
УДК 519.178
ББК 22.174
Р 34

Резников А.В.

Старший преподаватель кафедры прикладной математики и информационных технологий факультета математики и компьютерных наук Адыгейского государственного университета, тел. (8772) 59-39-04, e-mail: trot99@mail.ru

**Распознавание предфрактальных графов с затравкой,
удовлетворяющей условию Оре, при условии что смежность
«старых» ребер в траектории предфрактального графа сохраняется**
(Рецензирована)

Аннотация

В статье рассматривается задача распознавания предфрактальных графов. Для задач такого вида в общем случае неизвестны переборные решения. Изучение свойств предфрактальных графов позволило разработать переборный алгоритм распознавания предфрактальных графов с n -вершинной затравкой, удовлетворяющей условию Оре, при условии, что смежность «старых» ребер в траектории предфрактального графа сохраняется.

Ключевые слова: предфрактальный граф, распознавание образов, условие Оре.

Reznikov A.V.

Senior Lecturer of Department of Applied Mathematics and Information Technologies of the Faculty of Mathematics and Computer Sciences, the Adyghe State University, ph. (8772) 59-39-04, e-mail: trot99@mail.ru

**Recognition of prefractal graphs with a primer
satisfying the Ore condition, provided that a contiguity
of «old» edges in a path of the prefractal graph remains**

Abstract

The paper examines the problem of recognition of prefractal graphs. For this sort of problems inexhaustive solutions are generally unknown. A study of properties of prefractal graphs has allowed the development of an inexhaustive algorithm of recognition of prefractal graphs with n -vertex priming, satisfying the Ore condition, provided that a contiguity of «old» edges in a path of the prefractal graph remains.

Key words: prefractal graph, algorithm recognition, the Ore condition.

В статье предлагается решение задачи распознавания [1–4] предфрактальных графов [5–9]. В свою очередь, такая задача является частным случаем задачи распознавания фракталов [9–11]. В настоящее время изучение задач распознавания предфрактальных графов является актуальным научным направлением [6].

В статье рассматривается предфрактальный граф [6] $G_L = (V_L, E_L)$, порожденный затравкой $H = (W, Q)$.

Процесс построения графа G_L , а именно траектории [6] G_L, G_{L-1}, \dots, G_1 состоит в том, что на каждом этапе каждая вершина с помощью операции замены вершины затравкой (ЗВЗ) [6] заменяется затравкой H .

Если степень вершины v предфрактального графа $G_L = (V_L, E_L)$ ($v \in V_L$) не

меньше k , то вершину v назовем k -вершиной.

Будем говорить, что вершина v предфрактального графа $G_L = (V_L, E_L)$ ($v \in V_L$) называется «старой», если она инцидентна хотя бы одному «старому» ребру [6], остальные вершины будем называть «новыми».

Обозначение. Пусть v ($v \in V$) – вершина графа $G = (V, E)$. Обозначим через $\rho(v)$ – степень вершины v [12].

Условие Оре. Говорят, что n -вершинный граф $G = (V, E)$ удовлетворяет условию Оре, если для любой пары его вершин v_1 и v_2 ($v_1, v_2 \in V$) выполняется условие $\rho(v_1) + \rho(v_2) \geq n$.

Теорема 1 [6]. Пусть в предфрактальном графе $G_L = (V_L, E_L)$ две вершины v_1 и v_2 , принадлежат одному блоку первого ранга $Z = (W', Q')$ ($Z \in \{B_L^{(l)}\}$, $v_1 \in W', v_2 \in W'$) и каждая из них имеет смежность с некоторой вершиной v ($v \in V_L$), тогда $v \in W'$.

Теорема 2 [8]. Пусть $G = (V, E)$ – n -вершинный граф, удовлетворяющий условию Оре. Пусть v_1 и v_2 ($v_1, v_2 \in V$) – две его несмежные вершины ($e = v_1 v_2 \notin E$). Тогда вершины v_1 и v_2 имеют, по меньшей мере, две общие смежные вершины (найдутся вершины w_1 и w_2 ($w_1, w_2 \in V$), такие что $\{v_1 w_1, v_1 w_2, v_2 w_1, v_2 w_2\} \subset E$).

