ФИЗИКА

PHYSICS

УДК 531:530.145
ББК 22.314
Б 77

Бойченко С.Е.
Ассистент кафедры прикладной математики и информационных технологий факультета математики и компьютерных наук Адыгейского государственного университета, тел. (8772) 59-39-04

Парциальные вклады отдельных гармоник в мощность синхротронного излучения круговой поляризации

(Рецензирована)

Аннотация
Проведен теоретический анализ зависимости парциального вклада в мощность синхротронного излучения круговой поляризации от номера гармоники и скорости частицы.
Ключевые слова: *синхротронное излучение, круговая поляризация, парциальные вклады.*

Boychenko S.E.
Assistant Lecturer of Department of Applied Mathematics and Information Technologies of the Faculty of Mathematics and Computer Science, Adyghe State University, ph. (8772) 59-39-04

Partial contributions of individual harmonics to the power of circular polarization synchrotron radiation

Abstract
The theoretical analysis is undertaken to determine the dependence of the partial contribution to the power of circular polarization synchrotron radiation upon number of a harmonic and velocity of a particle.
Key words: *synchrotron radiation, circular polarization, partial contributions.*

Введение

В последнее десятилетие, на основе асимптотик и численного анализа, были обнаружены новые свойства в поведении углового распределения мощности синхротронного излучения (СИ). Подробный обзор этих теоретических исследований СИ и обширный список литературы приведен в [1]. Для того чтобы улучшить анализ свойств СИ были введены новые величины, такие как парциальный вклад, точные количественные характеристики степени угловой концентрации СИ – эффективный угол излучения, угол отклонения и другие. Так как в указанных в работах [1] основное внимание уделялось изучению линейной поляризации СИ, то некоторые аналогичные задачи оказались до конца не решенными. В частности остался неизученным вопрос о парциальных вкладах СИ круговой поляризации.

Как известно из классической теории синхротронного излучения, распределение по номерам гармоник мощности СИ круговой поляризации может быть представлено в виде:

$$W_l^{(+)}(\nu,\beta)=\frac{Q_0}{4\beta^3}\psi_l(\nu,\beta)\,,\qquad Q_0=\frac{ce^2\beta^4}{R^2},\tag{1}$$

$$\psi_l(\nu,\beta)=\nu\left[2\beta^2J'_{2\nu}(2\nu\beta)-(1-\beta^2)\int_0^{2\nu\beta}J_{2\nu}(y)dy+2l\beta J_\nu^2(\nu\beta)\right],\tag{2}$$

$$W_0^{(+)}(\nu,\beta)=\frac{Q_0}{2\beta^3}\psi_0(\nu,\beta)\,,\qquad \psi_0(\nu,\beta)=\frac{1}{2}(\psi_{+1}(\nu,\beta)+\psi_{-1}(\nu,\beta)),\tag{3}$$

где e – заряд частицы, $\upsilon=\beta\cdot c$ – ее скорость, c – скорость света, R – радиус орбиты, ν – номер гармоники. Индекс l характеризует поляризацию излучения $l=+1$ соответствует правой круговой поляризации, $l=-1$ – левой круговой поляризации.

В [2] подробно изучены свойства специальных функций, описывающих распределение (1), и для них получены весьма хорошие аппроксимации элементарными функциями.

После суммирования по спектру из (1)–(3) можно получить выражения для поляризационных компонент и полной мощности СИ как функции скорости:

$$W_l^{(+)}(\beta)=\sum_{\nu=1}^{\infty}W_l^{(+)}(\nu,\beta),\quad l=0,+1,-1,\tag{4}$$

$$W_l^{(+)}(\beta)=\frac{1}{2}W_0(\beta)\eta_l(\beta)\,,\qquad W_0(\beta)=\frac{2Q_0}{3(1-\beta^2)^2}\,,$$

$$\eta_l(\beta)=\frac{1}{2}+l\frac{3}{8}\chi_1(\beta)\,,\qquad \chi_1(x)=\frac{4(1-x^2)}{x^2}\sum_{\nu=1}^{\infty}\nu J_\nu^2(\nu x)\,,\tag{5}$$

$$W_0^{(+)}(\beta)=W_{+1}^{(+)}(\beta)+W_{-1}^{(+)}(\beta)=\frac{1}{2}W_0(\beta).\tag{6}$$

В формуле (5) x – аргумент функции $\chi_1(x)$.

Также как и в [3] будем определять парциальный вклад гармоники ν в мощность излучения по формуле:

$$P_\nu^{(l)}(\beta)=W_l(\nu)/W_l,\quad l=0,+1,-1.\tag{7}$$

Как видно, парциальный вклад представляет собой долю, вносимую излучением на ν-гармонике в полную излучаемую мощность при определенном значении β.

