
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ЭКОНОМИКЕ

MATHEMATICAL METHODS IN ECONOMY

УДК 330.101.541(470)

ББК 65.012.3(2Рос)

Б 86

Ф.Б. Боташева

Кандидат экономических наук, доцент, доцент кафедры бухгалтерского учёта и аудита Северо-Кавказской государственной гуманитарно-технологической академии, г. Черкесск. Тел.: (928) 655 94 80, e-mail: igvint@mail.ru

Новые результаты фазового представления российской макроэкономической динамики

(Рецензирована)

Аннотация. В статье замечено, что ВВП, инфляция, число безработных и прочие макроэкономические категории чрезвычайно трудны для изучения из-за многочисленности стохастических экзогенных и эндогенных воздействий. Новые для экономики методы фазового анализа представления и визуализации циклов помогают найти императивы природы и механизмов макроэкономического развития России в 1992–2011 гг.

Ключевые слова: макроэкономика, конъюнктуры, фазовое пространство, экономическая цикломатика, сплайн-аппроксимация

F.B. Botasheva

Candidate of Economics, Associate Professor of Accounting and Audit Department, the North-Caucasian Academy of Humanities and Technology, Cherkessk. Ph.: (928) 655 94 80, e-mail: igvint@mail.ru

New results of phase representation of the Russian macroeconomic dynamics

Abstract. The paper informs that gross national product, inflation, the number of unemployed workers and other macroeconomic categories are extremely difficult for studying because of a large number of stochastic exogenous and endogenous influences. The new methods of the phase analysis of cycle representation and visualization help us to find strokes to understanding of the nature and mechanisms of macroeconomic development of Russia for 1992-2011.

Keywords: macroeconomic, conjunctures, phase space, economic cyclomatics, spline-approximation.

Существующие методы экономического анализа, не будучи наполненными математическими и инструментальными концепциями, в значительной мере устарели, они так и не смогли дать полного научного представления об основных связях экономических переменных и количественных экви-

валентах процессов и явлений. Ранее были предложены принципиально новые подходы к анализу экономического поведения [1, 2, 3]. При описании этих подходов ограничимся временным анализом конъюнктур.

Количественное представление динамики любого макроэкономического

поведения, включая ВВП, инфляцию, безработицу, валютные курсы, личные доходы, потребительские расходы, цены, инвестиции, объёмы розничных продаж, динамику работоспособного населения, ... своеобразно. Результаты этой деятельности интегрируют балансовые соотношения за некий период времени (неделю, месяц, квартал, год), экономический показатель рассчитывается по концу этого периода. Поэтому в классике для показателей практической экономики не характерны гладкие аналитические зависимости, экономический показатель представляется не как часть непрерывной аналитической кривой, а как набор табличных значений. Графическим представлением экономической динамики становится множество дискретных точек, математическим — множество кортежей длины два $\{(X_i, Y_i)\}$, где первая компонента кортежа X_i часто соответствует времени отсчёта t_i , вторая — Y_i — значению показателя в это время. Эти функции принято называть «решётчатыми». С «решётчатыми» функциями трудно работать, особенно при определении тенденций, наклонов, точек экстремума нельзя вычислять производные. Если экономический процесс представляется «решётчатой» функцией, то невозможно определить характер его временного класса, неизвестного исследователю.

Первый шаг в построении новой исследовательской платформы состоит в отказе от «решётчатых» функций, таблиц и замене их гладкими непрерывными аналитическими кривыми. Для этого привлекаются полиномы (степенной, экспоненциальный, периодический, ...) и критерии согласия. Они могут быть точными, когда кривые проходят точно через отчётные точки процесса, так и приближёнными, тогда кривые могут проходить «мимо» точек процесса, но «наилучшим образом» (метод наименьших квадратов). Полученная тем или иным способом кривая, аналитический сигнал или непрерывная модель обладает целым рядом новых свойств, редко используемых экономистами. К ним можно отнести спектральный состав сигнала, явное

вычисление и использование его производных (первой, второй и т.д.), появление зависимости последующих случайных отсчётов от значений предыдущих («экономическая память») и пр.

