

---

УДК 539.2  
ББК 22.37  
Г 61

**Головнев Ю.Ф.**

*Доктор физико-математических наук, профессор, зав. кафедрой общей и теоретической физики Тульского государственного педагогического университета им. Л.Н. Толстого, тел. (4872) 35-78-29, e-mail: physics@tspu.tula.ru*

**Сидорова И.Г.**

*Аспирант кафедры общей и теоретической физики Тульского государственного педагогического университета им. Л.Н. Толстого, тел. (4872) 35-78-29, e-mail: physics@tspu.tula.ru*

**Лаковцев А.Б.**

*Кандидат физико-математических наук, ассистент кафедры общей и теоретической физики Тульского государственного педагогического университета им. Л.Н. Толстого, тел. (4872) 35-78-29, e-mail: alex\_lak@rambler.ru*

**Триpletные экситоны в наноразмерных сверхрешетках EuO – SrO\***  
(Рецензирована)

**Аннотация**

*В работе исследуется гетеросистема на основе ферромагнитного полупроводника EuO. Используя метод спин-гамильтониана, построена схема энергетических уровней экситонных состояний. Установлено, что энергия связи электрона и дырки в покоящемся экситоне возрастает на величину энергии обмена.*

**Ключевые слова:** экситон, ферромагнитный полупроводник, энергия связи, энергия обмена.

**Golovnev Yu.F.**

*Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Head of Department of General and Theoretical Physics of Tula State Pedagogical University named after L.N. Tolstoy, ph. (4872) 35-78-29, e-mail: physics@tspu.tula.ru*

**Sidorova I.G.**

*Post-graduate student of Department of General and Theoretical Physics of Tula State Pedagogical University named after L.N. Tolstoy, ph. (4872) 35-78-29, e-mail: physics@tspu.tula.ru*

**Lakovtsev A.B.**

*Candidate of Physics and Mathematics, Assistant of Department of General and Theoretical Physics of Tula State Pedagogical University named after L.N. Tolstoy, ph. (4872) 35-78-29, e-mail: alex\_lak@rambler.ru*

**Triplet excitons in nanodimensional superlattices EuO – SrO**

**Abstract**

*The work examines a heterosystem on the basis of ferromagnetic semiconductor EuO. Using a spin-Hamiltonian method the scheme of power levels of exciton conditions is constructed. It is established that energy of communication of electron and hole in based exciton increases by a size of energy of an exchange.*

**Key words:** exciton, the ferromagnetic semiconductor, energy of communication, energy of an exchange.

Изучение свойств экситонов в квазидвумерных полупроводниковых системах привлекает большое внимание, прежде всего потому, что они являются наиболее эффективными средами для получения бозе-конденсата (БК) из этих коллективных воз-

---

\* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант 11-02-97500-р\_центр\_а.

буждений в кристаллах. Экситоны могут возникать и в туннельносвязанных квантовых ямах (КЯ) наноразмерных сверхрешеток, где возбужденные электроны и дырки разделены и в тоже время связаны кулоновским притяжением. Из-за дипольного отталкивания они не образуют экситонных молекул, а время жизни их превосходит характерные времена термализации. БК из межъямных экситонов (МЭ) прежде всего создается в условиях пространственного ограничения их свободного движения [1, 2].

Для увеличения накопления плотности экситонов необходимо еще, чтобы они являлись самыми нижними возбуждениями в соответствующей гетеросистеме. Относительная интенсивность этих возбуждений в КЯ значительно больше, чем в объемных кристаллах, что обусловлено как увеличением силы осциллятора экситона, так и особенностями переноса экситонного возбуждения в квазидвумерной системе. Поиск материалов для наноразмерных систем с такими параметрами приводит к ферромагнитным полупроводникам типа  $\text{EuO}$ ,  $\text{EuS}$  и т.п. При получении бездефектных гетеропереходов в соответствующих сверхрешетках монооксидов европия подходят нанослои из оксида стронция, а халькогенидам европия слои из  $\text{PbS}$  или  $\text{SmS}$  [3]. В таких наноструктурах влияние квантоворазмерного эффекта на переходы в недостроенных  $4f$ - оболочках обусловлено сжатием волновых функций электронов, понижением миграции возбуждения, а также изменением взаимодействия экситонных  $5d$ - электронов с фононами [4].