Очевидно, что при фиксированном номере гармоники ν для левой и правой круговой поляризации СИ парциальный вклад $P_\nu^{(l)}(\beta)$ является функцией скорости.

При этом справедливо равенство:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}P_\nu^{(l)}(\beta)=1.\tag{8}$$

В работе [3] был проведен полный анализ зависимости парциального вклада линейной части СИ от номера гармоники ν, поляризации излучения и энергии частицы. В частности, численно исследован парциальный вклад основной и высших гармоник. При этом обнаружены новые особенности, а именно, скорости $\beta_\nu^{(i)}$, в которых достигаются максимальные значения парциального вклада, существенно отличаются от тех значений скоростей, при которых в сумме $W_i = \sum_{\nu=1}^{\infty} W_i(\nu)$ максимальным является слагаемое $W_i(\nu)$. Здесь индекс i характеризует линейную поляризацию СИ.

Несмотря на весьма обширное исследование, в [3] не был затронут вопрос о поведении парциального вклада круговой поляризации мощности СИ. Частично этого касаются только работы [2] и [4]. В [4] представлены результаты численного расчета величин β_ν, при которых максимум излучения падает на гармонику ν. При этом расчет для круговой поляризации не проводился, поскольку после интегрирования по углу обе круговые поляризации совпадают и равны половине полной мощности. Поэтому имеет смысл, в русле логики работы [3], рассмотреть излучение круговой поляризации СИ только в верхней (нижней) полуплоскости. Данная работа служит логическим продолжением работы [3].

Аналитическое исследование парциальных вкладов гармоник

Изучим поведение функции $P_\nu^{(l)}(\beta)$ во всей области изменения параметров $1 \le \nu < \infty,\ 0 \le \beta \le 1$ для круговой поляризации СИ. Для этого будем использовать обозначения, принятые в [3]:

$$P_\nu^{(l)}(\beta) = (1-\beta^2) q_\nu^{(l)}(\beta), \quad l = 0, \pm 1. \tag{9}$$

Тогда из (1) и (3) получим, что

$$q_\nu^{(l)}(\beta) = \frac{3\psi_l(\nu,\beta)}{4\beta^3 \eta_l(\beta)},\ l = \pm 1, \qquad q_\nu^{(0)}(\beta) = \frac{3\psi_0(\nu,\beta)}{2\beta^3}. \tag{10}$$

Используя представления функций Бесселя [5] степенными рядами

$$J_\nu(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(\nu+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k},$$

$$J_\nu^2(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{2\nu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k\,\Gamma(2\nu+2k+1)}{\Gamma(2\nu+k+1)\Gamma^2(\nu+k+1)k!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}, \tag{11}$$

а также то, что выражение $q_\nu^{(0)}(\beta)$ из (10) совпадает с выражением (7) работы [3]

$$q_\nu^{(0)}(\beta) = 3\nu^2 \left(\frac{x}{2}\right)^{2\nu-2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left[2(\nu+k)^3 - (\nu+k)^2 - \nu - k + 2\nu^2\right]}{\left[4(\nu+k)^2 - 1\right] \cdot k!\,\Gamma(2\nu+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k},\ x = 2\nu\beta, \tag{12}$$

получим следующие разложения в ряд для функций $\psi_l(\nu,\beta),\ \ l=0,\pm1$:

$$\psi_0(\nu,\beta)=\frac{2\beta^3}{3}q_\nu^{(0)},\ \psi_l(\nu,\beta)=\psi_0(\nu,\beta)+2l\nu\beta J_\nu^2(\nu\beta) \tag{13}$$

$$\psi_0(\nu,\beta)=2\beta\left(\frac{x}{2}\right)^{2\nu}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(2\nu+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}M_0,\ M_0=\frac{2(\nu+k)^3-(\nu+k)^2-\nu-k+2\nu^2}{4(\nu+k)^2-1}.$$

$$2\nu\beta J_\nu^2(\nu\beta)=\frac{1}{2^{2\nu-1}}\left(\frac{x}{2}\right)^{2\nu}\cdot\nu\beta\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(2\nu+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2\nu}\cdot M_1,\ \ M_1=\frac{\Gamma(2\nu+2k+1)}{\Gamma^2(\nu+k+1)\cdot 2^{2k}}.$$

$$\psi_l(\nu,\beta)=\beta\left(\frac{x}{2}\right)^{2\nu}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(2\nu+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}\left(\frac{2^{2\nu}M_0+lM_1\nu}{2^{2\nu-1}}\right), \tag{14}$$

$$q_\nu^{(l)}(\beta)=\frac{3\nu^2}{4\eta_l(\beta)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2\nu-2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(2\nu+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}\left(\frac{2^{2\nu}M_0+lM_1\nu}{2^{2\nu-1}}\right). \tag{15}$$

Так как ряды (12) и (15) сходятся абсолютно и равномерно для всех комплексных x, то их удобно использовать для качественного и численного исследования поведения функций $q_\nu^{(l)}(\beta)$, $P_\nu^{(l)}(\beta)$.