Второй этап — после явного определения временного класса конъюнктур на различных временных отрезках необходимо строить и связывать друг с другом релевантные этим временным классам локальные модели. Когда интервалов много, а временной класс меняется от одного временного фрагмента к другому, то требуется прийти к единой (унифицированной, универсальной) системе приближающих функций и к непрерывному ансамблю. Модель строится на базе системы «кусочно-универсальных» функций, которые должны своими фрагментами идемпотентно моделировать экономические процессы с разными временными классами на интервалах естественного временного ряда. Переход на непрерывные модели, подкреплённый богатыми возможностями аналитической математики, стал необходимым. Мы предложили использовать в экономике систему кусочно-полиномиальных функций и моделей, которые, сохраняя единую аналитическую форму, могли бы изменять только свои числовые характеристики при переходе от одного временного участка к другому. Так, в качестве основы «кусочного» инструментария привлечены кубические сплайн-функции. Достоинств сплайн-аппарата много, он не только сглаживает «решётчатую» функцию процесса, минимизируя кривизну построения, но и явно даёт исследователю все его производные, показывает текущее значение лага переменной, лаг приводит к появлению и развитию циклов, а всё это вместе позволяет по-новому взглянуть на эволюцию экономических процессов.

Третье соображение. Известно, что непрерывность — основное свойство всех экономических процессов. Идея непрерывности в экономике предполагает использование переменных величин, которые могут принимать любые, сколь угодно близкие друг к другу значения, хотя это редко имеет место в ре-

альном мире. Тем не менее почти все экономические теории формулируются в терминах непрерывных переменных, а предположение о выполнении таких условия в эконометрических моделях стало частью общего подхода. Если непрерывность имеет место, то разумно считать, что она должна существовать во всех точках, в том числе и в точках, где происходят структурные изменения [4]. Из налагаемого ограничения непрерывности следует, что применение аналитических моделей обеспечивает более адекватное отражение всех форм конъюнктурного поведения и структурных изменений, не выступающих в форме структурных катаклизмов. А. Маршалл в своей книге "Principles of economics, an introductory volume" (1890) говорит об этом кратко: "Natura non facit saltum" — «Природа не делает скачков».

Четвёртое положение. В последнее время всё большую роль в глобализующихся, усложняющихся и ускоряющихся процессах мировой экономики начинают играть циклические флуктуирующие конструкции. Существуют два подхода к объяснению экономических флуктуаций динамики: синергетический (из-за имманентной эндогенной и экзогенной неустойчивости экономической системы) [5] и классический [6]. Согласно постулатам классики движущими силами экономических циклов выступают:

— по Дж.М. Кейнсу — колебания совокупного спроса, при этом совокупный спрос определяет объём инвестиций, колебания которого, в свою очередь, вызывают колебания уровня деловой активности;

— по К. Марксу — колебания нормы прибыли;

— по М. Фридману — колебания предложения денег;

— по Й. Шумпетеру — технологические изменения (инновации).

Взаимосвязь трендовых и периодических движений экономических показателей, а также их отличительные особенности всегда волновали исследователей. Особенно ярко их различия проявляются в макроэкономике, где

происходит круговорот таких глобальных экономических категорий, как ВВП, инфляция, безработица, норма процента, валютные курсы, мировые цены на нефть, демографические показатели, цены, ... Было принято считать, что мегаэкономическое поведение в долгосрочном периоде трендово, а экономические флуктуации характерны для краткосрочной динамики. Это утверждение основывалось на том, что тренд интегрирует случайные выбросы и представляет собой устойчивую тенденцию, некоторую гладкую непрерывную кривую с минимумом экстремумов, проходящую через характерные точки показателя.

Модель совокупного спроса и совокупного предложения (с учётом запаздывающего движения их друг относительно друга) ложится рабочим инструментом в основу классической «теории экономических флуктуаций» или новой «экономической цикломатики» [3]. Взаимодействие уровня цен и объёма выпускаемой продукции в конечном итоге приводит к установлению равновесия «совокупного спроса» и «совокупного предложения». Перемещение показателей с временным запаздыванием от точки к точке на кривых «предложения» и «спроса» приводят к колебаниям параметров в системе.

Конечно, колебания большинства макроэкономических показателей синхронизованы и здесь ведущую роль играет обобщающий показатель экономической деятельности — реальный объём ВВП. Когда во время рецессии реальный объём ВВП снижается, то же происходит и с личными доходами, прибылью корпораций, потребительскими расходами, инвестициями, объёмом промышленного производства, объёмом розничных продаж и т.д., ибо спад отражается во всей экономике и проявляется почти во всех макроэкономических показателях. Хотя большинство макроэкономических переменных изменяется синхронно, можно, забегая вперёд, сказать — синфазно, временные лаги, формы, амплитуды и периоды их колебаний могут быть весьма различны.