Проведем анализ энергетического спектра экситонов  $5d$ - $5d$ - типа (рис. 1) в наноразмерных гетеросистемах  $\text{EuO-SrO}$ , где ширина запрещенной зоны  $\text{SrO}$  составляет 5,8 эВ, а в нанослое  $\text{EuO}$  равна 3,6 эВ. Барьерной прослойкой является окись стронция, а квантовые ямы образованы монооксидом европия, которая является ферромагнитной при температурах ниже точки Кюри ( $T_c=70\text{K}$ ). В кристаллическом поле  $5d$ - состояния расщепляются на  $e_g$  и  $t_{2g}$ - уровни и разделены энергетической щелью порядка 1,23 эВ. Ферромагнитный катион-катионный обмен понижает энергию  $5d$ - состояния на 0,5 эВ и краю поглощения при возбуждении триплетных (магнитных) экситонов, который соответствует переходу  $4^7f(^8S_{7/2}) \rightarrow 4^6f(F_0)5d_{t_{2g}}$ , отвечает энергия  $\sim 1,1$  эВ. Сдвиг  $t_{2g}$ - полосы в сторону низких энергий отражает кинетическое уширение за счет перекрытия с соседними ионами европия и поэтому оптические экситонные состояния лежат ниже пустых состояний  $5d$ - зоны.

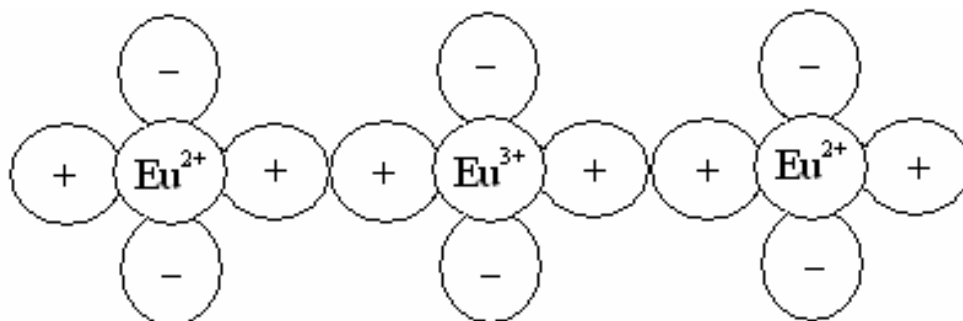


Рис. 1. Образование экситона типа  $5d$ - $5d$

Проанализируем спектр прямых и МЭ, образующихся при переходе электронов с  $4^7f$ - уровней в  $5d_{t_{2g}}$ - состояния слоев  $\text{EuO}$ , разделенных  $\text{SrO}$  (рис. 2).

