МАТЕМАТИКА

MATHEMATICS

УДК 512.64
ББК 22.143
К 59

Козлов В.А.
Кандидат физико-математических наук, доцент, зав. кафедрой математического анализа Армавирского государственного педагогического университета, e-mail: shagin196@ yandex.ru
Паланджянц Л.Ж.
Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики и системного анализа Майкопского государственного технологического университета, тел. (8772) 57-03-53

Мультипликативные интегралы от матричных функций, порожденных представлениями алгебр Ли A_1

(Рецензирована)

Аннотация
В статье предлагается метод вычисления мультипликативного интеграла от матричных функций, порожденных представлениями алгебр Ли A_1.

***Ключевые слова**: мультипликативный интеграл, представления алгебр Ли.*

Kozlov V.A.
Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Head of Mathematical Analysis Department of the Armavir State Pedagogical University, e-mail: shagin196@ yandex.ru
Palandzhyants L.Zh.
Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of Mathematics and System Analysis Department of Maikop State University of Technology, ph. (8772) 57-03-53

Multiplicative integrals of matrix functions generated by the representation of Lie algebras A_1

Abstract
The paper proposes a method for calculating the product integral of the matrix functions generated by the representations of Lie algebras A_1.

Key words: *multiplicative product integral, representation of Lie algebras.*

В данной статье приводятся достаточные условия, при выполнении которых матричная функция произвольного порядка интегрируется в конечном виде. Условия интегрируемости порождены условиями интегрируемости матричных функций второго порядка, порожденных представлениями алгебр Ли A_1. Используя теорию представлений групп и алгебр Ли и интегрируемые матричные функции второго порядка, условия интегрируемости можно перенести на матричные функции произвольного порядка. При малых размерностях алгебр Ли некоторые результаты получены в работе [1]. Достаточные условия, о которых идет речь в статье, связаны с интегрируемостью некоторых нелинейных дифференциальных уравнений типа нулевой кривизны [2].

1). **Теорема 1.** Пусть дан мультипликативный интеграл

$$\overset{\frown}{\int} E + A(t)dt\,, \tag{1.1}$$

где $A(t)=(a_{ij}(t))$ – гладкая матричная функция, $i, j = 1,2,3$.

Введем обозначения:

$a_{11,n} = a'_{11,n-1} + a^2_{11,n-1} + a_{12,n-1}a_{21,n-1} + a_{12,n-1}a_{31,n-1}$;

$a_{12,n} = a'_{12,n-1} + a_{11,n-1}a_{12,n-1} + a_{12,n-1}a_{22,n-1} + a_{13,n-1}a_{32,n-1}$;

$a_{13,n} = a'_{13,n-1} + a_{11,n-1}a_{13,n-1} + a_{12,n-1}a_{23,n-1} + a_{13,n-1}a_{33,n-1}$;

$\Delta = a_{12}a_{13,1} - a_{13}a_{12,1}$, $n = 1,2$, $a_{ij,0} = a_{ij}$.

Пусть дан следующий мультипликативный интеграл

$$\overset{\frown}{\int} E + \begin{pmatrix} 2a(t) & 2b(t) & 0 \\ c(t) & 0 & 2b(t) \\ 0 & c(t) & -2a(t) \end{pmatrix} dt\,, \tag{1.2}$$

где $a(t),\ b(t),\ c(t)$ – гладкие функции, для которых справедливы равенства:

1. $3b'/b = (a_{13,2}a_{12} - a_{12,2}a_{13})/\Delta$;
2. $(b'/b)' - 2(b'/b)^2 - 4a(b'/b) + 4(a' + a^2 + bc) = (a_{12,2}a_{13,1} - a_{13,2}a_{12,1})/\Delta$;
3. $2a'' - 4aa' + 2bc' - 2b'c - 2a((b'/b) + (b'/b)^2 + 2ab'/b) =$
   $= a_{11,2} + (-a_{11}a_{13,1}a_{12,2} + a_{13}a_{12,2}a_{11,1} + a_{13,2}a_{12,1}a_{11} - a_{13,2}a_{11,1}a_{12})/\Delta$.