Теорема 3. Пусть $Z = (W', Q')$ – блок первого ранга ($Z \in B_L^{(l)}$) предфрактального графа $G_L = (V_L, E_L)$, порожденного n -вершинной затравкой $H = (W, Q)$, у которого смежность «старых» ребер сохраняется. Тогда Z содержит ровно одну «старую» вершину.

Доказательство. Рассмотрим траекторию получения графа G_L – $G_l = (V_l, E_l)$, $l = \overline{1, L}$. Рассмотрим в ней предфрактальный граф $G_{L-1} = (V_{L-1}, E_{L-1})$. В нем рассмотрим вершину v_0 ($v_0 \in V_{L-1}$), из которой был получен блок Z с помощью операции замены вершины затравкой. Пусть E_0 – множество ребер, каждое из которых инцидентно вершине v_0 ($E_0 \subset E_{L-1}$). Поскольку в G_L смежность «старых» ребер сохраняется, в графе G_L все ребра множества E_0 останутся смежными, а значит инцидентными одной и той же вершине v блока Z ($v \in W'$). Эта вершина v и будет единственной «старой» вершиной блока Z . ■

Теорема 4. Пусть $Z = (W', Q')$ – блок первого ранга ($Z \in B_L^{(l)}$) предфрактального графа $G_L = (V_L, E_L)$, порожденного n -вершинной затравкой $H = (W, Q)$, у которого смежность «старых» ребер сохраняется. Тогда в блоке Z не более одной n -вершины.

Доказательство. Из теоремы 3 следует, что в блоке Z ровно одна «старая» вершина. Каждая из остальных $n-1$ вершин блока Z инцидентна только «новым» ребрам, а значит имеет степень не более $n-1$. Значит n -вершиной в блоке Z может быть только «старая» вершина. Тогда n -вершин в блоке Z не более одной. ■

Теорема 5. Пусть v – «новая» вершина предфрактального графа $G_L = (V_L, E_L)$, порожденного n -вершинной затравкой $H = (W, Q)$, у которого смежность «старых»

ребер сохраняется. $Z = (W', Q')$ – блок первого ранга ($Z \in B_L^{(1)}$), которому принадлежит вершина v ($v \in W'$). Тогда верны два утверждения:

- а) вершина v смежна не более чем с одной n -вершиной;
- б) все смежные с v вершины лежат в блоке Z ($\forall u / u \in V_L, e = vu \in E_L \Rightarrow u \in W'$).

Доказательство.

а) Из теоремы 4 следует, что в блоке Z не более одной n -вершины. Вершина v является «новой», а значит смежна только с вершинами блока Z . Значит вершина v смежна не более чем с одной n -вершиной;

б) Поскольку v является «новой», то она смежна только с вершинами блока Z , а значит все смежные с v вершины лежат в блоке Z . ■

Теорема 6. Пусть $G = (V, E)$ – граф на n вершинах ($|V| = n$), удовлетворяющий условию Оре и имеющий более двух вершин ($|V| > 2$). Тогда степень каждой его вершины не меньше двух ($\forall v \in V \Rightarrow \rho(v) \geq 2$).

Доказательство. Пусть в G найдется вершина v_0 ($v_0 \in V$) степени меньше 2 ($\rho(v_0) \leq 1$). Рассмотрим произвольную вершину v ($v \in V$) графа G . Из условия Оре следует, что $\rho(v_0) + \rho(v) \geq n$. Значит $\rho(v) \geq n - \rho(v_0) \geq n - 1$. Т.е. $\rho(v) = n - 1$. Тогда вершина v смежна со всеми остальными вершинами G , значит v и v_0 – смежны. Из произвольности выбора вершины v следует, что все вершины (за исключением v_0) смежны с v_0 , что противоречит тому, что $\rho(v_0) \leq 1$. ■

Теорема 7. Пусть $G = (V, E)$ – граф на n вершинах ($|V| = n$), удовлетворяющий условию Оре. Пусть v – его вершина минимальной степени ($v \in V$). Тогда все вершины графа G за исключением, может быть, вершины v имеют степень не меньше $\frac{n}{2}$ ($\forall u \in V / u \neq v \Rightarrow \rho(u) \geq \frac{n}{2}$).