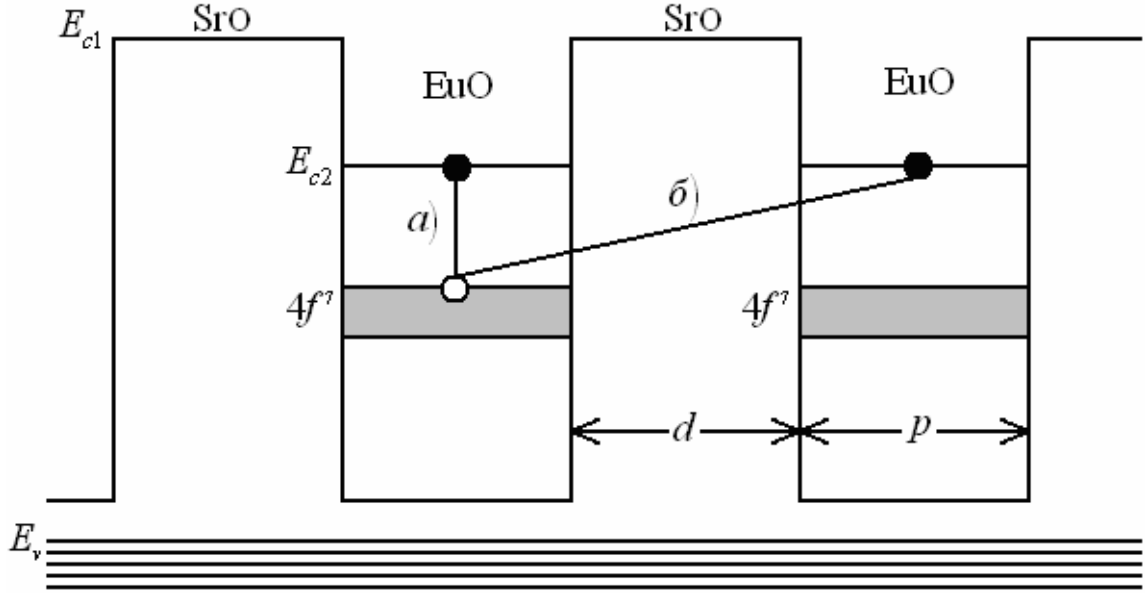


Рис. 2. Схема образования прямых *a)* и межъямных *б)* экситонов в слоях EuO.  $E_{c1}$  и  $E_{c2}$  – дно зоны проводимости,  $E_v$  – потолок валентных зон,  $d$  и  $p$  – ширина слоев

Гамильтониан для прямых экситонов имеет следующий вид:

$$\hat{H}_1^{\epsilon} = \frac{1}{2m_e^*} (-i\hbar\nabla_e)^2 + \frac{1}{2m_h^*} (-i\hbar\nabla_h)^2 - \frac{e^2}{\epsilon_1 |\mathbf{r}_e - \mathbf{r}_h|} - \frac{A}{2} (S_e + S_h) \theta(r \in p), \quad (1)$$

где  $m_{e,h}^*$ ,  $\mathbf{r}_{e,h}$ ,  $S_{e,h}$  – эффективные массы, координаты, спин электрона (дырки),  $\epsilon_1$  – диэлектрическая проницаемость слоя EuO,  $A$  – интеграл косвенного обмена;  $\theta(r \in p) = 1$  при  $\mathbf{r} \leq p$  и  $\theta(r \in p) = 0$  при  $\mathbf{r} > p$  [5].

В случае МЭ гамильтониан запишется в следующей форме:

$$\hat{H}_2^{\epsilon} = \frac{1}{2m_e^*} (-i\hbar\nabla_e)^2 + \frac{1}{2m_h^*} (-i\hbar\nabla_h)^2 - \frac{e^2}{\epsilon_2 (d^2 + |\mathbf{r}_e - \mathbf{r}_h|^2)^{1/2}} - \frac{A}{2} (S_e + S_h) \theta(r \in p). \quad (2)$$

Здесь  $\epsilon_2$  – диэлектрическая проницаемость SrO,  $d$  – ширина данного слоя.

При определении энергии экситонов (рис. 2) волновые функции подбирались в виде линейной комбинации одночастичных состояний с определенной локализацией дырки и электрона [6, 7]:

$$\Psi = \sum_{i,j} a_{ij} \Psi_{ji}(\mathbf{r}_e, \mathbf{r}_h), \quad (3)$$

где  $a_{ij}$  – амплитуда вероятности их обнаружения. Энергии экситонов определялись из уравнений:

$$\begin{aligned} \langle ij | \hat{H}_1^{\epsilon} | nm \rangle - E_1 \langle ij | nm \rangle &= 0, \\ \langle ij | \hat{H}_2^{\epsilon} | nm \rangle - E_2 \langle ij | nm \rangle &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Исходя из условия минимума полной энергии электронной системы, находим

$$E = -\frac{1}{2} \left[ A(S_e + S_h) + \frac{\mu e^2}{\hbar^2 \varepsilon_1^2 n^2} \right] + \frac{\hbar^2 \mathbf{k}^2}{2(m_e^* + m_h^*)}, \quad (5)$$

где  $\mu = \frac{m_e^* m_h^*}{m_e^* + m_h^*}$  – приведенная масса. Величина энергии отсчитывалась от дна зоны проводимости  $E_{c2}$ . Как видно из формулы (5), она возросла на величину энергии обмена.

Перейдем к анализу энергетического спектра экситона  $5d-5d$ - типа, с учетом мультиплетности  $5d_{t_{2g}}$  - состояния, т.е. возможности перехода спин-поляризованного электрона в сильном обменном поле  $B_E=0$  в состояния  $5d_{xy}$ ,  $5d_{yz}$  и  $5d_{xz}$  из одного из семи уровней  $4f$ - полосы. В этом случае получаем 21 переход, связанный с поглощением или излучением энергии (рис. 3).

