

---

УДК 336.76  
ББК 65.264  
К 21

**А.Х. Каранашев**

*Кандидат экономических наук, доцент, заведующий кафедрой технологии социально-культурного сервиса Кабардино-Балкарского государственного университета, г. Нальчик. Тел.: (87937) 629 84, e-mail: in63@mail.ru.*

**Мартингальное решение задачи стохастического  
управления инвестированием и потреблением  
(Рецензирована)**

**Аннотация.** В статье построены оптимальные стратегии инвестирования и потребления агентом финансового рынка, извлекающим пользу из промежуточного потребления и/или конечного капитала; выведены аналитические выражения для характеристик оптимального портфеля (спекулятивного спроса на рисковые активы и портфеля хеджирования).

**Ключевые слова:** моделирование, оптимизация, фондовый рынок, рисковые активы.

**A.Kh. Karanashev**

*Candidate of Economics, Associate Professor, Head of Department of Socio-Cultural Service Technology of Kabardino-Balkar State University, Nalchik. Ph.: (87937) 629 84, e-mail: in63@mail.ru.*

**Martingale solution for the problem of stochastic  
control of investment and consumption**

**Abstract.** This work discusses optimal investment and consumption strategies of an agent of financial market with utility of intermediate consumption and/or terminal wealth. The author derives an analytical characterization of the optimal portfolio (speculative demand for risky assets and a hedge portfolio).

**Keywords:** modeling, optimization, market of securities, risky assets.

Проблема управления портфелем ценных бумаг, его активами и пассивами, финансовыми инструментами вообще является фундаментальной в финансовой теории и практике. В то же время задача управления в условиях неопределенности относится к фундаментальным проблемам в теории принятия решений. В последнее время теория и практика выбора оптимального финансового портфеля столкнулась с отличительной чертой современных финансовых рынков: стохастичностью эволюции инвестиционной среды — краткосрочной процентной ставки, цен рискованных активов, ожидаемых ставок доходности, вариационно-ковариационной матрицы доходностей

по рискованным активам, ожидаемой скорости изменения дохода инвестора вне финансового рынка, ковариации или корреляции между перечисленными переменными [1, 2, 3]. Отмеченные особенности существенно влияют на оптимальный выбор инвестора, который может существенно отличаться от выбора в классической портфельной теории Марковица-Шарпа-Тобина.

Поставим задачу выбора инвестором на полном финансовом рынке оптимальной стратегии инвестирования в  $n$  рискованных и в один безрисковый актив при наличии промежуточного потребления. Рассматриваем бесфрикционную экономику, динамика которой определяется  $n$ -мерным винеровским

процессом  $w$ , определенным на вероятностном пространстве  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ;  $F = \{f_t : t \geq 0\}$  — стандартная фильтрация  $w$ . Экономический агент имеет возможность инвестировать капитал в свободный от риска актив (банковский счет) с краткосрочной процентной ставкой  $r$  и  $n$  рисковыми активами, динамика цен которых определяется стохастическими дифференциальными уравнениями

$$dP_t = \text{diag}(P_t)(\mu dt + \sigma dw_t),$$

где  $\text{diag}(P_t)$  -  $n \times n$  — диагональная матрица с элементами  $P_t$  по главной диагонали;  $\mu$  —  $n$ -мерный вектор ожидаемых доходностей рискованных активов;  $\sigma$  -  $n \times n$  — матрица волатильностей.

Вектор рыночных цен риска определяется следующим образом:

$$\lambda = \frac{\mu - r\mathbf{1}}{\sigma},$$

где  $\mathbf{1}$  —  $n$ -мерный вектор из единиц.

Динамику капитала инвестора при данных стратегиях потребления  $c$  и инвестирования  $\pi$  ( $\pi$  —  $n$ -мерный процесс, определяющий доли капитала, инвестированные в рискованные активы) записываем в следующем виде:

$$dW_t = W_t(r + \pi^T \sigma \lambda)dt - cdt + W_t \pi^T \sigma dw_t. \quad (1)$$

Поставленная задача решается с помощью мартингалового подхода, преимущества которого по сравнению с методом динамического программирования изложены в [4, 5].