Достаточно просто описываются состояния, в которых пребывают экономические системы на различных стадиях экономического цикла. Решение более трудной задачи — объяснение причин, вызывающих эти колебания, их повторяемость, наследуемость, волнообразность процесса, колеблемость, создание теории делового цикла, «теории экономического осциллятора», «волнового принципа» (как у Р.Н. Эллиотта), «теории экономических флуктуаций», «периодизма», «ритмологии», «ритмичности», того, что теперь называется «экономической цикломатикой» — всё это ещё дискуссионно.

Пятая деталь нового в цикломатическом анализе состоит в привлечении в экономику методов фазового анализа. Циклы как «круговые» конструкции трудно выделить из временных рядов. Фазовый анализ является одним и может быть пока единственным из таких подходов [2]. Особенностью этого метода является комплексный анализ на фазовой плоскости. Фазовое построение может быть и пространственным, его координатными осями будут сама функция, её первая производная и независимая переменная, в качестве которой удобно брать текущее время. Фазовым портретом будем называть построенную на фазовой плоскости кривую, представляющую собой зависимость первой производной $Y'(t)$ некоторой непрерывной функции $Y(t)$ от самой этой же функции $Y(t)$, время t играет роль параметра. На фазовом портрете отрезок прямой, параллельный оси переменной $Y(t)$, на временной картине будет представлять собой монотонно растущую прямую. Замкнутая кривая фазового портрета указывает на периодические колебания переменной $Y(t)$, расширяющаяся спираль свидетельствует о росте амплитуды колебаний со временем, «сворачивающаяся» спираль соответствует затуханию колебаний. Фазовый анализ динамики экономических показателей нов для экономики, он реализуется в фазовом пространстве в виде фазовых траекторий на фазовых портретах, в картинах параметрических взаимных зависимо-

стей. Хотя фазовые портреты уже давно играют важную роль в математике, математическом анализе, прикладной математике, физике, электронике, электротехнике, технических приложениях.

Вообще говоря, в математике понятие «фазовое пространство» и далее — «фаза», «фазовая плоскость», «фазовый портрет», «фазовая траектория» — имеет более общий смысл и определяется гораздо менее конструктивно. Там фазовое пространство представляет множество всех возможных состояний системы в фиксированный момент времени. Обычно состояние системы задается некоторым набором чисел (фазовых координат) и представляет собой область в многомерном пространстве или многообразии. Каждому возможному состоянию системы соответствует точка фазового пространства. Каждая точка фазового пространства задаёт состояние всей системы. Сущность понятия фазового пространства заключается в том, что состояние сколь угодно сложной системы представляется в нём единственной точкой, а эволюция этой системы представляется движением такой точки по фазовому пространству. Тогда кривая, описываемая такой точкой, называется фазовой кривой или фазовой траекторией.

Шестой важный посыл. Как показали наши исследования, в рыночной экономике не оказалось гладких трендов (и особенно любимых экономистами прямых линий), все финансовые, экономические, производственные, маркетинговые процессы в условиях рынка, в нано- [7], микро- [1], мезо- [3], макро- [2] и мегаэкономике цикличны, при этом циклическая часть составляет от 20 до 80% от общего уровня экономической переменной. Объясняется этот феномен с многих точек зрения. Можно найти объяснение через классический алгоритм «паутинового» поиска точки пересечения кривых «спроса» и «предложения», но лучше воспользоваться алгоритмами современных «компромиссных» подходов с использованием «ножниц Маршалла» [4]. В любом случае, при динамическом поиске точки

пересечения «спроса» и «предложения» на рынке приходится иметь дело с перманентным изменением «спроса», к которому «предложение» стремится, но с временным лагом. В связи с не стационарностью рынка, «спрос» изменяется, перемещаясь по («пусть и не существующей в природе, но произвольно введённой для простоты понимания и объяснения» [8]) — «кривой спроса». Этот временной сдвиг для многих экономических процессов представляет значительный интерес. В этом случае работает известная в науке гипотеза, объясняющая колебания наличием в любой замкнутой системе «чистого» запаздывания. Так как «предложение» в экономике обязательно следует за «спросом» с некоторым «чистым» временным лагом, то это приводит к установившимся колебаниям, их период зависит от величины лага.