В нерелятивистском случае $(\beta<<1)$, имеем:

$$q_\nu^{(l)}(\beta)=\frac{3\nu^2(\nu\beta)^{2\nu-2}}{\eta_l(\beta)\Gamma(\nu)\cdot 2^{2\nu+1}}\left[\frac{(\nu+1)\sqrt{\pi}}{2\Gamma(\nu+3/2)}+\frac{l}{\nu\Gamma(\nu)}\right].$$

Значение выражения $P_\nu^{(0)}(\beta)$ берем из [3].

$$q_\nu^{(l)}(\beta)\approx P_\nu^{(l)}(\beta),\qquad P_\nu^{(0)}(\beta)\approx\frac{3(\nu+1)\nu^2(\nu\beta)^{2\nu-2}}{2(2\nu+1)\Gamma(2\nu)},$$

$$P_\nu^{(l)}(\beta)\approx\frac{3\nu^3(\nu\beta)^{2\nu-2}(2^{2\nu}(\nu+1)\Gamma^2(\nu+1)+l\cdot\Gamma(2\nu+2))}{\eta_l(\beta)\Gamma(2\nu+2)\cdot 2^{2\nu+1}\Gamma^2(\nu+1)}. \tag{16}$$

Из (16) следует, что в нерелятивистском случае для первой гармоники получаем такой же результат, как и при линейной поляризации СИ: $P_1^{(l)}(0)=q_1^{(l)}(0)=1,$ а для других гармоник $(\nu>1)$:

$$P_\nu^{(l)}(0)=q_\nu^{(l)}(0)=0,\ l=\pm1,0 \tag{17}$$

Сравним $q_\nu^{(+1)}(\beta),\ q_\nu^{(-1)}(\beta),\ q_\nu^{(0)}(\beta)$ в нерелятивистском случае.

Преобразуем $q_\nu^{(l)},\ l=\pm1$ к виду:

$$q_\nu^{(l)}(\beta) \approx \left[\frac{1}{2\eta_l(\beta)} + l \frac{\Gamma(2\nu+2)}{(\nu+1)2^{2\nu+1}\Gamma^2(\nu+1)\eta_l(\beta)} \right] \cdot q_\nu^{(0)}(\beta).$$

Для больших номеров гармоник ($\nu \to \infty$) имеем, что $\frac{\Gamma(2\nu+2)}{(\nu+1)2^{2\nu+1}\Gamma^2(\nu+1)\eta_l(\beta)} \to 0$ и тогда $q_\nu^{(l)} \approx \frac{q_\nu^{(0)}}{2\eta_l(\beta)}$.

Учитывая, что $\eta_{+1}(0) = \frac{7}{8}, \eta_{-1}(0) = \frac{1}{8}$, окончательно получаем:

$$q_\nu^{(+1)}(\beta) \approx \frac{4}{7} q_\nu^{(0)}, \; q_\nu^{(-1)}(\beta) \approx 4 q_\nu^{(0)},$$

$$q_\nu^{(+1)}(\beta) < q_\nu^{(0)}(\beta) < q_\nu^{(-1)}(\beta) \Rightarrow P_\nu^{(+1)}(\beta) < P_\nu^{(0)}(\beta) < P_\nu^{(-1)}(\beta), \quad \nu > 1, \; 0 < \beta << 1. \quad (18)$$

В ультрарелятивистском случае $\gamma >> 1$ $(\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2})$ при нахождении асимптотики получаем такое же выражение, как и формула (12) из [3]:

$$P_\nu^{(l)}(\beta \le 1) \approx \frac{q_\nu^{(l)}}{\gamma^4}, \; P_\nu^{(l)}(1) = 0. \quad (19)$$

Как следует из (17) и (19), на концах отрезка [0, 1] неотрицательные функции $P_\nu^{(l)}(\beta)$ $(\nu > 1)$ обращаются в нуль, поэтому внутри этого отрезка найдется такая точка $\beta = \beta_\nu^{(l)} \left(\gamma = \gamma_\nu^{(l)} = 1/\sqrt{1-\left(\beta_\nu^{(l)}\right)^2} \right)$, в которой всякая функция $P_\nu^{(l)}(\beta)$ $(\nu > 1)$ достигает своего максимального значения $\overline{P_\nu^{(l)}} = P_\nu^{(l)}(\beta_\nu^{(l)})$ $(\nu > 1)$.