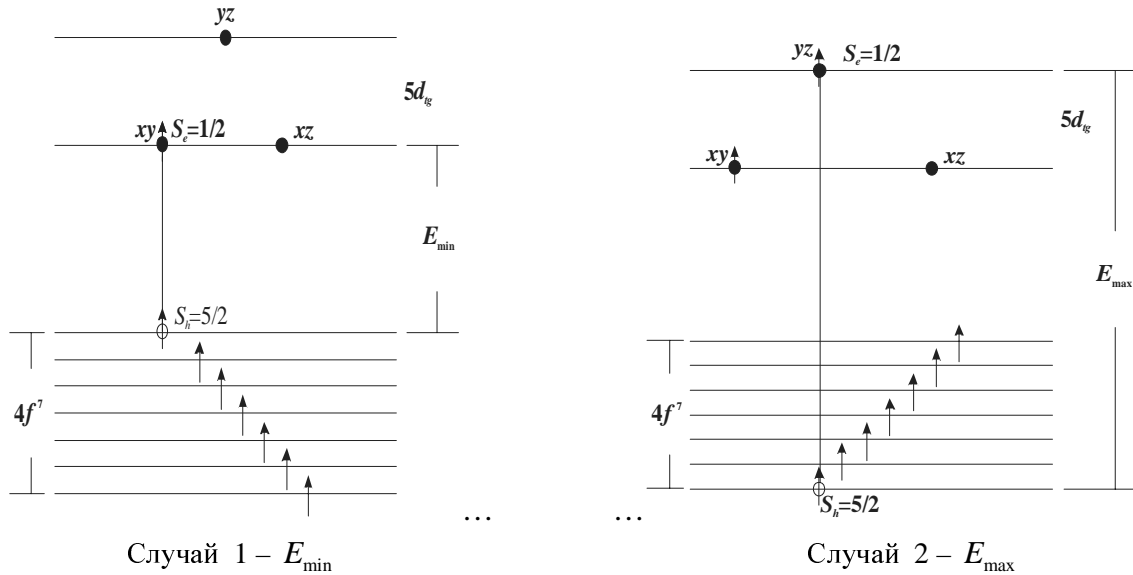


Рис. 3. Переход электрона с  $4f^7$ - уровней на  $5d$ - уровни с сохранением параллельной ориентации спинов  $\uparrow S_e$  и  $\uparrow S_h$ . Всего таких переходов 21. Случай 1 соответствует минимальному значению энергии поглощения  $E_{\min}$ , случай 2 –  $E_{\max}$

Задачу с центральным ионом  $\text{Eu}^{3+}$ , двенадцатью ближайшими соседями  $\text{Eu}^{2+}$  и  $5d_{t_{2g}}$  - состояниями экситонного электрона можно решить точно. В этом случае и магнитные, и аномальные свойства такой системы рассматриваются с помощью модели обменного (молекулярного) поля. Спиновый гамильтониан такой системы имеет вид:

$$H_{\text{обм}} = -\sum_{n>m} J_{nm} S_n S_m - 2 \sum_{d,n} J_{d,n} \sigma_d S_n - 4 \sum_{d,l} J_{d,d'} \sigma_d \sigma_{d'}, \quad (6)$$

где первый член описывает прямой обмен между  $4f^7$ - электронами  $n$  и  $m$  узлов, второй –  $d-f$ - обменную связь между  $5d_{t_{2g}}$  - электроном и  $4f^7$ - электронами и третий – обменную связь между  $5d_{t_{2g}}$  и  $5d'_{t_{2g}}$  - электронами. В нашей задаче достаточно рас-

смотреть модель с центральным ионом  $\text{Eu}^{3+}$ , ближайшими соседями  $\text{Eu}^{2+}$  и  $5d_{t_2g}$  электроном. Тогда эффективный спиновый гамильтониан (6) примет вид [8]:

$$H_{\text{эфф}} = -2\sigma_d(J_0S_c + J_1S_u), \quad (7)$$

где  $S_u = \sum_n S_n$  – сумма спинов ближайших соседей,  $S_c$  – спин центрального иона  $\text{Eu}^{3+}$ ,  $\sigma_d$  – спин экситонного электрона,  $J_0$  – константа  $s$ - $f$  обменного взаимодействия,  $J_1$  – константа  $d$ - $f$  обменного взаимодействия. В (7) член, описывающий прямой обмен между  $4f^7$ - электронами, отсутствует, так как он много меньше  $d$ - $f$ - обменного взаимодействия.