Доказательство. Пусть в графе G найдется вершина v_0 ($v_0 \in V$), отличная от v ($v_0 \neq v$) степени меньше $\frac{n}{2}$ ($\rho(v_0) < \frac{n}{2}$). Т.к. v – вершина минимальной степени, то $\rho(v) \leq \rho(v_0) < \frac{n}{2}$. Тогда $\rho(v) + \rho(v_0) < \frac{n}{2} + \frac{n}{2} = n$, что противоречит выполнению условия Оре для графа G . ■

Теорема 8. Пусть v – «старая» вершина степени меньше n ($\rho(v) < n$) предфрактального графа $G_L = (V_L, E_L)$, у которого смежность «старых» ребер сохраняется, порожденного n -вершинной затравкой $H = (W, Q)$, удовлетворяющей условию Оре. $Z = (W', Q')$ – блок первого ранга ($Z \in B_L^{(1)}$), которому принадлежит вершина v ($v \in W'$). Множество U – окружение вершины v ($U \subset V_L$). Множество N – множество смежных с v n -вершин ($N = \{u / u \in V_L, e = vu \in E_L, \rho(u) \geq n\}$). Тогда:

- а) $|N| \geq 2$;
- б) любая вершина множества N не лежит в блоке Z ($\forall u / u \in N \Rightarrow u \notin W'$);

в) любая вершина множества $U \setminus N$ лежит в блоке Z ($\forall u/u \in U \setminus N \Rightarrow u \in W'$).

Доказательство. Рассмотрим вначале случай $n = 2$. Двухвершинная затравка H , удовлетворяющая условию Оре, представляет собой *граф-ребро*. Рассмотрим произвольную «старую» вершину u предфрактального графа G_L ($u \in V_L$). Ее степень не меньше 2 ($\rho(u) \geq n = 2$), действительно, вершине u инцидентно не менее двух ребер: одно «новое», и не менее одного «старого». Поэтому, в случае $n = 2$ не существует указанной в условии теоремы «старой» вершины v ($\rho(v) < n = 2$). Значит, для случая $n = 2$ теорема верна.

Далее будем рассматривать случай $n > 2$. Затравка H графа G_L удовлетворяет условию Оре. Упорядочим все ее вершины по значению степеней в порядке возрастания. Обозначим через d_1 – степень первой вершины (вершины наименьшей степени), через d_2 – степень второй вершины. Тогда $d_1 \leq d_2$. Кроме того, согласно теореме 7, $d_2 \geq \frac{n}{2}$. Из условия Оре получаем $d_1 + d_2 \geq n$.

а) Рассмотрим в графе $G_{L-1} = (V_{L-1}, E_{L-1})$ вершину v_0 ($v_0 \in V_{L-1}$), из которой был получен блок Z с помощью операции ЗВЗ. Т.к. v – «старая» вершина степени меньше n , то и степень вершины v_0 меньше n ($\rho(v_0) < n$). Рассмотрим блок первого ранга $Z_0 = (W_0', Q_0')$ графа G_{L-1} ($W_0' \subset V_{L-1}$), которому принадлежит вершина v_0 ($v_0 \in W_0'$). Пусть в блоке Z_0 множество U_0 ($U_0 \subset W_0'$) – окружение вершины v_0 . Из теоремы 6 следует, что мощность $|U_0| \geq 2$.

Пусть $U_0 = \{u_1, \dots, u_k\}$ ($k = |U_0|$). Пусть u_i – произвольная вершина множества U_0 ($u_i \in U_0, i \leq k$). При переходе от графа G_{L-1} к графу G_L операция ЗВЗ применялась, в том числе, и для вершин v_0 и u_i ; пусть при этом ребро $e_0 = v_0 u_i \in E_{L-1}$ изменилось на ребро $e_i = v g_i \in E_L$. Аналогично поступим для каждого $i, i \leq k$. Обозначим $U_1 = \{g_1, \dots, g_k\}$ ($U_1 \subset V_L$). Тогда $|U_1| = |U_0| \geq 2$.

Докажем, что каждая из вершин множества U_1 является n -вершиной ($U_1 \subset N$).

Степень вершины v в графе G_L складывается из трех составляющих: t_L, t_{L-1}, t_{L-2} ($\rho(v) = t_L + t_{L-1} + t_{L-2}$), где t_L – количество инцидентных v ребер ранга L , t_{L-1} – количество инцидентных v ребер ранга $L-1$, t_{L-2} – количество инцидентных v ребер ранга не больше $L-2$. С другой стороны t_L – степень вершины v в блоке Z . В G_L смежность «старых» ребер сохраняется, значит, число t_{L-1} равно степени вершины v_0 в блоке Z_0 . Т.к. блоки Z и Z_0 удовлетворяют условию Оре и изоморфны затравке H , то:

- 1) либо $t_L = d_1$ и $t_{L-1} = d_1$;
- 2) либо одно из чисел t_L, t_{L-1} не меньше d_2 .