Для больших значений номера гармоники в ультрарелятивистском случае воспользуемся аппроксимацией функций Бесселя и их производных функциями Макдональда $K_{2/3}, K_{1/3}$ [5]. Тогда, с учетом обозначений, получим:

$$y = \frac{2\nu}{3\gamma^3} \Rightarrow \gamma = \nu^{1/3}(2/3y)^{1/3}, \quad P_\nu^{(l)}(\beta) \approx \frac{1}{\nu}\psi_l(y), \quad q_\nu^{(l)}(\beta) \approx (2/3)^{4/3} y^{-4/3} \psi_l(y) \nu^{1/3}. \quad (20)$$

$$J_\nu(\nu\beta) \approx \frac{1}{\gamma\pi\sqrt{3}} K_{1/3}\left(\frac{y}{2}\right) \Rightarrow J_{2\nu}(2\nu\beta) \approx \frac{1}{\gamma\pi\sqrt{3}} K_{1/3}(y),$$

$$J'_\nu(\nu\beta) \approx \frac{1}{\gamma^2\pi\sqrt{3}} K_{2/3}\left(\frac{y}{2}\right) \Rightarrow J_{2\nu}(2\nu\beta) \approx \frac{1}{\gamma^2\pi\sqrt{3}} K_{2/3}(y),$$

$$\int_0^{\nu\beta} J_{2\nu}(y)dy \approx \frac{1}{\pi\sqrt{3}} \int_{y/2}^{\infty} K_{1/3}(x)dx \Rightarrow \int_0^{2\nu\beta} J_{2\nu}(y)dy \approx \frac{1}{\pi\sqrt{3}} \int_y^{\infty} K_{1/3}(x)dx. \quad (21)$$

Отметим, что аппроксимация $\psi_0(y)$ была получена в [3].

$$\psi_0(y) = \frac{9\sqrt{3}}{8\pi} y^2 \left[2K_{2/3}(y) - \int_y^\infty K_{1/3}(x)dx \right]. \tag{22}$$

$$\psi_l(y) = \frac{3\sqrt{3}}{4\pi} y^2 \left(2K_{2/3}(y) - \int_y^\infty K_{1/3}(x)dx + 2l \frac{K_{1/3}^2\left(\frac{y}{2}\right)}{\pi\sqrt{3}} \right), \quad l = \pm 1. \tag{23}$$

Откуда при больших v находим следующие асимптотики:

$$q_v^{(0)}(\beta) \approx \frac{v^{\frac{1}{3}} 3^{\frac{6}{7}} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{2\pi} \approx 0{,}776458 v^{\frac{1}{3}}, \tag{24}$$

$$q_v^{(l)}(\beta) \approx \frac{2}{3} q_v^{(0)}(\beta) + l \frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{3}\right)\sqrt[3]{36}}{6\pi^2} v^{\frac{1}{3}},$$

$$q_v^{(+1)}(\beta) \approx 0{,}874389 v^{\frac{1}{3}}, \qquad q_v^{(-1)}(\beta) \approx 0{,}3927302 v^{\frac{1}{3}}. \tag{25}$$

В результате при $\gamma >> 1$ неравенства (18) заменяются на противоположные:

$$q_v^{(-1)}(1) < q_v^{(0)}(1) < q_v^{(+1)}(1) \Rightarrow P_v^{(-1)}(\beta) < P_v^{(0)}(\beta) < P_v^{(+1)}(\beta) \tag{26}$$

Определение точек максимума $\gamma_v^{(l)}$ в асимптотическом случае сводится, как и в [3], к решению трансцендентных уравнений (штрих обозначает производную):

$$\frac{dP_v^{(l)}(\beta)}{d\beta} = 0 \Rightarrow \psi_l'(y_l) = 0, \tag{27}$$

$$\left(y^2 \left(2K_{2/3}(y) - \int_y^\infty K_{1/3}(x)dx \right) \right)' = \\ 4yK_{2/3}(y) + 2y^2 K_{2/3}'(y) - 2y \int_y^\infty K_{1/3}(x)dx - \left(y^2 \int_y^\infty K_{1/3}(x)dx \right)'. \tag{28}$$

При этом используем следующие формулы:

$$K_v'(x) = -\frac{v}{x} K_v(x) - K_{1-v}(x), \qquad \int_y^\infty K_{1/3}(x)dx = \frac{\pi}{\sqrt{3}} - \frac{3}{2} y K_{1/3}(y) - \frac{3}{2} \int_0^y x K_{2/3}(x)dx. \tag{29}$$

Окончательно имеем:

$$\varphi_0(y) = 8K_{2/3}(y) - 3yK_{1/3}(y) - 6\int_y^{\infty} K_{1/3}(x)dx, \tag{30}$$

$$\varphi_l(y) = \varphi_0(y) + \frac{6l}{\pi\sqrt{3}}\left(\frac{4}{3}K_{1/3}^2\left(\frac{y}{2}\right) - yK_{1/3}\left(\frac{y}{2}\right)K_{2/3}\left(\frac{y}{2}\right)\right), \quad l = \pm 1. \tag{31}$$