Найдем возможные энергетические уровни, на которые может переходить электрон магнитного экситона, находясь в обменном поле, в соответствие с мультиплетностью состояний  $S_u$ . До возбуждения состояние этого электрона будет описываться спиновой функцией  $|S_m, S_m^7, S_u, \xi, \pm\rangle$ , где через  $(\pm)$  обозначено параллельное или антипараллельное расположение спинов  $\sigma_d$ , а  $\xi$  определяет мультиплетность состояний для ближайших соседей  $S_u$ .

Группа симметрии  $\text{EuO}$  есть  $O_h^5$  и состояния классифицируются по неприводимым представлениям этой группы. Эти состояния составлены из  $5d_{t_2g}$  - состояний центрального и двенадцати ближайших ионов европия. В частности, оптически активные триплетные экситонные состояния можно составить из состояний  $\Gamma_{12}^+$  или  $\Gamma_{25}^+$  - типа.

В гамильтониане (7) оператор полного спина равен  $S_m = \sigma_d + S_c + S_u$ , а оператор полного  $4f^7$ - спина ионов европия определяется соотношением  $S_f = S_c + S_u$ . Далее, квантовые числа для операторов  $S_u^2$  и  $S_m^2$  равны соответственно  $S_u(S_u + 1)$  и  $S_m(S_m + 1)$ . В этом случае  $S_u = 42, 41, \dots, 1, 0$ , а  $S_m = S_u + 4, \dots, S_u + 3, \dots, S_u - 4$  или  $S_m = 4 + S_u, \dots, 3 - S_u$ . Для обозначения собственных значений гамильтониана (7) будем использовать суммарный спин соседей  $S_u$  и полный спин нашей системы  $S_m$ . Из рекуррентного соотношения [9] можно получить мультиплетности для двенадцати спинов  $\text{Eu}^{2+}$  ближайших соседей. Как и следует ожидать, если суммарный спин этих соседей будет равен нулю ( $S_u = 0$ ), то число мультиплетности окажется равным  $2,5 \cdot 10^7$ , то есть экситонная зона будет состоять из большого числа плотно расположенных энергетических уровней. В большом обменном поле все спины этих соседей будут параллельны и  $S_u = \sum_{n=1}^{12} S_n = 42$ , а число мультиплетности станет минимальным – равным единице. Для этого случая, волновая функция, когда экситонный электрон перейдет с  $4f^7$ - уровня на  $5d_{t_2g}$  - уровень, запишется в виде  $|S_u \cdot 1, (S_u + 4), +\rangle_{fd}$ , а собственное значение получается из выражения:

$$\langle S_u \cdot 1, (S_u + 4), + | -2J_0\sigma S_e - 2J_1\sigma S_u | S_u \cdot 1, (S_u + 4), + \rangle_{fd} = -\frac{5}{2}J_0 - S_u J_1. \quad (8)$$

Если бы направление спинов экситонного электрона и на центральном ионе  $\text{Eu}^{3+}$  было противоположно спинам ближайших соседей, то состояние следовало бы записать в таком виде  $|S_u \cdot 1, (S_u - 4), -\rangle_{fd}$  и собственное значение гамильтониана (8) изменилось бы и стало равным:

$$\langle S_u \cdot 1, (S_u - 4), - | -2J_0 \sigma S_c - 2J_1 \sigma S_u | S_u \cdot 1, (S_u - 4), + - \rangle_{fd} = -\frac{5}{2} J_0 - (S_u + 1) J_1. \quad (9)$$

В конкретных расчетах учтем, что обменное взаимодействие между экситонным электроном  $5d_{t_2g}$  и  $4f^7$  - электронами ближайших соседей заметно меньше, чем взаимодействие  $d-f$ - типа в триплетном экситоне и согласуется с величиной  $J_{sf} = J_1 = 209 \text{ см}^{-1}$ , а  $J_{df} = J_0 = 787 \text{ см}^{-1}$ . Исходя из этих данных и выражения для собственного значения гамильтониана (9) получим величину энергии связи для оптически активного триплетного экситона, принадлежащего к  $5d-5d$ - типу. Она оказалась равной  $0,8 \text{ эВ}$ , что существенно превышает энергию связи в известных полупроводниковых материалах, широко используемых сегодня в экситонике. Окись европия является по этому параметру перспективным материалом для получения БК из экситонов.