Во втором случае $\rho(v) \geq t_L + t_{L-1} \geq d_1 + d_2 \geq n$, что противоречит тому что v – вершина степени меньше n .

Следовательно, $t_L = t_{L-1} = d_1$.

Пусть g_i ($i \leq k$) – произвольная вершина множества U_1 ($g_i \in U_1$). В свою очередь степень вершины g_i в графе G_L складывается из трех составляющих: t_L', t_{L-1}', t_{L-2}' ($\rho(g_i) = t_L' + t_{L-1}' + t_{L-2}'$), где t_L' – количество инцидентных g_i ребер ранга L , t_{L-1}' – количество инцидентных g_i ребер ранга $L-1$, t_{L-2}' – количество инцидентных g_i ребер ранга не больше $L-2$. С другой стороны число t_{L-1}' равно количеству вершин блока Z_0 смежных вершине u_i ($u_i \in U_0$). Поскольку в блоке Z_0 $\rho(v_0) = t_{L-1} = d_1$, то $\rho(u_i) = t_{L-1}' \geq d_2$. Но тогда в графе G_L $\rho(g_i) \geq t_L' + t_{L-1}' \geq d_1 + d_2 \geq n$. Итого, каждая из вершин множества U_1 является n -вершиной и значит $U_1 \subset N$. Поэтому $|N| \geq |U_1| \geq 2$.

б) Согласно теореме 3 блок $Z = (W', Q')$ содержит ровно одну «старую» вершину. Значит, все вершины блока Z , за исключением вершины v , «новые». Поэтому степень каждой из них не более $n-1$ ($\forall u \in W' / u \neq v \Rightarrow \rho(u) \leq n-1$). Значит, ни одна из них не является n -вершиной ($\forall u \in W' / u \neq v \Rightarrow u$ – не n -вершина), поэтому ни одна из них не принадлежит множеству N ($\forall u \in W' / u \neq v \Rightarrow u \notin N$).

в) Пусть s – вершина множества U/N , не лежащая в блоке $Z = (W', Q')$ ($s \in U, s \notin N, s \in V_L, s \notin W', \rho(s) \leq n-1$). Пусть r – ранг ребра $e = vs \in E_L$ ($1 \leq r \leq L-1$). Рассмотрим граф $G_r = (V_r, E_r)$. Пусть $e_0 = v_0 s_0 \in E_r$ – ребро графа G_r , из которого в результате операций ЗВЗ образовалось ребро $e = vs$ ($v_0 \in V_r, s_0 \in V_r$). Ребро e_0 в графе G_r имеет тот же ранг, что и ребро e в графе G_L . Поэтому в графе G_r ребро e_0 – «новое». Рассмотрим в G_r блок первого ранга $Z_0 = (W_0, Q_0)$, которому принадлежат вершины v_0, s_0 ($v_0 \in W_0, s_0 \in W_0$).

Степень вершины v в графе G_L складывается из трех составляющих: t_L, t_r, t ($\rho(v) = t_L + t_r + t$), где t_L – количество инцидентных v ребер ранга L , t_r – количество инцидентных v ребер ранга r , t – количество инцидентных v ребер рангов, отличных от L и r . С другой стороны t_L – степень вершины v в блоке Z , а т.к. в G_L смежность «старых» ребер сохраняется, то число t_r равно степени вершины v_0 в блоке Z_0 . Т.к. блоки Z и Z_0 удовлетворяют условию Ore и изоморфны затравке H , то:

- 1) либо $t_L = d_1$ и $t_r = d_1$;
- 2) либо одно из чисел t_L, t_r не меньше d_2 .

Во втором случае $\rho(v) \geq t_L + t_r \geq d_1 + d_2 \geq n$, что противоречит тому что v – узловая вершина степени меньше n .

Следовательно, $t_L = t_r = d_1$.