Тогда имеет место равенство:

$$\overset{\frown}{\int} E + A(t)dt = \overset{\frown}{\int} E + \begin{pmatrix} 2a(t) & 2b(t) & 0 \\ c(t) & 0 & 2b(t) \\ 0 & c(t) & -2a(t) \end{pmatrix} dt\,, \tag{1.3}$$

Доказательство. Запишем систему линейных дифференциальных уравнений, соответствующую интегралу (1.1):

$$\begin{cases} y'_1 = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{13}y_3, \\ y'_2 = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + a_{23}y_3, \\ y'_3 = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + a_{23}y_3. \end{cases} \tag{1.4}$$

Из системы (1.4) получаем систему

$$\begin{cases} y'_1 = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{13}y_3, \\ y''_1 = a_{11,1}y_1 + a_{12,1}y_2 + a_{13,1}y_3, \\ y'''_1 = a_{11,2}y_1 + a_{12,2}y_2 + a_{13,2}y_3. \end{cases} \tag{1.5}$$

Из двух первых уравнений системы (1.5) выразим y_2 и y_3 через y_1, y'_1, y''_1:

$$y_2=\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} y_1'-a_{11}y_1 & a_{13} \\ y_1''-a_{11,1}y_1 & a_{13,1}\end{vmatrix},\qquad y_3=-\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} y_1'-a_{11}y_1 & a_{12} \\ y_1''-a_{11,1}y_1 & a_{12,2}\end{vmatrix}. \tag{1.6}$$

Подставим равенства (1.6) в третье уравнение системы (5). Тогда для y_1 из системы (1.5) получаем следующее дифференциальное уравнение:

$$y_1'''=\frac{1}{\Delta}(a_{13,2}a_{12}-a_{12,2}a_{13})y_1''+\frac{1}{\Delta}(a_{12,2}a_{13,1}-a_{13,2}a_{12,1})y_1'+$$

$$+(a_{11,2}+(-a_{11}a_{13,1}a_{12,2}+a_{13}a_{12,2}a_{11,1}+a_{13,2}a_{12,1}a_{11}-a_{13,2}a_{11,1}a_{12})/\Delta)y_1. \tag{1.7}$$

Запишем систему линейных дифференциальных уравнений, соответствующую интегралу (1.2):

$$\begin{cases} z_1'=2az_1+2bz_2, \\ z_2'=cz_1+2bz_3, \\ z_3'=cz_2-2az_3. \end{cases} \tag{1.8}$$

Из системы (1.8) соответственно получаем:

$$z_2=\frac{1}{2b}(z_1'-2az_1),\qquad z_3=\frac{1}{4b^2}(z_1''-(\frac{b'}{b}+2a)z_1'-2bcz_1). \tag{1.9}$$

Для функции z_1 из системы (1.7) получаем следующее дифференциальное уравнение:

$$z_1'''=(3b'/b)z_1''+((b'/b)'-2(b'/b)^2-4ab'/b+4(a'+a^2+bc))z_1'+$$

$$+(2a''-4aa'+2bc'-2b'c+2a((b'/b)'+(b'/b)^2+2ab'/b)z_1. \tag{1.10}$$

Из линейно независимых решений уравнения (1.7) и соотношения (1.6) строится фундаментальная матрица решений системы (1.4), то есть вычисляется мультипликативный интеграл (1.1). Аналогично из линейно независимых решений уравнения (1.9) и соотношения (1.8) строится фундаментальная матрица решений системы (1.8), то есть вычисляется мультипликативный интеграл (1.3).

Таким образом, из условий 1–3 следует, что системы (1.4) и (1.8) эквивалентны. Отсюда вытекает равенство (1.3). Теорема 1 доказана.

Замечание 1. Условия 1–3 можно упростить. Из первого условия можно выразить $b(t)$, а из третьего условия – $c(t)$. Тогда для вычисления $a(t)$ из второго условия возникает нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка.

Приведенное выше коэффициентное преобразование подынтегральной матричной функции можно связать с калибровочным преобразованием мультипликативного интеграла (1), при котором подынтегральная матричная функция будет порождена представлением алгебры Ли A_1 со старшим весом $\overset{2}{\circ}$.

Замечание 2. Подынтегральная матричная функция мультипликативного интеграла (2) есть представление матричной функции $\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$ со старшим весом $\overset{2}{\circ}$.

Рассмотрим мультипликативный интеграл

$$\overset{\frown}{\int} E+\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} dt . \tag{1.11}$$

Известно [2], что условие

$$c(t)\int b(t)dt = 2a(t) \tag{1.12}$$

обеспечивает интегрируемость в конечном виде мультипликативного интеграла.