Предполагаем, что источником полезности инвестора является как промежуточное потребление, так и конечный капитал. Неявная функция полезности имеет вид:

$$J(W, t) = \sup_{(c_s, \pi_s)_s \in [t, T]} E_{W, t} \left[ \int_t^T e^{-\delta(s-t)} u(c_s) ds + e^{-\delta(T-t)} \bar{u}(W_T) \right],$$

где  $\delta$  — субъективный дисконтный фактор инвестора. На полном финансовом рынке существует единственный процесс плотности цены состояния (иначе называемый ценовым ядром)  $\xi = (\xi_t)$ , определяемый следующим образом:

$$\xi_t = \exp \left\{ - \int_0^t r_s ds - \int_0^t \lambda_s^T dw_s - \frac{1}{2} \int_0^t \lambda_s^T \lambda_s ds \right\}.$$

Согласно [4] оптимальная норма потребления определяется соотношением:

$$c_t^* = I_u \left[ Y(W_0) e^{\delta t} \xi_t \right]$$

и оптимальный уровень конечного капитала равен

$$W^* = I_{\bar{u}} \left[ Y(W_0) e^{\delta T} \xi_T \right],$$

где  $Y$  — функция, обратная к

$$H(\psi) = E \left[ \int_0^T \xi_t I_u(\psi e^{\delta t} \xi_t) dt + \xi_T I_{\bar{u}}(\psi e^{\delta T} \xi_T) \right],$$

а  $I_u(\cdot)$  обозначает функцию, обратную функции предельной полезности  $u'(\cdot)$ . При условии, что функция полезности инвестора характеризуется постоянной относительной терпимостью к риску, имеем:

$$\begin{aligned} u(c) &= \frac{c^{1-\gamma}}{1-\gamma}, & \bar{u}(W) &= \frac{W^{1-\gamma}}{1-\gamma} \\ u'(c) &= c^{-\gamma}, & \bar{u}'(W) &= W^{-\gamma}, \end{aligned}$$

а обратные функции равны:

$$I_u(z) = z^{-1/\gamma}, \quad I_{\bar{u}}(z) = z^{-1/\gamma}.$$

Целесообразно определить  $g=(g_t)$  следующим образом:

$$g_t = E_t \left[ \int_t^T e^{-\frac{\delta}{\gamma}(s-t)} \left( \frac{\xi_s}{\xi_t} \right)^{1-\frac{1}{\gamma}} ds + e^{-\frac{\delta}{\gamma}(T-t)} \left( \frac{\xi_T}{\xi_t} \right)^{1-\frac{1}{\gamma}} \right]. \quad (2)$$

Следовательно, функция  $H$  может быть вычислена таким образом:

$$H(\psi) = E \left[ \int_0^T \xi_t e^{-\frac{\delta}{\gamma}t} \psi^{-\frac{1}{\gamma}} \xi_t^{-\frac{1}{\gamma}} dt + \xi_T e^{-\frac{\delta}{\gamma}T} \psi^{-\frac{1}{\gamma}} \xi_T^{-\frac{1}{\gamma}} \right] = \\ \psi^{-\frac{1}{\gamma}} \left( E \left[ \int_0^T e^{-\frac{\delta}{\gamma}t} \xi_t^{-\frac{1}{\gamma}} dt + e^{-\frac{\delta}{\gamma}T} \xi_T^{-\frac{1}{\gamma}} \right] \right) = \psi^{-\frac{1}{\gamma}} g_0,$$