В свою очередь, степень вершины s в графе G_L складывается из трех составляющих: t_L', t_r', t' ($\rho(s) = t_L' + t_r' + t'$), где t_L' – количество инцидентных s ребер ранга L , t_r' – количество инцидентных s ребер ранга r , t' – количество инцидентных s ребер рангов, отличных от L и r . С другой стороны число t_r' равно

степени вершины s_0 в блоке Z_0 . Поскольку в блоке Z_0 $\rho(v_0) = t_r = d_1$, то $\rho(s_0) = t_r' \geq d_2$. Но тогда в графе G_L $\rho(s) \geq t_L' + t_r' \geq d_1 + d_2 \geq n$, что противоречит тому, что $s \notin N$. Полученное противоречие доказывает, что любая вершина множества U/N лежит в блоке Z . ■

В статье рассматривается следующая задача. Пусть в явном виде задан граф $G = (V, E)$. Необходимо проверить, является ли он предфрактальным графом $G_L = (V_L, E_L)$ при условии, что смежность «старых» ребер в траектории сохраняется, с затравкой, являющейся n -вершинным графом $H = (W, Q)$, удовлетворяющим условию Оре.

Нижеследующий алгоритм решает поставленную задачу.

Алгоритм α

Алгоритм α предназначен для распознавания свойства предфрактальности данного графа $G = (V, E)$ в случае, когда G предположительно является предфрактальным графом при условии сохранения смежности «старых» ребер, порожденным n -вершинной затравкой $H = (W, Q)$, удовлетворяющей условию Оре, если значения L, n считаются априори заданными.

Предварим алгоритм α процедурой проверки необходимых условий предфрактального графа, применив такую процедуру к графу G . Результатом проверки будут являться значения чисел L, n .

Алгоритм α состоит из этапов $\rho = 1, 2, \dots, L-1$, которые взаимно-однозначно поставлены в соответствие текущим графам $G_l, l = \overline{2, L}$. На вход этапа ρ подается текущий граф G_l , где $l = L - \rho + 1$ (причем, в качестве графа G_L берется исходный граф G). Этап ρ выделяет в G_l затравки, состоящие из ребер ранга l . После чего каждая из этих затравок стягивается в вершину. Полученный в результате текущий граф G_{l-1} представляется на вход этапа $\rho + 1$.

В процессе результативной реализации $(L-1)$ этапов алгоритма α получаем последовательность G_L, G_{L-1}, \dots, G_1 . При этом считаем, что данный граф G , обозначаемый в этой последовательности через G_L , является предфрактальным графом тогда, когда каждый представитель последовательности G_L, G_{L-1}, \dots, G_1 удовлетворяет необходимым условиям предфрактальности.

Опишем вычислительную схему первого этапа в случае, когда на его вход представлен исходный граф $G = (V, E)$.

Этап $\rho = 1$ начинает свою работу с проверки равенства $|V| = n^L$. Если это равенство не выполняется, то алгоритм α заканчивает свою работу безрезультатно. В случае выполнения этого равенства дальнейшая работа этапа $\rho = 1$ состоит из m_1 шагов, где m_1 – число таких затравок в G , каждая из которых состоит из новых ребер.

Результатом такого очередного шага является выделенная в графе G очередная

затравка. Процедуру выделения этой затравки обозначим через β .

Описание процедуры β

Во множестве V выделяем очередную неотмеченную вершину v_1 степени меньше n , т.е. вершину, которая не принадлежит какой-либо уже выделенной затравке из множества V . Если такую вершину выделить не удалось, то согласно теореме 4 процедура β , а с ней и алгоритм α заканчивает свою работу безрезультатно. Выделенная вершина v_1 смежна с некоторыми вершинами множества V . Пусть эти вершины составляют множество $U_1 = \{u_1, \dots, u_t\}$. Упорядочим вершины u_1, \dots, u_t по их степеням в порядке убывания. Пусть среди вершин u_1, \dots, u_t вершины u_1, \dots, u_k ($k \leq t$) имеют степень не менее n ($\rho(u_i) \geq n, i = \overline{1, k}$). Эти вершины составляют множество $U_2 = \{u_1, \dots, u_k\}$. Если $k \geq 2$, то полагаем $U = U_1 \setminus U_2$. Если $k < 2$, то полагаем $U = U_1$.

Считаем вершины множества U выделенными. Согласно теоремам 5 и 8 все вершины множества U принадлежат текущей затравке $H = (W, Q)$.