Непосредственно можно убедиться, что условие (1.11) обеспечивает также интегрируемость в конечном виде мультипликативного интеграла (1.2). В самом деле, интегрируя по частям, получаем:

$$\overset{\frown}{\int} E+\begin{pmatrix} 2a(t) & 2b(t) & 0 \\ c(t) & 0 & 2b(t) \\ 0 & c(t) & -2a(t) \end{pmatrix} dt = \overset{\frown}{\int} E+\left\{\begin{pmatrix} 0 & 2b & 0 \\ 0 & 0 & 2b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2a & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 \\ 0 & c & -2a \end{pmatrix}\right\} dt =$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & 2\int bdt & 2\int^2 bdt \\ 0 & 1 & 2\int bdt \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot \overset{\frown}{\int} E+\begin{pmatrix} 1 & 2\int bdt & 2\int^2 bdt \\ 0 & 1 & 2\int bdt \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2a & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 \\ 0 & c & -2a \end{pmatrix}\times$$

$$\times\begin{pmatrix} 1 & 2\int bdt & 2\int^2 bdt \\ 0 & 1 & 2\int bdt \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} dt = \begin{pmatrix} 1 & 2\int bdt & 2\int^2 bdt \\ 0 & 1 & 2\int bdt \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot \overset{\frown}{\int} E+\begin{pmatrix} 2a & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 \\ 0 & c & -2a \end{pmatrix} dt =$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & 2\int bdt & 2\int^2 bdt \\ 0 & 1 & 2\int bdt \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \exp(-\int 2adt) & 0 & 0 \\ \int c\exp(-\int 2adt)dt & 1 & 0 \\ \exp(\int 2adt)\cdot\int c\exp(-\int 2adt)dt & \exp(-\int 2adt)\int cdt & \exp(\int 2adt) \end{pmatrix}.$$

Таким образом, условия 1–3 и (1.12) обеспечивают интегрируемость в конечном виде мультипликативного интеграла (1.1).

2). **Теорема 2.** Пусть дан мультипликативный интеграл

$$\overset{\frown}{\int} E + A(t)dt , \tag{2.1}$$

где $A(t) = (a_{ij}(t))$ – гладкая матричная функция, $i,\ j = 1,2,3,4$.

Введем обозначения:

$$a_{11,n} = a'_{11,n-1} + a^2_{11,n-1} + a_{12,n-1}a_{21,n-1} + a_{13,n-1}a_{31,n-1} + a_{14,n-1}a_{41,n-1} ,$$

$$a_{12,n} = a'_{12,n-1} + a_{11,n-1}a_{12,n-1} + a_{12,n-1}a_{22,n-1} + a_{13,n-1}a_{32,n-1} + a_{14,n-1}a_{42,n-1} ,$$

$$a_{13,n} = a'_{13,n-1} + a_{11,n-1}a_{13,n-1} + a_{12,n-1}a_{23,n-1} + a_{13,n-1}a_{33,n-1} + a_{14,n-1}a_{43,n-1},$$

$$a_{14,n} = a'_{13,n-1} + a_{11,n-1}a_{14,n-1} + a_{12,n-1}a_{24,n-1} + a_{13,n-1}a_{4,n-1} + a_{14,n-1}a_{44,n-1},$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12,1} & a_{13,1} & a_{14,1} \\ a_{12,2} & a_{13,2} & a_{14,2} \end{vmatrix}, \quad n = 1,2,3, \quad a_{ij,0} = a_{ij}.$$

Введем обозначения:

$$\varphi_1 = \frac{1}{\Delta}(a_{12,3}\Delta_{31} - a_{13,3}\Delta_{32} + a_{14,3}\Delta_{33}),$$

$$\varphi_2 = \frac{1}{\Delta}(-a_{12,3}\Delta_{21} + a_{13,3}\Delta_{22} - a_{14,3}\Delta_{23}),$$

$$\varphi_3 = \frac{1}{\Delta}(a_{12,3}\Delta_{11} - a_{13,3}\Delta_{12} + a_{14,3}\Delta_{13}),$$

$$\varphi_4 = \frac{1}{\Delta}(a_{12,3}(a_{11}\Delta_{11} - a_{11,1}\Delta_{21} + a_{11,2}\Delta_{31}) + a_{13,3}(a_{11}\Delta_{12} - a_{11,1}\Delta_{22} + a_{11,2}\Delta_{32}) +$$
$$+ a_{14,3}(-a_{11}\Delta_{13} - a_{11,1}\Delta_{23} + a_{12,2}\Delta_{33}))y_1,$$

где Δ_{ij} – соответствующие миноры матрицы $(a_{ij,n})$.