Для расчета энергии экситонов методом спин – гамильтониана необходимо построить базис волновых функций, включающий в себя спины электрона и дырки [10]. При этом главным образом, необходимо учесть четыре варианта взаимной ориентации спинов электрона и дырки:

$$\begin{aligned} \psi_1^{\downarrow\downarrow} &= |k; \downarrow, -\frac{3}{2}\rangle, \psi_4^{\uparrow\uparrow} = |k; \uparrow, \frac{3}{2}\rangle, \\ \psi_{2,3}^{\downarrow\uparrow+\uparrow\downarrow} &= (-a_2, a_3) |k; \downarrow, \frac{1}{2}\rangle + (a_2, a_3) |k; \uparrow, -\frac{1}{2}\rangle, \end{aligned} \quad (10)$$

где  $k$  – волновой вектор экситона,  $a_2, a_3$  – константы, определяемые из решения уравнения Шредингера.

Наконец, для анализа спектра прямых и МЭ целесообразно подбирать волновые функции в виде линейной комбинации одночастичных состояний с определенной локализацией электрона и дырки (3).

Для определения энергетического спектра экситонов в сверхрешетке необходимо решить уравнение  $\text{H}\Psi = \text{E}\Psi$ , причем, вид гамильтониана системы зависит от выбора пробных волновых функций.

$$\psi_e(Z_e, \rho) = F_{3D}(Z_e, \rho) \varphi_{eX_3}(Z_e) |X_{3,S}\rangle, \quad (11)$$

При выборе (11) в качестве волновой функции, оператор гамильтона имеет вид:

$$H(k) = H'(k) + U(r). \quad (12)$$

Здесь  $H'(k)$  – гамильтониан, определяющий спектр вблизи точки  $X_3$ ,  $U(r) = -\frac{Ze^2}{\epsilon r}$  – кулоновский потенциал,  $\epsilon$  – диэлектрическая проницаемость,  $Z$  –

суммарный заряд на  $4f$ - уровне. Для гетеросистемы  $\text{EuO-SrO}$  гамильтониан  $H'(k)$  можно представить в виде:

$$H'(k) = E_0(z) + \frac{\hbar^2 k_{\parallel}^2}{2m_{\parallel x}} + \frac{\hbar^2 k_{\perp}^2}{2m_{\perp x}} + \begin{bmatrix} 0 & -iDk_z \\ iDk_z & 0 \end{bmatrix}, \quad (13)$$

где  $k_z = -i \frac{\partial}{\partial z}$ ,  $E_0(z)$  – энергетическое положение точки  $X_3$ ,  $D$  – константа, описывающая  $\mathbf{kp}$ - взаимодействие.

Следует заметить, что использовать (12) для расчета энергетического спектра экситонов в сверхрешетке  $\text{EuO-SrO}$  неудобно, ввиду того, что гамильтониан не учитывает напрямую обменное  $4f-5d$ - взаимодействие, главным образом определяющее экситонный спектр в заданной гетеросистеме. Для его учета в (13) необходимо раскрыть константу  $\mathbf{kp}$ - взаимодействия, имеющую вид матрицы  $8 \times 8$ , что осложнит математические вычисления.