Отметим, что формула (30) полностью совпадает с выражением (17) из [3]. Определяя из уравнений $\varphi_l(y_{(l)}) = 0$ числа $y_{(l)}$, получим

$$\overline{P_\nu^{(l)}} \approx \nu^{-1} \cdot \psi_l(y_{(l)}), \quad \gamma_\nu^{(l)} = a_l \nu^{1/3}, \quad a_l = \left(\frac{2}{3y_{(l)}}\right)^{1/3}, \quad l = \pm 1. \tag{32}$$

Выражение для $\psi_0(y_0)$, имеет такой же вид, как и в работе [3]:

$$\psi_0(y_0) = \frac{3\sqrt{3}}{16\pi} y_0^2 \left(4K_{2/3}(y_0) + 3y_0 K_{1/3}(y_0)\right), \tag{33}$$

находим $\psi_l(y_l)$:

$$\psi_l(y_l) = \frac{\sqrt{3}}{8\pi} y_{(l)}^2 \times$$
$$\times\left(4K_{2/3}(y_{(l)}) + 3y_{(l)}K_{1/3}(y_{(l)}) + \frac{l}{\pi\sqrt{3}}\left(4K_{1/3}^2\left(\frac{y_{(l)}}{2}\right) + 6y_{(l)}K_{1/3}\left(\frac{y_{(l)}}{2}\right)K_{2/3}\left(\frac{y_{(l)}}{2}\right)\right)\right). \tag{34}$$

Полученные выражения являются основой для последующего численного анализа.

Численный расчет парциальных вкладов гармоник

Результаты численного расчета величин $P_\nu^{(l)}(\beta)$ для основной гармоники $\nu = 1$ представлены на рисунке 1 (штриховой линией отмечены графики парциальных вкладов для сигма и пи-компонентов линейной поляризации СИ). Из рисунка видно, что все функции $P_1^{(l)}(\beta)$ являются монотонно убывающими (от 1 до 0) функциями β, при этом на всем интервале $0 < \beta < 1$ выполняются неравенства

$$P_1^{(-1)}(\beta) < P_1^{(0)}(\beta) < P_1^{(+1)}.$$

Графики функций $q_1^{(l)}(\beta)$ представлены на рисунке 2. Из рисунка видно, что все $q_1^{(l)}(\beta)$ являются убывающими, выпуклыми вверх функциями. Для этих функций на всем полуинтервале $0 < \beta \le 1$ справедливо неравенство:

$$q_1^{(-1)}(\beta) < q_1^{(0)}(\beta) < q_1^{(+1)}(\beta).$$

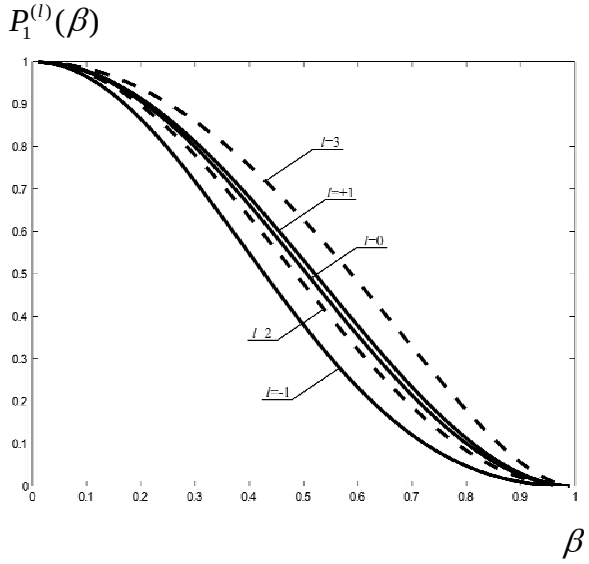

Рис. 1. Парциальный вклад первой гармоники в мощность СИ круговой поляризации

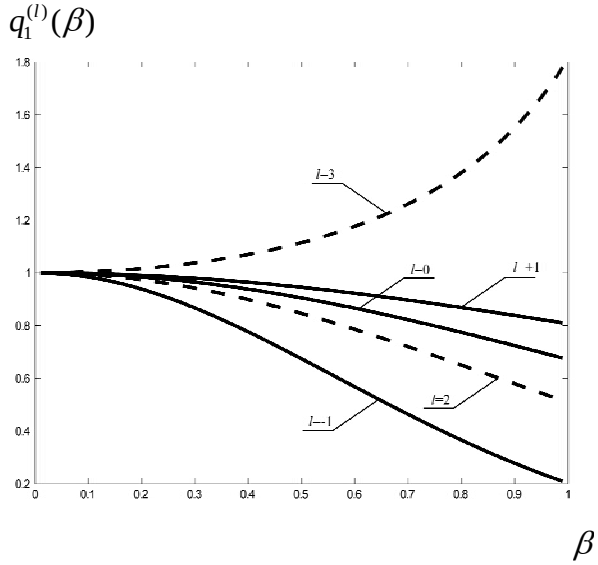

Рис. 2. Графики функций $q_1^{(l)}(\beta)$

В точке $\beta = 1$ имеем $q_1^{(+1)}(1) \approx 0{,}807544$, $q_1^{(0)}(1) \approx 0{,}67167$, $q_1^{(-1)}(1) \approx 0{,}202149$.