а обратная к ней функция имеет вид:

$$Y(W_0) = W_0^{-\gamma} g_0^\gamma.$$

Поэтому оптимальная политика потребления дается выражением:

$$c_t^* = e^{-\frac{\delta}{\gamma}t} Y(W_0)^{-\frac{1}{\gamma}} \xi_t^{-\frac{1}{\gamma}} = \frac{W_0}{g_0} e^{-\frac{\delta}{\gamma}t} \xi_t^{-\frac{1}{\gamma}}, \quad (3)$$

а оптимальный уровень конечного капитала составляет:

$$W^* = e^{-\frac{\delta}{\gamma}T} Y(W_0)^{-\frac{1}{\gamma}} \xi_T^{-\frac{1}{\gamma}} = \frac{W_0}{g_0} e^{-\frac{\delta}{\gamma}T} \xi_T^{-\frac{1}{\gamma}}. \quad (4)$$

Динамика капитала при оптимальной стратегии (3), (4) определяется следующим образом:

$$W_t^* = \frac{1}{\xi_t} E_t \left[ \int_t^T \xi_s c_s^* ds + \xi_T W^* \right] = \\ = \frac{W_0}{g_0} \frac{1}{\xi_t} E_t \left[ \int_t^T e^{-\frac{\delta}{\gamma}(s-t)} \xi_s^{-\frac{1}{\gamma}} ds + e^{-\frac{\delta}{\gamma}(T-t)} \xi_T^{-\frac{1}{\gamma}} \right] = \\ = \frac{W_0}{g_0} e^{-\frac{\delta}{\gamma}t} \xi_t^{-\frac{1}{\gamma}} E_t \left[ \int_t^T e^{-\frac{\delta}{\gamma}(s-t)} \left( \frac{\xi_s}{\xi_t} \right)^{1-\frac{1}{\gamma}} ds + e^{-\frac{\delta}{\gamma}(T-t)} \left( \frac{\xi_T}{\xi_t} \right)^{1-\frac{1}{\gamma}} \right] = \frac{W_0}{g_0} e^{-\frac{\delta}{\gamma}t} \xi_t^{-\frac{1}{\gamma}} g_t$$

Следовательно,

$$\frac{W^*}{g_t} = \frac{W_0}{g_0} e^{-\frac{\delta}{\gamma}t} \xi_t^{-\frac{1}{\gamma}}. \quad (6)$$

Непосредственно из (3) видно, что можно переписать оптимальную норму потребления в момент  $t$  как

$$c_t^* = \frac{W_t^*}{g_t}, \quad (7)$$

Так, что  $g_t$  интерпретируется как оптимальное отношение капитала к потреблению. Более того, при  $s > t$  получаем соотношение:

$$c_s^* = \frac{W_0}{g_0} e^{-\frac{\delta}{\gamma}s} \xi_s^{-\frac{1}{\gamma}} = \frac{W_0}{g_0} e^{-\frac{\delta}{\gamma}t} \xi_t^{-\frac{1}{\gamma}} e^{-\frac{\delta}{\gamma}(s-t)} \left( \frac{\xi_s}{\xi_t} \right)^{-\frac{1}{\gamma}} = \frac{W_t^*}{g_t} e^{-\frac{\delta}{\gamma}(s-t)} \left( \frac{\xi_s}{\xi_t} \right)^{-\frac{1}{\gamma}}, \quad (8)$$

которое устанавливает неопределенную норму потребления в момент  $S$  при заданной информации, доступной в момент  $t$ . Аналогично можно выразить оптимальный конечный капитал в следующем виде:

$$W^* = \frac{W_t^*}{g_t} e^{-\frac{\delta}{\gamma}(T-t)} \left( \frac{\xi_T}{\xi_t} \right)^{-\frac{1}{\gamma}}. \quad (9)$$