Использование базиса (10) в качестве волновых функций позволяет учесть спиновые ориентации электрона и дырки. При наличии внешнего магнитного поля на спин электрона и дырки будет действовать эффективное магнитное поле

$$H = \frac{7}{2g_{e,h}^{-1}\beta^{-1}} \sum_i J_{Eui} B_{\gamma/2} g \beta H_0 (kT)^{-1}, \quad (14)$$

где  $H_0$  – внешнее поле. Причем, прямое действие  $H_0$  на электрон и дырку оказывается гораздо меньше (только в том случае, если внешнее магнитное поле  $H_0$  меньше некоторого критического значения  $H_{kp}$ ), чем (14). В этом случае гамильтониан можно представить в виде:

$$H = A_e s_e + A_h s_h^{\varphi\phi\phi} + g_e \beta H_0 s_e + g_h \beta H_0 s_h^{\varphi\phi\phi} + J_{e,h} s_h^{\varphi\phi\phi} s_e, \quad (15)$$

$$A_{e,h} = n_{e,h} J_{e,h} s_{Eu}, \quad (16)$$

где  $s_e$  – спин электрона,  $s_h^{\varphi\phi\phi}$  – эффективный спин дырки,  $J \equiv J_{e,h}$  – константа обменного взаимодействия,  $n_{e,h}$  – концентрации электронов и дырок соответственно.

Использование волновых функций в виде (10) и гамильтониана в виде (15) позволяет построить схему энергетических уровней экситона, расщепленных обменным взаимодействием:

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{1}{2} [3/2 J - (3A_h + A_e)], \\ E_{2,3} &= \frac{1}{2} \left\{ -\frac{1}{2} J \mp [(A_e - A_h)^2 + 4J^2]^{1/2} \right\}, \\ E_4 &= \frac{1}{2} [3/2 J - (3A_h + A_e)]. \end{aligned} \quad (17)$$

Выражения (17) имеют такой вид, если в (15) не учитывать внешнее магнитное поле. Схема энергетических уровней экситона приведена на рис. 4.

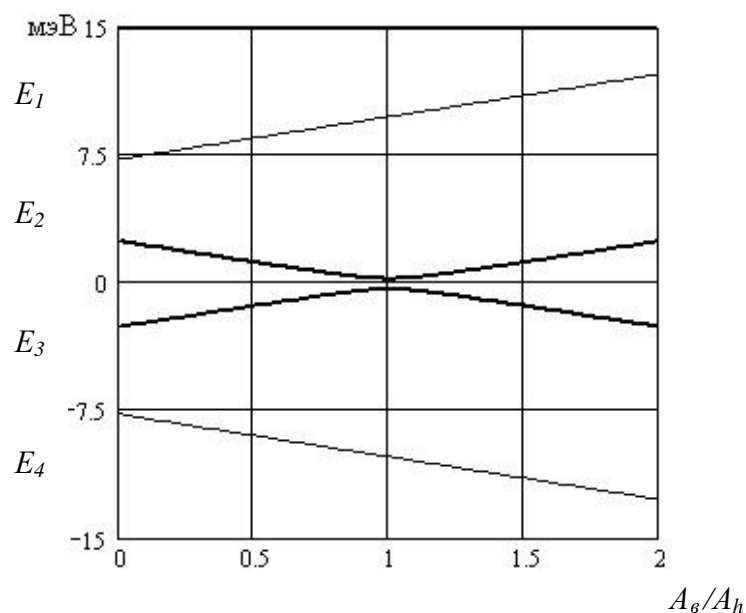


Рис. 4. Схема энергетических уровней экситона в структуре EuO–SrO

При условии, что число ионов европия, с которыми эффективно обменное взаимодействие электронов, равно такому же числу ионов европия, с которыми эффективно обменное взаимодействие дырок, уширение экситонной полосы составляет 30 мэВ. При дальнейшем повышении концентрации ионов  $\text{Eu}^{2+}$  наблюдается сильное размытие экситонных полос.

#### Примечания:

1. Зайцев С.В., Бричкин А.С., Дорожкин П.С., Bacher G. Релаксация экситонов в полумагнитных асимметричных двойных квантовых ямах // ФТП. 2008. Т. 42, вып. 7. С. 831-845.
2. Головнев Ю.Ф., Лаковцев А.Б. Конденсация магнитных экситонов в сверхрешетках типа ферромагнитный / парамагнитный полупроводник // Вестник Адыгейского государственного университета. Сер. «Естественно-математические и технические науки». 2009. Вып. 2. С. 74-80. URL: <http://vestnik.adygnet.ru>
3. Головнев Ю.Ф., Панин В.А., Прохорова Т.А. Электронная структура границы раздела SrO – EuO // Известия ТГУ. Сер. «Физика». 2001. Т. 7, вып. 2. С. 65-69.

