МАТЕМАТИКА

MATHEMATICS

УДК 517.2
ББК 22.161.6
Т 49

Тлячев В.Б.
Доктор физико-математических наук, зав. кафедрой теоретической физики физического факультета Адыгейского государственного университета, тел. (8772) 59-39-08, e-mail: tlyachev@adygnet.ru

Ушхо А.Д.
Кандидат физико-математических наук, старший преподаватель кафедры теоретической физики физического факультета Адыгейского государственного университета, тел. (8772) 59-39-08

Ушхо Д.С.
Кандидат физико-математических наук, доцент, зав. кафедрой информатики и вычислительной техники факультета математики и компьютерных наук Адыгейского государственного университета, тел. (8772) 59-39-01, e-mail: damirubych@mail.ru

Параллельные прямые изоклины полиномиальных дифференциальных систем на плоскости

(Рецензирована)

Аннотация

В данной статье обобщается ранее полученный в статье [1] результат на случай многочленов произвольной степени в правых частях системы.

Ключевые слова*: система дифференциальных уравнений, изоклины, параллельные между собой прямые изоклины.*

Tlyachev V.B.
Doctor of Physics and Mathematics, Head of Theoretical Physics Department of Physics Faculty at Adyghe State University, ph. (8772) 59-39-08, e-mail: tlyachev@adygnet.ru

Ushkho A.D.
Candidate of Physics and Mathematics, Senior Lecturer of Theoretical Physics Department at Physics Faculty of Adyghe State University, ph. (8772) 59-39-08

Ushkho D.S.
Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of Informatics and Computer Equipment Department of Mathematics and Computer Science Faculty at Adyghe State University, ph. (8772) 59-39-01, e-mail: damirubych@mail.ru

Parallel straight line isoclines of differential polynomial plane systems

Abstract

In the paper, the earlier obtained results [1] on a case of polynomials of any degree in the right-sided parts of the system are generalized.

Key words: *system of the differential equations, isoclines, parallel straight line isoclines.*

Методы качественного интегрирования систем дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = P(x,y), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x,y), \tag{1}$$

где $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ – аналитические функции в области D R^2, широко используются при решении различных прикладных задач. Среди большого числа работ, посвященных исследованию динамических систем (1), особое место принадлежит системам, правые части которых представляют собой многочлены с действительными коэффициентами. Это обусловлено широким использованием таких систем в качестве математических моделей.

Современная качественная теория полиномиальных дифференциальных систем традиционно решает вопросы, касающиеся, в основном, исследования классических проблем: различения центра и фокуса; изохронности центра и фокуса; существования, отсутствия, единственности, взаимного расположения и оценки числа предельных циклов, так или иначе связанных с 16-й проблемой Гильберта. Обзор работ, посвященных 16-й проблеме Гильберта, можно найти в работе [2].

Вместе с тем в качественной теории важная роль отводится такому объекту, как «изоклины».

В фундаментальной работе В.В. Немыцкого [3] указывается на широкие возможности качественного исследования системы (1) с помощью главных изоклин, имея ввиду при этом «метод двух изоклин» (метод Н.П. Еругина). В настоящее время этот метод активно применяется (см., например, [4-6]).

Среди изоклин системы (1) существенную роль играют прямолинейные изоклины. В пользу актуальности вопросов, связанных с прямыми изоклинами, говорит и тот факт, что задача нахождения координат особых точек системы

$$\frac{dx}{dt} = \sum_{i+j=0}^{n} a_{ij} x^i y^j \equiv P_n(x,y), \quad \frac{dy}{dt} = \sum_{i+j=0}^{n} b_{ij} x^i y^j \equiv Q_n(x,y), \tag{2}$$

где $(P_n, Q_n) = 1$, $a_{ij}, b_{ij} \in R$, даже при $n = 2$ становится трудно разрешимой. Знание уравнения хотя бы одной прямой изоклины системы (2) при $n = 2$ делает эту задачу реально разрешимой. При этом:

1) может быть полностью решена задача определения местоположения всех особых точек системы;

2) существенно упрощается решение вопросов, связанных с взаимным расположением предельных циклов;

3) появляется возможность оценки сверху числа особых точек второй группы и установления топологической структуры сложной особой точки.