Парциальные вклады высших гармоник представлены графиками функций $P_v^{(l)}(\beta)$ $(v = 2 \div 10)$ – рисунки 3–5, графики функций $q_1^{(l)}(\beta)$ $(v = 2 \div 10)$ – рисунки 6–8, графики функций $\psi_l(y)$ – рисунок 9.

Численные значения параметров этих функций приведены в таблице 1.

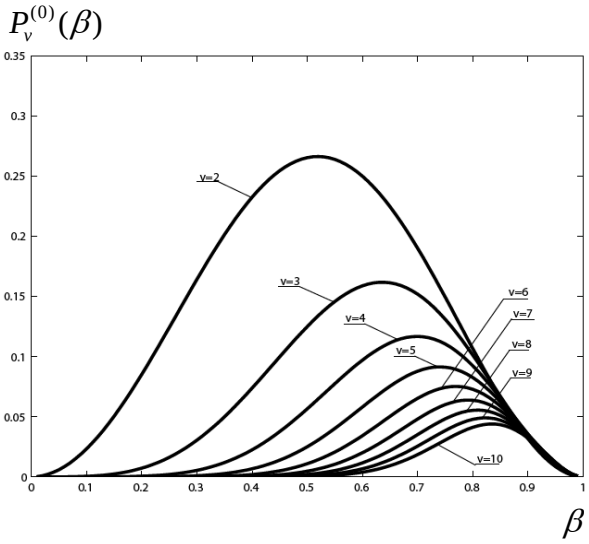

Рис. 3. Парциальные вклады в полную мощность круговой поляризации СИ

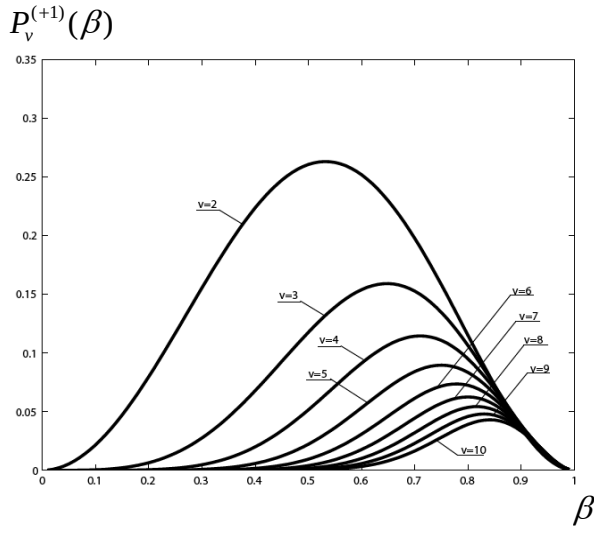

Рис. 4. Парциальные вклады в правую компоненту круговой поляризации СИ

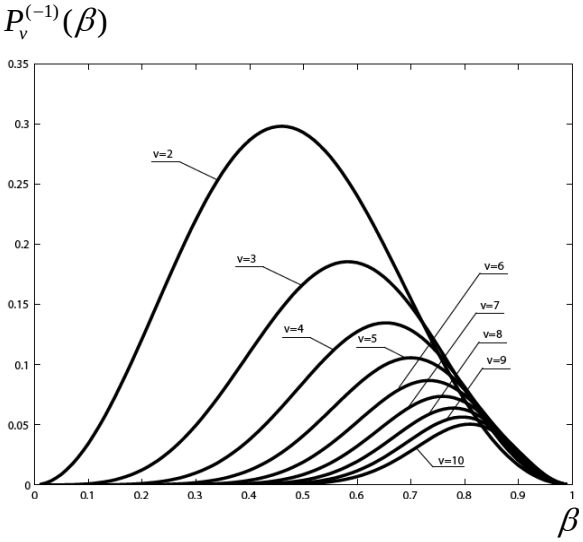

