname{Re}(\lambda_k)t}}{2^{m+1}}.$$

Таким образом, неравенство (60) верно для любого натурального m. Следовательно, для достаточно большого a ряд, а значит, и функциональная последовательность (57), сходится равномерно на любом интервале значений t и предельная функция $z(t)$ непрерывна. В силу неравенства (59) имеет место

$$\|z(t)\| \le 2ne^{\mathrm{Re}(\lambda_k)t}. \tag{61}$$

Переходя к пределу при $m \to \infty$ в равенстве (57) (что возможно на основании оценки (59)), получаем уравнение (56). Это означает, что предельная функция является решением уравнения (56), а значит, и решением уравнения (35).

Пусть $z^{(1)}, z^{(2)}, ..., z^{(n)}$ – решения, соответствующие различным характеристическим числам $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$, т.е.

$$z^{(k)}(t) = y_k + \int_a^t Y_1(t-s)B(s)z^{(k)}(s)ds - \int_t^\infty Y_2(t-s)B(s)z^{(k)}(s)ds. \tag{62}$$

Составим линейную комбинацию этих решений и приравняем ее к нулю, т.е.

$$\sum_{k=1}^n \mu_k z^{(k)} = 0,$$

или

$$\sum_{k=1}^n \mu_k y_k + \int_a^t \sum_{k=1}^n \mu_k Y_{1k}(t-s)B(s)z^{(k)}ds - \int_t^\infty \sum_{k=1}^n \mu_k Y_{2k}(t-s)B(s)z^{(k)}ds = 0. \tag{63}$$

При $t = a$ последнее равенство принимает вид

$$\sum_{k=1}^n \mu_k y_k - \int_a^\infty \sum_{k=1}^n \mu_k Y_{2k}(a-s)B(s)z^{(k)}ds = 0,$$

или в развернутом виде

$$\int_a^\infty \left[\mu_1 \begin{pmatrix} 0 & 0 & ... & 0 \\ 0. & e^{\lambda_2(a-s)} & ... & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & ... & e^{\lambda_n(a-s)} \end{pmatrix} B(t)z^{(1)} + ... + \mu_{n-1} \begin{pmatrix} 0 & ... & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & e^{\lambda_n(a-s)} \end{pmatrix} B(t)z^{(n-1)} + \mu_n \begin{pmatrix} 0 & ... & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} B(t)z^{(n)} \right] ds =$$

$$= \mu_1 \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 a} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + ... + \mu_{n-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ e^{\lambda_{n-1} a} \\ 0 \end{pmatrix} + \mu_n \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ e^{\lambda_n a} \end{pmatrix}.$$

Все матрицы Y_{2k} имеют первую строку нулевой. Значит, и вектор, стоящий под знаком интеграла, имеет первую компоненту, равную нулю. Приравнивая соответствующие компоненты обеих частей, получаем $\mu_1 e^{\lambda_1 a} = 0$, откуда $\mu_1 = 0$. Затем рассматриваем вторую строку матриц Y_{2k}, проводим аналогичное рассуждение со вторыми компонентами векторов и т.д. В результате получим, что все $\mu_k = 0$. Линейная независимость решений $z^{(k)}(t)$ установлена.

Пусть ε произвольное положительное число. Из уравнения (62) с учетом (61) имеем:

$$e^{-\mathrm{Re}(\lambda_k)t}\left\|z^{(k)}(t)-e^{\lambda_k t}c_k\right\| \le 2ne^{-\mathrm{Re}(\lambda_k)t}\int_a^t e^{\mathrm{Re}(\lambda_k)(t-s)}\|B(s)\|e^{\mathrm{Re}(\lambda_k)s}ds$$

$$+2ne^{-\mathrm{Re}(\lambda_k)t}\int_t^\infty e^{\mathrm{Re}(\lambda_n)(t-s)}\|B(s)\|e^{\mathrm{Re}(\lambda_k)s}ds \le 2ne^{-\mathrm{Re}(\lambda_k)t}\int_a^t e^{(\mathrm{Re}(\lambda_k)-\varepsilon)(t-s)}\|B(s)\|e^{\mathrm{Re}(\lambda_k)s}ds+2n\int_t^\infty\|B(s)\|ds$$

$$\le 2n\int_a^t e^{-\varepsilon(t-s)}\|B(s)\|ds+2n\int_t^\infty\|B(s)\|ds \le 2ne^{-\frac{\varepsilon}{2}t}\int_a^{\frac{t}{2}}\|B(s)\|ds+2n\int_{\frac{t}{2}}^t\|B(s)\|ds+2n\int_t^\infty\|B(s)\|ds$$

$$=2ne^{-\frac{\varepsilon}{2}t}\int_a^{\frac{t}{2}}\|B(s)\|ds+2n\int_{\frac{t}{2}}^\infty\|B(s)\|ds.$$

Переходя к пределу при $t \to \infty$, получаем условие (51).

Теорема полностью доказана.

Автор благодарит профессора М.М. Шумафова за внимание к работе и ряд ценных замечаний.

Примечания:

1. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967. 473 с.
2. Теория показателей Ляпунова / Б.Ф. Былов, Р.Э. Виноград, Д.М. Гробман [и др.]. М.: Наука, 1966. 576 с.

References:

1. Demidovich B.P. Lectures on mathematical theory of stability. M.: Nauka, 1967. 473 pp.
2. Lyapunov's theory of indicators / B.F. Bylov, R.E. Vinograd, D.M. Grobman [etc.]. M.: Nauka, 1966. 576 pp.