Действительно, возможно два случая:

а) v_1 – «новая» вершина. Тогда согласно теореме 5 v_1 смежна не более чем с одной n -вершиной (это случай $k < 2$). Поэтому все вершины множества U_1 принадлежат затравке H ;

б) v_1 – «старая» вершина. Тогда согласно теореме 8 среди вершин, смежных с вершиной v_1 , те и только те лежат в затравке H , которые имеют степень менее n . Поэтому все вершины множества $U_1 \setminus U_2$ принадлежат затравке H .

Для выделения оставшихся вершин затравки H воспользуемся теоремой 2. А именно, среди невыделенных вершин множества V выделяем такие вершины, которые смежны хотя бы с двумя вершинами множества U . Пусть эти вершины составляют множество U_3 . Согласно теореме 1 все вершины множества U_3 принадлежат текущей затравке H .

Действительно, рассмотрев произвольную вершину v_0 затравки H ($v_0 \in W$) и вершину v_1 , согласно теореме 2 получим, что либо v_0 и v_1 смежны ($v_0 \in U$), либо $v_0 \in U_3$, поэтому если $|\{v_1\}| + |U| + |U_3| \neq n$, то процедура β , а с ней и алгоритм α заканчивает свою работу безрезультатно.

Иначе, если $|\{v_1\}| + |U| + |U_3| = n$, то результатом работы процедуры β считаем множество вершин $W^{(0)} = \{v_1\} \cup U \cup U_3$.

Выделяем и отмечаем все ребра, у каждого из которых концы представляют собой вершины множества $W^{(0)}$.

Если в процессе распознавания графа G_L процедура β выполняется впервые, то работа процедуры β завершается тем, что множество выделенных таким образом вершин и ребер запоминается как n -вершинный граф $Z = (W_0, Q_0)$.

В противном случае работа процедуры β завершается проверкой на изоморфность графа $Z = (W_0, Q_0)$ и графа, образованного множествами выделенных таким образом вершин и ребер. Если эти графы изоморфны, то шаг, включающий в себя описанную процедуру β , завершается результативно и следует переход к следующему шагу первого этапа. В противном случае работа шага считается безрезультатной, и алгоритм α заканчивает свою работу.

Этап $\rho = 1$ завершает свою работу, как только все вершины множества V окажутся выделенными. Далее осуществляем процедуру стягивания каждой выделенной затравки в одну вершину. После чего, полученный граф G_{L-1} предъявляем на вход следующего этапа алгоритма α .

Предъявленное выше описание работы первого этапа является общим, т.е. все его операции и процедуры остаются неизменными по отношению к каждому графу строящейся последовательности. В случае результативной работы каждого из $L-1$ этапов в качестве последнего члена полученной последовательности получаем n -вершинный граф, изоморфный графу $Z = (W_0, Q_0)$. Этот результат означает получение положительного ответа на вопрос, является ли данный граф G предфрактальным графом при условии, что смежность «старых» ребер сохраняется, порожденным затравкой, являющейся n -вершинным графом, удовлетворяющим условию Ore.

Теорема 9. Всякий предфрактальный граф $G_L = (V_L, E_L)$ при условии сохранения смежности «старых» ребер, порожденный n -вершинной затравкой, удовлетворяющей условию Ore, распознается алгоритмом α , причем $\tau(\alpha) \sim O(|E_L| \cdot L)$, где $\tau(\alpha)$ – трудоемкость алгоритма α .

Доказательство. Распознаваемость предфрактального графа G_L вытекает из определения алгоритма α . Действительно, каждый шаг любого этапа ρ реализуется процедурой β . В процессе выполнения этой процедуры выделяется очередная затравка. Следовательно, на каждом произвольном этапе ρ будут выделены все затравки (т.е. все блоки первого ранга). После стягивания затравок будет получен очередной граф последовательности G_L, G_{L-1}, \dots, G_1 . После выполнения всех этапов процедуры α будет получен граф G_1 , изоморфный затравке, что и будет означать положительный результат распознавания графа G на предмет его предфрактальности.

Работа каждого этапа состоит из m_1 шагов, где m_1 – число таких затравок в G , каждая из которых состоит из новых ребер. На первом шаге определяются степени всех вершин, поэтому в дальнейшем, после первого и последующих шагов (после выделения очередной затравки), для поиска очередной вершины степени меньше n достаточно рассмотреть выделенные на текущем шаге ребра и соответствующим образом изменить степени невыделенных вершин. В результате описанных выше операций каждое ребро графа G_L будет рассмотрено конечное число раз (максимум 3), а именно, максимум два раза на первом шаге и максимум один раз на каком-либо из последующих шагов.