Рис. 5. Парциальные вклады в левую компоненту круговой поляризации СИ

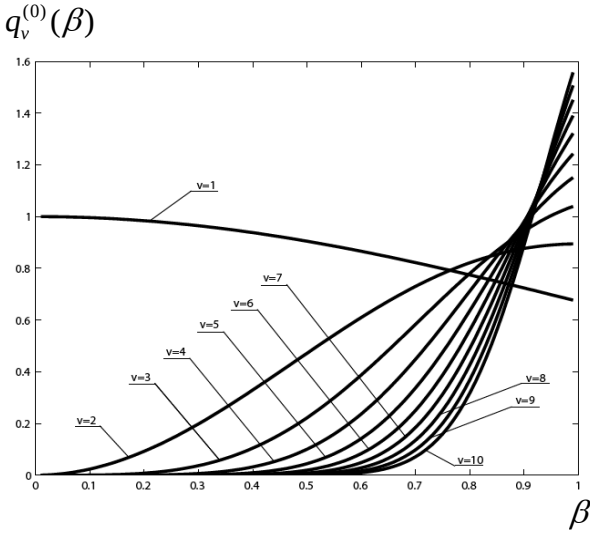

Рис. 6. Графики функций $q_\nu^{(0)}(\beta)$ для различных номеров гармоник

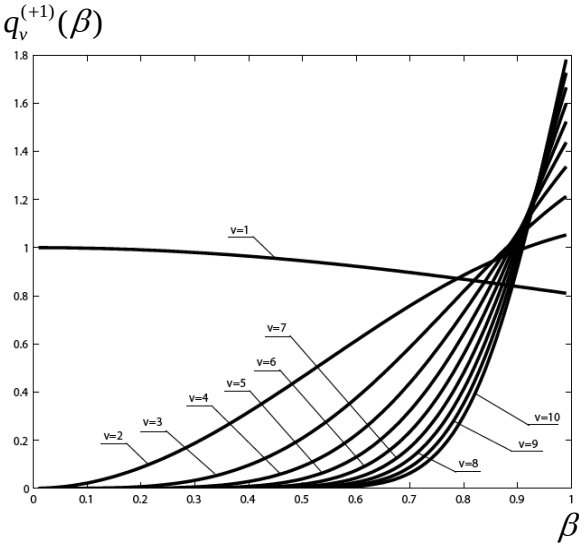

Рис. 7. Графики функций $q_\nu^{(+1)}(\beta)$

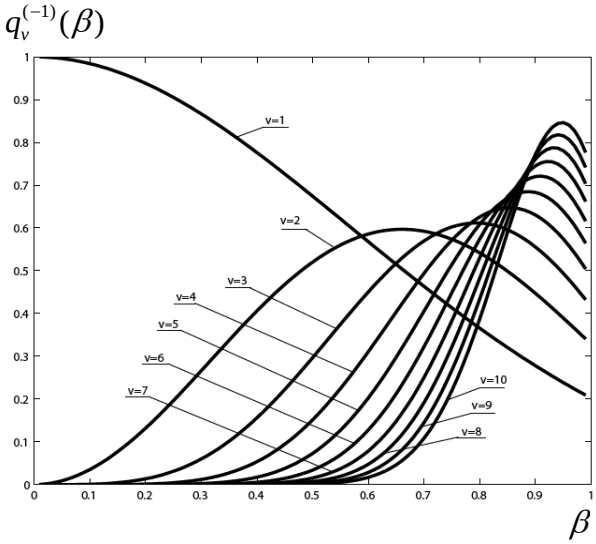

Рис. 8. Графики функций $q_\nu^{(-1)}(\beta)$

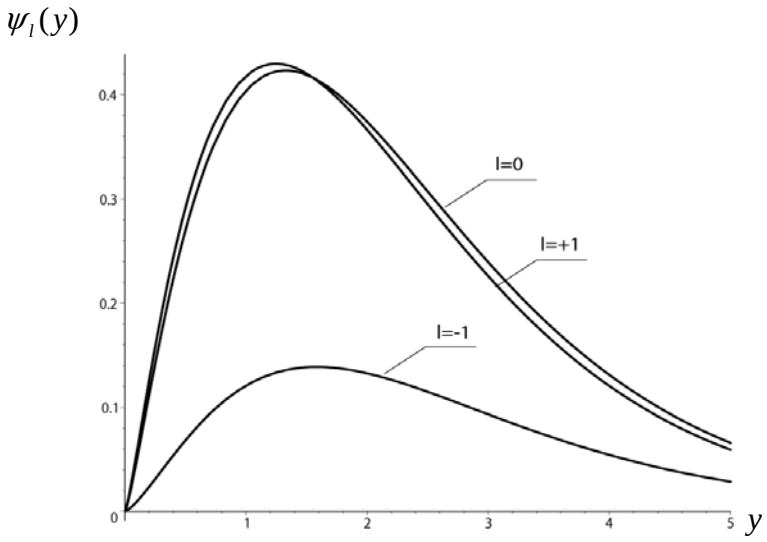

Рис. 9. Графики функции $\psi_l(y)$

Таблица 1

Численные значения характерных параметров функций $\psi_l(y)$, $P_\nu^{(l)}(\beta), l = \pm 1$