В шестидесятые годы прошлого столетия вопросами прямых изоклин квадратичных систем занимались авторы работ [7-9]. В более позднее время появляется работа [10], в которой доказывается утверждение: через особую точку $O(0,0)$ системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = P_r(x,y) + P_s(x,y), \quad \frac{dy}{dt} = Q_r(x,y) + Q_s(x,y), \tag{3}$$

где P_t, Q_t – однородные многочлены степени t, $t = r, s$, проходит хотя бы одна прямая изоклина, и их число не превосходит $r + s$, если r и s – числа разной четности, а правые части системы (3) взаимно просты.

В данной работе дается оценка сверху числа параллельных между собой прямых изоклин системы (2). Заметим, что такая оценка для системы (2) в случае $n = 3$ дана в статье [1].

Существуют системы вида (2), имеющие $2n-1$ параллельных между собой прямых изоклин.

Пример. Система дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = (y - kx - b_1)(y - kx - b_2)...(y - kx - b_n), \\ \dfrac{dy}{dt} = (y - kx - b_{k+1})(y - kx - b_{k+2})...(y - kx - b_{2n-1})(x + y), \end{cases}$$

где $n \geq 2,\ k > 0,\ b_i \neq b_j$, если $i \neq j,\ i, j \in \{1,2,...,2n-1\}$, имеет $2n-1$ параллельных между собой прямых изоклин, в том числе n изоклин бесконечности и $n-1$ изоклин нуля.

Естественно поставить вопрос: каково максимальное число параллельных между собой прямых изоклин системы (2)?

Теорема. Пусть система (2) имеет не менее одной особой точки и правые части уравнений этой системы взаимно просты. Тогда число параллельных между собой прямых изоклин этой системы не более $2n-1$, где $n \geq 2$.

Доказательство. Пусть прямая $y = kx + b,\ k \in R$ – изоклина системы (2). Тогда имеет место тождество

$$O_n(x, kx + b) - mP_n(x, kx + b) \equiv 0, \tag{4}$$

где m – *const*,

$$P_n(x, kx + b) = f_0(b)x^n + f_1(b)x^{n-1} + ... + f_{n-1}(b)x + f_n(b), \tag{5}$$

$$Q_n(x, kx + b) = g_0(b)x^n + g_1(b)x^{n-1} + ... + g_{n-1}(b)x + g_n(b). \tag{6}$$

Здесь $f_i,\ g_i$ – многочлены степени $i\ (i = 0,1,...,n)$ относительно b.

С учетом (5) и (6) из (4) получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} g_0(b) - mf_0(b) = 0, \\ g_1(b) - mf_1(b) = 0, \\ .... \\ g_{n-1}(b) - mf_{n-1}(b) = 0, \\ g_n(b) - mf_n(b) = 0. \end{cases} \tag{7}$$

Так как $(P_n, Q_n) = 1$, то не может быть выполнено равенство $|f_n(b)| + |g_n(b)| \equiv 0$.

Будем различать 2 случая:

1) $f_n(b) \equiv 0;$

2) $f_n(b) \not\equiv 0.$

В случае 1) $g_n(b) \not\equiv 0$. Следовательно, система (2) не может иметь более n прямых изоклин нуля с угловым коэффициентом k. Вместе с тем, эта система может иметь не более $n-1$ прямых изоклин бесконечности с угловым коэффициентом k.

Таким образом, общее число параллельных между собой прямых изоклин системы (2) в случае 1) не превосходит $2n-1$.

Пусть далее выполняется 2). Исключив m в системе уравнений (7), получаем:

$$\begin{cases} g_0(b) f_n(b) - f_0(b) g_n(b) = 0, \\ g_1(b) f_n(b) - f_1(b) g_n(b) = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ g_{n-1}(b) f_n(b) - f_{n-1}(b) g_n(b) = 0. \end{cases} \tag{8}$$

Заметим, что в системе (8) все уравнения не могут быть тождествами относительно b, так как в противном случае система (2) имела бы бесконечное множество параллельных между собой прямых изоклин. А это возможно в том и только в том случае, когда

$$P_n(x, y) = F_n(y - kx), \quad Q_n(x, y) = G_n(y - kx), \tag{9}$$

где $F_n(U)$ и $G_n(U)$ – многочлены степени n относительно U. Но при выполнении равенств (9) система (2) не имеет ни одной особой точки.

Таким образом, в системе (8) имеется хотя бы одно невырождающееся уравнение относительно b.