Динамика «паутинного» поиска Тинбергена [9] легко перекладывается на фазовые сплайн-портреты и картины параметрического взаимодействия. На фазовом портрете приближение к точке пересечения кривых «спроса» и «предложения» будет представлять собой сужающуюся спираль с финишной точкой на пересечении нулевого значения первой производной на оси ординат и стационарного значения самой переменной по оси абсцисс. На параметрических картинах видно запаздывающее движение одной переменной по отношению к другой с циклическостью и часто неизменным лагом.

Седьмая новация. Особая роль замкнутых фазовых траекторий в экономической цикломатике состоит в том, что представляемые ими экономические циклы теперь становятся обобщёнными образами экономического поведения, экономическими динамическими объектами более старшего уровня. Тогда динамику макроэкономических процессов удаётся декомпозировать на циклические образования, которые со своими метрическими характеристиками (точка начала, конца, радиус и диаметр цикла, ...) играют роль элементарных макросов, «кирпичиков» при новом построении конъюнктуры.

Перейдём к показу поведения уровня инфляции в российской экономике. Рисунок 1 графически отображает часть «естественной» фазовой инфляционной картины российской макроэкономики последних лет (2000–2008 гг.) со спонтанностью движения инфляции, с появлением «нормальных» (для инфляции) циклов на фазовом портрете. Наибольшие скорости уменьшения инфляции приходятся на октябрь 2002 и май 2006 гг., когда первая производная (тенденция) инфляции была отрицательной и наибольшей. Первая производная инфляции была положительной и наибольшей в январе 2005 г. и в июле 2007 г. с максимумом скорости возрастания инфляции во втором случае.

Ранее было показано [1, 2, 3], что инфляция в экономике США в высшей мере циклична, в связи с этим круговорот её значений может оказаться весьма полезным при определении, моделировании, анализе, визуализации и прогнозировании инфляции в России. Замечательные особенности визуализированной сплайнами циклической инфляционной динамики США на фазовых портретах приучают нас к плавности, непрерывности, гладкости инфляционных циклов. Фазовый подход позволяет по двумерному аналитическому и графическому фазовому описанию продолжить процесс. Рисунок 1 показывает пример экстраполяции по циклическим образам или макросам, он ярко демонстрирует прогнозные достоинства сплайн-аппроксимационного подхода.

За темп инфляции в 2008 г. приняты прогнозные обещания Правительства РФ, это 7,5–8,5%, которые далеко уходят от циклических тенденций 2003–2007 гг., поэтому можно заранее сказать, что они «непомерно оптимистичны». Важно, что за всё время наблюдений перепад тенденции (скорости изменения) инфляции не превышал трёх процентов в год. В [3] были разыграны четыре сценария прогноза инфляции на 2008 г. Было предположено, что инфля-