Пусть дан следующий мультипликативный интеграл, порожденный представлением со старшим весом $\overset{3}{\circ}$:

$$\overset{\frown}{\int} E + \begin{pmatrix} 3a & 3b & 0 & 0 \\ c & a & 4b & 0 \\ 0 & c & -a & 3b \\ 0 & 0 & c & -3a \end{pmatrix} dt, \qquad (2.2)$$

где $a(t), b(t), c(t)$ – гладкие функции, для которых справедливы равенства:

1–4. $\varphi_s(a_{11}, a_{12}, a_{12}, a_{14}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{24}, a_{31}, a_{32}, a_{33}, a_{34}, a_{41}, a_{42}, a_{43}, a_{44}) =$

$= \psi_s(a, b, c, r_1, r_2, r_3, r_4), \quad s = 1,2,3,4,$

где функции ψ_s и r_s определены ниже.

Тогда имеет место равенство:

$$\overset{\frown}{\int} E + A(t)dt = \overset{\frown}{\int} E + \begin{pmatrix} 3a & 3b & 0 & 0 \\ c & a & 4b & 0 \\ 0 & c & -a & 3b \\ 0 & 0 & c & -3a \end{pmatrix} dt, \qquad (2.3)$$

Доказательство. Запишем систему линейных дифференциальных уравнений, соответствующую интегралу (2.1):

$$y'_i = a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2 + a_{i3}y_3 + a_{i4}y_4, \quad i = 1,2,3,4. \qquad (2.4)$$

Из системы (2.4) получаем систему

$$y_1^{(n)} = \sum_{i=1}^{n} a_{1i,n-1} y_i \ . \qquad (2.5)$$

Из трех первых уравнений системы (2.5) выразим y_2, y_3 и y_4 через y_1, y_1'', y_1''':

$$y_2 = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} y_1' - a_{11}y_1 & a_{13} & a_{14} \\ y'' - a_{11,1}y_1 & a_{13,1} & a_{14,1} \\ y''' - a_{11,2}y_1 & a_{13,2} & a_{14,2} \end{vmatrix}, \quad y_3 = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} a_{12} & y_1' - a_{11}y_1 & a_{14} \\ a_{12,1} & y'' - a_{11,1}y_1 & a_{14,1} \\ a_{12,2} & y''' - a_{11,2}y_1 & a_{14,2} \end{vmatrix},$$

$$y_4 = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & y_1' - a_{11}y_1 \\ a_{12,1} & a_{13,1} & y'' - a_{11,1}y_1 \\ a_{12,2} & a_{13,2} & y''' - a_{11,2}y_1 \end{vmatrix}. \qquad (2.6)$$

Подставим равенства (2.6) в четвертое уравнение системы (2.5). Тогда для y_1 из системы (2.5) получаем следующее дифференциальное уравнение:

$$y_1^{(4)} = \varphi_1 y_1''' + \varphi_2 y_1'' + \varphi_3' y_1' + \varphi_4 y_1 \,. \qquad (2.7)$$

Запишем систему линейных дифференциальных уравнений, соответствующую интегралу (2.2):

$$\begin{cases} z_1' = 3az_1 + 3bz_2, \\ z_2' = cz_1 + az_2 + 4bz_3, \\ z_3' = cz_2 - az_3 + 3bz_4, \\ z_4' = cz_3 - 3az_4. \end{cases} \qquad (2.8)$$

Из системы (2.8) соответственно получаем:

$$z_2 = \frac{1}{3b}(z_1' - 3az_1), \quad z_3 = \frac{1}{4b}(z_2' - az_2 - cz_1), \quad z_4 = \frac{1}{3b}(z_3' + az_3 - cz_2). \qquad (2.9)$$

Легко заметить, что функции z_s, $s = 1,2,3,4$, выражаются через z_1.

Для функции z_1 из системы (2.8) получаем следующее дифференциальное уравнение:

$$z_1^{(4)} = r_1 z_1 + r_2 z_2 + r_3 z_3 + r_4 z_4 \,, \qquad (2.10)$$

где

$$r_1 = 3((a'' + 9aa' + 2b'c + bc' + 7abc + 9a^3)' + 3aa' + b'c + 7abc + 9a^3 +$$
$$+ c(b'' + 7a'b + 5ab' + 13a^2b + 11b^2c)\,,$$
$$r_2 = 3((b'' + 7a'b + 5ab' + 13a^2b + 11b^2c)' + 3b(a'' + 9aa' + 2b'c + bc' + 7abc + 9a^3) +$$
$$+ a(b'' + 4a'b + 6ab' + 13a^2b + 11b^2c) + c(b'^2 + 4bb' + 12ab^2)\,,$$

$$r_3 = 12(3b'^2 + 4bb' + 11abb' + 10a'b^2 + 22a^2b^2 + 11b^3c)\,, \qquad r_4 = 216b'b^2\,.$$

Используя соотношения (2.9), уравнение (2.10) можно привести к виду:

$$z_1^{(4)} = \psi_1 z_1 + \psi_2 z_2 + \psi_3 z_3 + \psi_4 z_4\,, \tag{2.11}$$

где функции ψ_s, $s = 1,2,3,4$, выражаются через функции $a,\ b,\ c$ и r_s, $s = 1,2,3,4$.