Наивысшая степень уравнений системы (8) относительно b равна $2n-1$, следовательно, эта система имеет не более $2n-1$ решений.

Теорема доказана.

Примечания:

1. Ушхо А.Д. Параллельные прямые изоклины кубических дифференциальных систем на плоскости // Вестник Адыгейского государственного университета. Сер. «Естественно-математические и технические науки». 2009. Вып. 2(49). С. 16-25. URL: http://vestnik.adygnet.ru
2. Ильяшенко Ю.С. Столетняя история 16-й проблемы Гильберта // Глобус: общематематический семинар. М.: МЦНМО, 2001. Вып. 1; Centennial history of Hilbert’s 16th problem // Bull. AMS. 2002. Vol. 39, No. 3. P. 301-354.
3. Немыцкий В.В. Некоторые современные проблемы качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений // УМН. 1965. Т. 20, вып. 4(124). С. 3-36.

References:

1. Ushkho A.D. The parallel straight isoclinic lines of cubic differential systems on a plane // Bulletin of the Adyghe State university. Series «Natural-mathematical and technical sciences». 2009. Iss. 2(49). P. 16-25. URL: http://vestnik.adygnet.ru
2. Iljyashenko Yu.S. The centennial history of Hilbert’s 16th problem // Globe: general mathematical seminar. M.: MTSNMO, 2001. Iss. 1; Centennial history of Hilbert’s 16th problem // Bull. AMS. 2002. Vol. 39, No. 3. P. 301-354.
3. Nemytskiy V.V. Some modern problems of the qualitative theory of the ordinary differential equations // UMN. 1965. Vol. 20, Iss. 4(124). P. 3-36.

4. Gaiko V.A. Limit Cycle Bifurcations in a Quadratic System with Two Parallel Straight Line – Isoclines // Reports 08-06 of the Department of Applied Mathematical Analysis. Delft: Delft University of Technology, 2008. 13 p.
5. Gaiko V.A. On an application of two isoclines method to investigation of twodimensional dynamical systems // Advanc. Synerg. 1994. Vol. 2. P. 104-109.
6. Gaiko V.A. Global Bifurcation Theory and Hilbert's Sixteenth Problem. Ser. Mathematics and its applications. Boston: Kluwer Academic Publishers, 2003. Vol. 559.
7. Берлинский А.Н. Некоторые вопросы качественного исследования дифференциального уравнения *dy/dx=P(x,y)/Q(x,y),* где *P* и *Q* – многочлены не выше второй степени: дис. … канд. физ.-мат. наук. Ташкент, 1959. 115 с.
8. Берлинский А.Н. О поведении интегральных кривых одного дифференциального уравнения // Известия высших учебных заведений. 1960. № 2(15). С. 3-18.
9. Шахова Л.В. О прямых изоклинах // Труды Самаркандского государственного университета им. Алишера Навои. 1964. № 144. С. 93-105.
10. Чересиз В.М. Об изоклинах полиномиальных векторных полей // Сибирский математический журнал. 1994. Т. 35, № 6. С. 1390-1396.

4. Gaiko V.A. Limit Cycle Bifurcations in a Quadratic System with Two Parallel Straight Line – Isoclines // Reports 08-06 of the Department of Applied Mathematical Analysis. Delft: Delft University of Technology, 2008. 13 p.
5. Gaiko V.A. On an application of two isoclines method to investigation of twodimensional dynamical systems // Advanc. Synerg. 1994. Vol. 2. P. 104-109.
6. Gaiko V.A. Global Bifurcation Theory and Hilbert's Sixteenth Problem. Ser. Mathematics and its applications. Boston: Kluwer Academic Publishers, 2003. Vol. 559.
7. Berlinskiy A.N. Some questions of qualitative research of the differential equation *dy/dx=P(x,y)/Q(x,y),* where *P* and *Q* – multinomials not above the second degree: Dissertation for the Candidate of Physics and Mathematics degree. Tashkent, 1959. 115 p.
8. Berlinskiy A.N. On the behavior of integral curves of one differential equation // News of higher schools. 1960. No. 2(15). P. 3-18.
9. Shakhova L.V. On straight isoclinic lines // Works of the Samarkand State university of Alisher Navoi. 1964. No. 144. P. 93-105.
10. Cheresiz V.M. On isoclinic lines of polynomial vector fields // Siberian mathematical journal. 1994. Vol. 35, No. 6. P. 1390-1396.