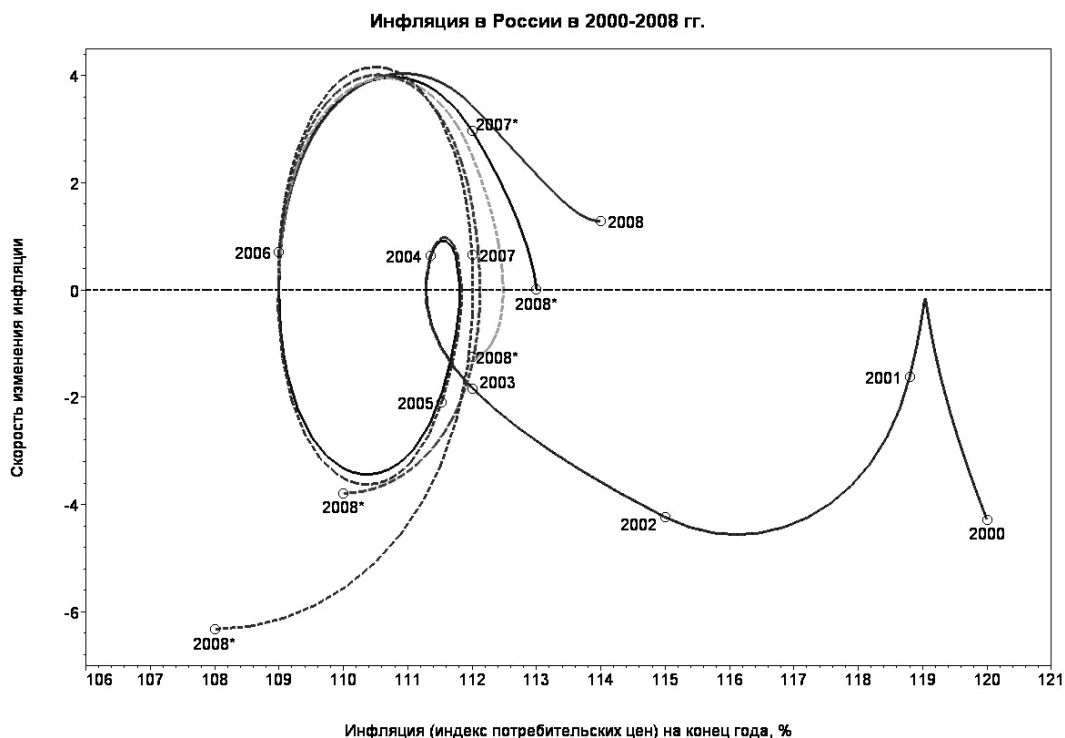


Рисунок 1. Представление фазового инфляционного портрета в экономике России, 2000-2008 гг. с искусственно моделируемыми «прогнозами» на 2008 г. — от 8 (BROWN), 10 (MAGENTA), 12 (GREEN), 13 (NAVY) до 14% (RED).

Кубический сплайн

ция может иметь значения 8, 10, 12, 13%, эти значения отмечены символом «звёздочка». Первая точка соответствует 8% инфляции в России в конце 2008 г., как в начале года думал и говорил премьер В.Н. Зубков. Сплайн-ансамблю было доверено провести «ретроспективно» отрезок 2007–2008 гг. в точку с абсциссой 108 (индекс потребительских цен), моделируя процесс в горизонте прогноза в предположении о минимуме кривизны построенного цикла, о неразрывности и непрерывности как самого показателя, так и всех его производных в 2007–2008 гг. Сплайн приходит в точку с координатами (108, -6.2) — коричневый пунктир. Разрыв тенденции (первой производной) между декабрём 2007 и декабрём 2008 гг. составил бы -9 единиц. В конечной точке этой кривой скорость изменения инфляции стала бы отрицательной, так что к концу 2009 г. эта отрицательная тенденция обеспечила бы ещё большее и даль-

нейшее падение инфляции — от 8% в сторону нуля, что нереально.

Аналогично были проверены обещания министра финансов РФ А.Л. Кудрина о 10% инфляции в 2008 г. — пунктир цвета мажента. Разрыв тенденции за 2008 г. составил бы -6 единиц, тенденция в точке «2008» была бы отрицательной и также достаточно большой, чтобы инфляция к 2009 г. тоже значительно уменьшилась. Аналогичен ретроспективный прогноз для инфляции в 12% (зелёный пунктир) и в 13% (синяя сплошная линия). В последнем случае видим привычный за последние годы разрыв тенденции в -3 единицы (% в год), и в точке «2008*» скорость изменения инфляции равнялась бы нулю, инфляция остановилась бы на этом уровне после точки «2008». Прогноз [4] дал почти 14% уровень инфляции (красная сплошная линия), разрыв тенденции теперь составляет -2 единицы, тенденция оставалась бы небольшой, но положительной,

что неприятно, но верно гарантирует повышение инфляции в 2009 г. по сравнению с 2008 г.

Восьмое определение. Среди экономических процессов с точки зрения меры их инерционности будем различать процессы производственные (постоянная времени — годы, процессы медленные), процессы финансовые (постоянная времени — месяцы, процессы среднего темпа) и информационные процессы (постоянная времени — дни, процессы быстрые). В экономике чрезвычайно интересно знать инерционность процессов, их постоянные времени, периоды или времена отклика экономической, производственной, финансовой, маркетинговой системы и их составляющих на изменение управляющего фактора. Такое направление экономического анализа можно было бы назвать «экономической хроноскопией», анализом «экономического времени», поиском «экономических» постоянных времени, анализом экономического запаздывания, анализом

экономической инерционности или анализом экономического лага. Интересно узнать, сколько лет нужно инфляции, чтобы она вернулась в исходное положение, совершив полный цикл изменения, сколько месяцев необходимо сберегательному банку для повторения его показателей (финансового результата, расходов, доходов) и т.д.