Из линейно независимых решений уравнения (2.7) и соотношения (2.6) строится фундаментальная матрица решений системы (2.5), то есть вычисляется мультипликативный интеграл (2.1). Аналогично из линейно независимых решений уравнения (2.11) и соотношения (2.9) строится фундаментальная матрица решений системы (2.8), то есть вычисляется мультипликативный интеграл (2.2).

Таким образом, из условий 1–4 следует, что системы (2.7) и (2.11) эквивалентны. Отсюда вытекает равенство (2.3). Теорема 2 доказана.

Непосредственно можно убедиться, условие (1.12) обеспечивает также интегрируемость в конечном виде мультипликативного интеграла (2.2). В самом деле, интегрируя по частям, получаем:

$$\overset{\frown}{\int}\left(E + \begin{pmatrix} 3a & 3b & 0 & 0 \\ c & a & 4b & 0 \\ 0 & c & -a & 3b \\ 0 & 0 & c & -3a \end{pmatrix} dt\right) = \overset{\frown}{\int}\left(E + \begin{pmatrix} 0 & 3b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4b & 0 \\ 0 & c & 0 & 3b \\ 0 & 0 & c & 0 \end{pmatrix} dt\right) \times$$

$$\times \overset{\frown}{\int}\left(E + \begin{pmatrix} 1 & -3\int bdt & 6\int^2 bdt & -6\int^2 bdt \\ 0 & 1 & -4\int bdt & 6\int^2 bdt \\ 0 & 0 & 1 & -3\int bdt \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3a & 0 & 0 & 0 \\ c & a & 0 & 0 \\ 0 & c & -a & 0 \\ 0 & 0 & c & -3a \end{pmatrix} \times\right.$$

$$\left.\times \begin{pmatrix} 1 & 3\int bdt & 6\int^2 bdt & 6\int^2 bdt \\ 0 & 1 & 4\int bdt & 6\int^2 bdt \\ 0 & 0 & 1 & 3\int bdt \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} dt\right) = \begin{pmatrix} 1 & 3\int bdt & 6\int^2 bdt & 6\int^2 bdt \\ 0 & 1 & 4\int bdt & 6\int^2 bdt \\ 0 & 0 & 1 & 3\int bdt \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times$$

$$\times \overset{\frown}{\int}\left(E + \begin{pmatrix} 3a & 0 & 0 & 0 \\ c & a & 0 & 0 \\ 0 & c & -a & 0 \\ 0 & 0 & c & -3a \end{pmatrix} dt\right).$$

Таким образом, условия 1–4 и (1.12) обеспечивают интегрируемость в конечном виде мультипликативного интеграла (2.2).

В общем случае нужно рассмотреть представление со старшим весом $\overset{k}{\circ}$, соответственно с подынтегральной матричной функцией:

$$\begin{pmatrix} ka & kb & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ c & (k-2)a & (2k-2)b & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & c & (k-2s)a & (sk-(s-1)s)b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & c & (k+2)a & kb \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & c & -ka \end{pmatrix}.$$

Помимо условия (1.12) можно рассмотреть серию условий на элементы исходной матричной функции второго порядка, возникающие при мультипликативном интегрировании по частям и приводящие к преобразованию Бэклунда для некоторых нелинейных дифференциальных уравнений типа нулевой кривизны [2].

Кроме того, для удобства вычислений следует воспользоваться калибровочным преобразованием подынтегральных матричных функций интегралов (2.1) и (2.2).

Примечания:

1. Palandzhyants L.Zh. Representations of Lie algebras and integrations of system of linear differential equations // Труды ФОРА. 2001. № 6. С. 132-134. URL: http://fora.adygnet.ru
2. Паланджянц Л.Ж. Мультипликативное интегрирование по частям и преобразование Бэклунда // Труды ФОРА. 1996. № 1. С. 65-75. URL: http://fora.adygnet.ru

References:

1. Palandzhyants L.Zh. Representations of Lie algebras and integrations of system of linear differential equations // FORA Works. 2001. No. 6. P. 132-134. URL: http://fora.adygnet.ru
2. Palandzhyants L.Zh. The multiplicative integration into parts and transformation of Backlund // FORA Works. 1996. No. 1. P. 65-75. URL: http://fora.adygnet.ru