ν	$l=1$			$l=-1$		
	$\beta_\nu^{(+)}$	$\gamma_\nu^{(+)}$	$\overline{P_\nu^{(+)}}$	$\beta_\nu^{(-)}$	$\gamma_\nu^{(-)}$	$\overline{P_\nu^{(-)}}$
2	0,53197	1,18097	0,26296	0,45927	1,12575	0,29801
3	0,64799	1,31294	0,15899	0,58263	1,23041	0,18544
4	0,70999	1,42003	0,11446	0,65291	1,32024	0,13466
5	0,74988	1,51153	0,08954	0,69949	1,39930	0,10559
6	0,77818	1,59225	0,07358	0,73307	1,47026	0,08677
7	0,79952	1,66489	0,06247	0,75863	1,53487	0,07359
8	0,81631	1,73126	0,05428	0,77884	1,59433	0,06386
9	0,82994	1,79259	0,04800	0,79531	1,64961	0,05638
10	0,84126	1,84969	0,04302	0,80902	1,70131	0,05045
11	0,85085	1,90328	0,03898	0,82065	1,74999	0,04565
12	0,85910	1,95386	0,03564	0,83066	1,79604	0,04167
13	0,86629	2,00184	0,03282	0,83939	1,83983	0,03832
14	0,87262	2,04750	0,03042	0,84707	1,88153	0,03547
15	0,87824	2,09109	0,02834	0,85390	1,92146	0,03301
16	0,88327	2,13281	0,02653	0,86001	1,95972	0,03087
17	0,88782	2,17301	0,02494	0,86552	1,99651	0,02899
18	0,89194	2,21164	0,02353	0,87053	2,03204	0,02732
19	0,89570	2,24891	0,02227	0,87509	2,06629	0,02583
20	0,89914	2,28487	0,02114	0,87927	2,09941	0,02450
$y_{(+)} = 1{,}24806$		$\psi_{(+)}(y_{(+)}) = 0{,}42988$			$a_{(+)} = 0{,}81138$	
$y_{(-)} = 1{,}58365$		$\psi_{(-)}(y_{(-)}) = 0{,}13880$			$a_{(-)} = 0{,}74946$	

Автор благодарен В.Г. Багрову и В.Б. Тлячеву за обсуждения и полезные замечания.

Примечания:

1. Багров В.Г. Особенности углового распределения мощности синхротронного излучения отдельных гармоник спектра // Известия вузов. Физика. 2008. Т. 51, № 4. С. 5-19.
2. Эволюция углового распределения круговой поляризации синхротронного излучения при изменении энергии заряда / В.Г. Багров, М.В. Должин, В.Б. Тлячев, А.Т. Яровой // Известия вузов. Физика. 2004. Т. 47, № 4. С. 68-75.
3. Парциальные вклады отдельных гармоник в мощность синхротронного излучения / В.Г. Багров, М.В. Должин, К.Г. Серавкин, В.М. Шахматов // Известия вузов. Физика. 2006. Т. 49, № 7. С. 3-10.
4. Численный анализ спектрального распределения синхротронного излучения (классическая теория) / В.Г. Багров, Г.Ф. Копытов, Г.К. Разина, В.Б. Тлячев // Известия вузов. Физика. 1986. Т. 29, № 4. С. 125. (Деп. в ВИНИТИ 12.11.1985. № 7927. – В. 85.)
5. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971. 1108 с.

References:

1. Bagrov V.G. The peculiarities of angular distribution of synchrotron radiation power of separate spectrum harmonics // News of higher schools. Physics. 2008. Vol. 51, No. 4. P. 5-19.
2. The evolution of angular distribution of circular polarization of synchrotron radiation at the change of charge energy / V.G. Bagrov, M.V. Dolzhin, V.B. Tlyachev, A.T. Yarovoy // News of higher schools. Physics. 2004. Vol. 47, No. 4. P. 68-75.
3. The partial contributions of separate harmonics to synchrotron radiation power / V.G. Bagrov, M.V. Dolzhin, K.G. Seravkin, V.M. Shakhmatov // News of higher schools. Physics. 2006. Vol. 49, No. 7. P. 3-10.
4. The numerical analysis of spectral distribution of synchrotron radiation (classical theory) / V.G. Bagrov, G.F. Kopytov, G.K. Razina, V.B. Tlyachev // News of higher schools. Physics. 1986. Vol. 29, No. 4. P. 125. (Dep. in VINITI 12/11/1985. No. 7927. – V. 85.)
5. Gradshteyn I.S., Ryzhik I.M. The tables of integrals, sums, numbers and products. M.: Nauka, 1971. 1108 p.