На рисунке 2 покажем работу достаточно известного хроноскопического показателя, хотя и не макроэкономического, — динамику урожайности озимой пшеницы в Ставропольском крае с 1870 по 2007 гг. Построим «настоящий» или истинный фазовый портрет урожайности $Y(t)$ (ось абсцисс) в зависимости от её первой производной $Y'(t)$ (ось ординат) в те годы (1870–2007), для которых эта величина известна. На рисунке поставлены параметрические точки последних семи лет, чтобы, рассмотрев окончание фазовой кривой, попытаться аналитически и графически прогнозировать течение процесса.

Фазовый портрет динамики урожайности озимой пшеницы
в Ставропольском крае, 1870-2007 гг.

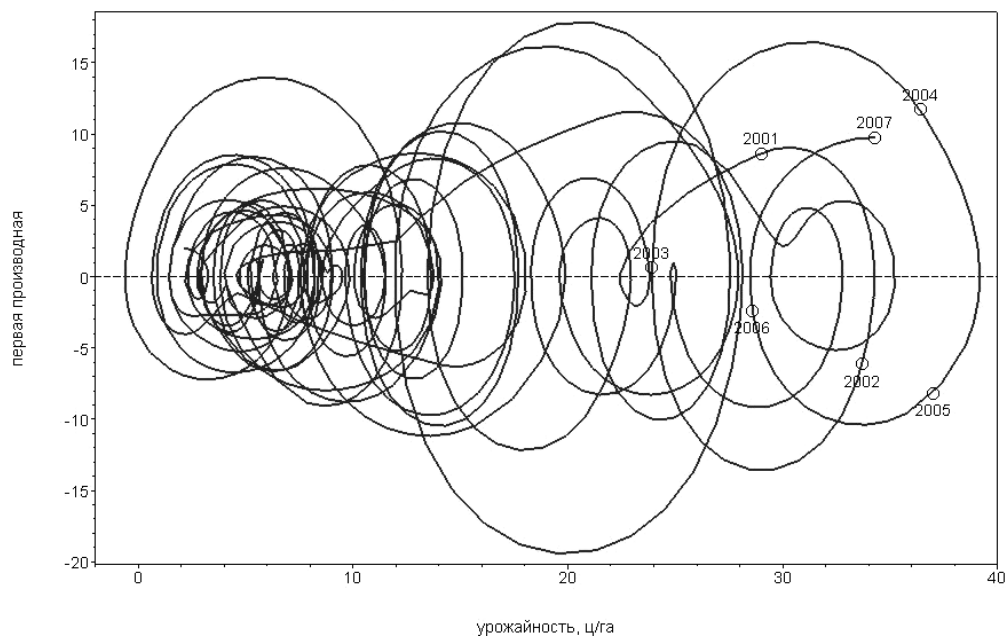


Рисунок 2. Фазовый портрет динамики урожайности озимой пшеницы по Ставропольскому краю с 1870 по 2007 гг.

Круговорот циклов, перемещающихся слева-направо к интегральному увеличению урожайности (ось абсцисс).

За 138 лет радиус циклов по оси ординат, первой производной урожайности, меняется не очень сильно

Как хорошо видно, длины циклов урожайности (например, последнего квазицикла 2004–2007 гг. — 3 года, полного последнего цикла 2001–2007 гг. — 5,7 лет) могут резко отличаться от длины цикла (сезона) солнечной активности, равного 11 годам. Правда, цикличность солнечной активности — весьма сложное понятие. В 1843 г. немецкий астроном Швабе открыл периодичность числа пятен, находящихся на Солнце — 11-летний цикл. В действительности период цикла в среднем равен 10,5 лет, при этом расстояние между экстремумами цикла существенно меняется от цикла к циклу — от 7,3 до 17,1 лет между максимумами и от 9 до 13,6 лет между минимумами. Однако все эти величины длин астрономических циклов заметно превышают полученную длину сельскохозяйственного цикла, обязанного в последние годы цикличной интенсивности осадков в оптимальные сроки. Так новые методы выявления циклов урожайности могут быть использованы в анализе и прогнозировании сельскохозяйственного производства.