#### References:

1. Zaytsev S.V., Brichkin A.S., Dorozhkin P.S., Bacher G. The relaxation of excitons in semimagnetic asymmetric double quantum wells // FTP. 2008. Vol. 42, Iss. 7. P. 831-845.
2. Golovnev Yu.F., Lakovtsev A.B. Condensation of magnetic excitons in superlattices of ferromagnetic type / paramagnetic semiconductor // Bulletin of the Adyghe State university. Series «Natural-mathematical and technical sciences». 2009. Iss. 2. P. 74-80. URL: <http://vestnik.adygnet.ru>
3. Golovnev Yu.F., Panin V.A., Prokhorova T.A. The electronic structure of the border of the section SrO – EuO // TGU News. Series «Physics». 2001. Vol. 7, Iss. 2. P. 65-69.



- 
4. Оптические свойства структур с квантовыми ямами  $\text{Cd}_{0.6}\text{Mn}_{0.4}\text{Te}$  /  $\text{Cd}_{0.5}\text{Mg}_{0.5}\text{Te}$  / В.Ф. Агемян, Н.Н. Васильев, А.Ю. Серов [и др.] // ФТТ. 2004. Т. 46, вып. 9. С. 1719-1722.
  5. Головнев Ю.Ф., Лаковцев А.Б. Прямые и межъямные экситоны в гетероструктурах на основе редкоземельных полупроводников // Известия Тульского государственного университета. Сер. «Естественные науки». 2008. Вып. 1. С. 136-144.
  6. Верцимаха А.В., Лев С.Б., Сугаков В.И. Межъямные экситоны в полумагнитных полупроводниковых двойных квантовых ямах во внешнем магнитном поле // ФТТ. 2004. Т. 46, вып. 5. С. 919-923.
  7. Головнев Ю.Ф. Наноразмерные ферромагнитные гетеросистемы. Тула: Изд-во ТГПУ, 2007. 262 с.
  8. Головнев Ю.Ф., Лаковцев А.Б. Коллективные свойства триплетных экситонов в гетероструктурах на основе ферромагнитных полупроводников // Известия РАН. Сер. физическая. 2011. Т. 75, № 2. С. 194-196.
  9. Метфессель З., Маттис Д. Магнитные полупроводники. М.: Мир, 1972. 405 с.
  10. Комаров А.В., Рябченко С.М., Витриховский Н.И. Магнитное поле расщепление  $n=2$  экситонного состояния в  $\text{ZnTe:Mn}$  // Письма в ЖЭТФ. 1978. Т. 28, вып. 3. С. 119-123.
  4. The optical properties of structures with quantum wells  $\text{Cd}_{0.6}\text{Mn}_{0.4}\text{Te}$  /  $\text{Cd}_{0.5}\text{Mg}_{0.5}\text{Te}$  / V.F. Agekyan, N.N. Vasiljev, A.Yu. Serov [etc.] // FTT. 2004. Vol. 46, Iss. 9. P. 1719-1722.
  5. Golovnev Yu.F., Lakovtsev A.B. Straight and interwell excitons in heterostructures on the basis of rare-earth semiconductors // News of the Tula State university. Series «Natural sciences». 2008. Iss. 1. P. 136-144.
  6. Vertsimakha A.V., Lev S.B., Sugakov V.I. Interwell excitons in semimagnetic semiconductor double quantum wells in the external magnetic field // FTT. 2004. Vol. 46, Iss. 5. P. 919-923.
  7. Golovnev Yu.F. Nanodimensional ferromagnetic heterosystems. Tula: TGPU Publishing house, 2007. 262 p.
  8. Golovnev Yu.F., Lakovtsev A.B. The collective properties of triplet excitons in heterostructures on the basis of ferromagnetic semiconductors // News of the Russian Academy of Sciences. The physical series. 2011. Vol. 75, No. 2. P. 194-196.
  9. Metfessel Z., Mattis D. Magnetic semiconductors. M.: Mir, 1972. 405 p.
  10. Komarov A.V., Ryabchenko S.M., Vitrikhovskiy N.I. Magnetic field splitting  $n=2$  of exciton condition in  $\text{ZnTe:Mn}$  // Letters to ZHETF. 1978. Vol. 28, Iss. 3. P. 119-123.