Кроме того, к каждой выделенной затравке применяется алгоритм проверки на изоморфность, причем такой алгоритм имеет полиномиальную сложность.

Следовательно, трудоемкость каждого этапа алгоритма α ограничена сверху ве-

личиной $O(E_L)$). Окончательное обоснование верхней оценки трудоемкости алгоритма α получаем из того, что число этапов этого алгоритма не превосходит L . ■

Примечания:

1. Горелик А.Л., Скрипкин В.А. Методы распознавания. М.: ВШ, 1989.
2. Ту Дж., Гонсалес Р. Принципы распознавания образов. М.: Мир, 1978.
3. Рассел С., Норвиг П. Искусственный интеллект: современный подход (AIMA): пер. с англ. 2-е изд. М.: Вильямс, 2006.
4. Люгер Дж.Ф. Искусственный интеллект: стратегии и методы решения сложных проблем: пер. с англ. 4-е изд. М.: Вильямс, 2003.
5. Мэлроуз Дж. Иерархические фрактальные графы и блуждания в них // Фракталы в физике. М.: Мир, 1988. С. 507-512.
6. Кочкаров А.М. Распознавание фрактальных графов. Алгоритмический подход. Нижний Архыз: РАН САО, 1998.
7. Резников А.В., Кочкаров А.А. Алгоритм распознавания предфрактальных графов с регулярной n -вершинной затравкой степени не менее $n/2$ // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. Краснодар: Изд-во КубГУ, 2010. С. 63-69.
8. Резников А.В. Распознавание предфрактальных графов с затравкой, удовлетворяющей условию Ore // Вестник Адыгейского государственного университета. Сер. «Естественно-математические и технические науки». 2010. Вып. 2. С. 34-39. URL: <http://vestnik.adygnet.ru>
9. Божокин С.В., Паршин Д.А. Фракталы и мультифракталы. М.; Ижевск: РХД, 2001.
10. Федер Е. Фракталы. М.: Мир, 1991.
11. Шредер М. Фракталы, хаос, степенные законы. М.; Ижевск: РХД, 2001.
12. Лекции по теории графов / В.А. Емеличев, О.И. Мельников, В.И. Сарванов, Р.И. Тышкевич. М.: Наука, 1990.

References:

1. Gorelik A.L., Skripkin V.A. Recognition methods. M.: VSH, 1989.
2. Tu J., Gonsales R. The principles of pattern recognition. M.: Mir, 1978.
3. Russell S., Norvig P. Artificial intelligence: modern approach (AIMA): transl. from English. 2nd edition. M.: Williams, 2006.
4. Luger G.F. Artificial intelligence: strategies and methods of solving complex problems: transl. from English. 4th edition. M.: Williams, 2003.
5. Malrose G. Hierarchical fractal graphs and wanderings in them // Fractals in physics. M.: Mir, 1988. P. 507-512.
6. Kochkarov A.M. The recognition of fractal graphs. The algorithmic approach. Nizhny Arkhyz: RAN SAO, 1998.
7. Reznikov A.V., Kochkarov A.A. The recognition algorithm of prefractal graphs with regular n -point fuse of degree not less than $n/2$ // The ecological bulletin of scientific centres of the Black Sea economic cooperation. Krasnodar: Publishing house of KubGU, 2010. P. 63-69.
8. Reznikov A.V. The recognition of prefractal graphs with a fuse, satisfying to Ore's condition // The bulletin of the Adyghe State University. Ser. Natural and mathematical and technological sciences. 2010. Iss. 2. P. 34-39. URL: <http://vestnik.adygnet.ru>
9. Bozhokin S.V., Parshin D.A. Fractals and multifractals. M.; Izhevsk: RKHD, 2001.
10. Feder E. Fractals. M.: Mir, 1991.
11. Shredder M. Fraktals, chaos, power laws. M.; Izhevsk: RKHD, 2001.
12. Lectures on the theory of graphs / V.A. Emelichev, O.I. Melnikov, V.I. Sarvanov, R.I. Tyshkevich. M.: Nauka, 1990.