Девятое предложение нового в экономическом анализе состоит в использовании параметрических кривых взаимных зависимостей, тогда на плоскости исследуется непрерывная реляционная зависимость одной экономической переменной от другой.

Десятое замечание — показано, что новый анализ невозможен без привлечения современных инструментальных информационных средств, вершиной такого инструментария стали системы компьютерной математики, например, MAPLE 9.5.

Поэтому следует полагать, что благодарными задачами в моделировании и анализе экономической динамики становятся поиски методов, которые позволили бы находить, идентифицировать и использовать циклы, явно определять их постоянные времена, визуализировать поведение этих показателей на фазовых портретах и параметрических картинах взаимных зависимостей. Для этого в первую очередь потребуются научиться переводить экономические показатели, изначально задаваемые в виде множества дискретных точек, в гладкие непрерывные математические кривые.

Примечания:

1. Бруснева И.М., Винтизенко И.Г., Чадранцев А.В. Фазовые методы анализа и прогнозирования экономической динамики // Финансово-актуарная математика и смежные вопросы — ФАМ'2005: тр. IV Всерос. конф. Красноярск: Изд-во Ин-та вычислительного моделирования СО РАН, 2005. С. 68-72.
2. Боташева Ф.Б. Макроэкономическая динамика в фазовом пространстве. М.: Илекса, 2009. 268 с.
3. Винтизенко И.Г., Яковенко В.С. Экономическая цикломатика. М.; Ставрополь: Финансы и статистика: АГРУС, 2008. 428 с.
4. Кардаш В.А. Процессный анализ системной динамики // Обзорение прикладной и промышленной математики. 2008. Т. 15, вып. 5. С. 807-818.
5. Mandelbrot B.B. Statistical Methodology for Non-periodic Cycles: from the Covariance to the R/S analysis // Annals of Economic and Social Measurements. 1972. №1. P. 259-290.
6. Замугин О.А. Концепция реальных экономических циклов и её роль в эволюции макроэкономической теории // Вопросы экономики. 2005. №1. С. 144-153.
7. Огородникова Т.В. Индивидуальное и коллективное волновое поведение микросубъектов экономики: методологический аспект: дис. ... д-ра экон. наук. Иркутск, 2007. 400 с.
8. Рыженков А.В. Модели циклического роста. Новосибирск: Издательство ИЭиОПП СО РАН, 2003. 240 с.
9. Устюжанина Е.В. 10 заповедей экономического мышления. Заповедь 7. Усреднение рождает химеры // Новое время. 2002. №50. С. 20-21.

References:

1. Brusneva I.M., Vintizenko I.G., Chadrantsev A.V. Phase methods of the analysis and forecasting of economic dynamics // Financial and actuarial mathematics and related questions — FAM ' 2005: Proc. of IV Russian Conf. Krasnoyarsk: Institute of Computing Modelling Publishing House, the Siberian Branch of the Russian Academy of Science, 2005. P. 68-72.

-
2. Botasheva F.B. Macroeconomic dynamics in phase space. M.: Ileksa, 2009. 268 pp.
 3. Vintizenko I.G., Yakovenko V.S. Economic cyclomatics. M.; Stavropol: Finance and Statistics: AGRUS, 2008. 428 pp.
 4. Kardash V.A. Processing analysis of system dynamics // The Review of Applied and Industrial Mathematics. 2008. V. 15. Issue 5. P. 807-818.
 5. Mandelbrot B.B. Statistical Methodology for Non-periodic Cycles: from the Covariance to the R\S analysis // Annals of Economic and Social Measurements. 1972. No. 1. P. 259-290.
 6. Zamugin O.A. Concept of real business cycles and its role in evolution of the macroeconomic theory // Questions of Economy. 2005. No. 1. P. 144-153.
 7. Ogorodnikova T.V. Individual and collective wave behaviour of microsubjects of economy: methodological aspect: Diss for degree of Doctor of Economics. Irkutsk, 2007. 400 pp.
 8. Ryzhenkov A.V. Models of cyclical growth. Novosibirsk: Publishing House of Institute of Economics and Industrial Engineering, the Siberian Branch of the Russian Academy of Science, 2003. 240 pp.
 9. Ustyuzhanina E.V. Ten precepts of economic thinking. Precept 7. Averaging gives rise to chimeras // New Time. 2002. No. 50. P. 20-21.