Неявная функция полезности в момент  $t$  записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} J_t &= E_t \left[ \int_t^T e^{-\delta(s-t)} u(c_s^*) ds + e^{-\delta(T-t)} \bar{u}(W^*) \right] = \\ &= \frac{1}{1-\gamma} E_t \left[ \int_t^T e^{-\delta(s-t)} (c_s^*)^{1-\gamma} ds + e^{-\delta(T-t)} (W^*)^{1-\gamma} \right] = \\ &= \frac{1}{1-\gamma} \left( \frac{W_t^*}{g_t} \right)^{1-\gamma} E_t \left[ \int_t^T e^{-\frac{\delta}{\gamma}(s-t)} \left( \frac{\xi_s}{\xi_t} \right)^{1-\frac{1}{\gamma}} ds + e^{-\frac{\delta}{\gamma}(T-t)} \left( \frac{\xi_T}{\xi_t} \right)^{1-\frac{1}{\gamma}} \right] = \\ &= \frac{1}{1-\gamma} g_t^\gamma (W_t^*)^{1-\gamma}, \end{aligned}$$

где третье равенство имеет место в силу (8) и (9), а последнее равенство следует из определения  $g_t$ .

Уравнения, выведенные выше, справедливы при общих предположениях об инвестиционных возможностях для функции полезности с постоянной относительной терпимостью к риску. Далее будем рассматривать постоянные инвестиционные возможности, т.е. предполагать, что  $r$ ,  $\mu$  и  $\sigma$  не зависят от времени. В этом случае дефлятор цены состояния принимает вид:

$$\xi_t = \exp\left(-rt - \lambda^T z_t - \frac{1}{2} \lambda^T \lambda t\right). \quad (10)$$

Следовательно, будущие значения дефлятора цены состояния распределены логнормально. Заметим, что для любого  $s > t$  имеем:

$$\begin{aligned} &E_t \left[ e^{-\frac{\delta}{\gamma}(s-t)} \left( \frac{\xi_s}{\xi_t} \right)^{1-\frac{1}{\gamma}} \right] = \\ &= E_t \left[ e^{-\frac{\delta}{\gamma}(s-t)} \left( \exp\left\{-r(s-t) - \lambda^T(z_s - z_t) - \frac{1}{2} \lambda^T \lambda (s-t)\right\} \right)^{1-\frac{1}{\gamma}} \right] = \\ &= e^{-\frac{\delta}{\gamma}(s-t)} \exp\left\{-\left(1-\frac{1}{\gamma}\right)r(s-t) - \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\gamma}\right)\lambda^T \lambda (s-t)\right\} E_t \left[ \exp\left\{-\left(1-\frac{1}{\gamma}\right)\lambda^T(z_s - z_t)\right\} \right] = \\ &= e^{-\frac{\delta}{\gamma}(s-t)} \exp\left\{-\left(1-\frac{1}{\gamma}\right)r(s-t) - \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\gamma}\right)\lambda^T \lambda (s-t)\right\} \exp\left\{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\gamma}\right)^2 \lambda^T \lambda (s-t)\right\} = \\ &= \exp\left\{-\left(\frac{\delta - r(1-\gamma)}{\gamma} - \frac{1-\gamma}{2\gamma^2} \lambda^T \lambda\right)(s-t)\right\} = e^{-A(s-t)}, \end{aligned}$$

где  $A$  — постоянная, определяемая следующей формулой:

$$A = \frac{\delta - r(1-\gamma)}{\gamma} - \frac{1-\gamma}{2\gamma^2} \lambda^T \lambda = \frac{\delta - r(1-\gamma)}{\gamma} - \frac{1-\gamma}{2\gamma^2} (\mu - r1)^T (\sigma\sigma^T)^{-1} (\mu - r1).$$

Теперь можно вычислить  $g_t$  в замкнутой форме:

$$\begin{aligned} g_t &= E_t \left[ \int_t^T e^{-\frac{\delta}{\gamma}(s-t)} \left( \frac{\xi_s}{\xi_t} \right)^{1-\frac{1}{\gamma}} ds + e^{-\frac{\delta}{\gamma}(T-t)} \left( \frac{\xi_T}{\xi_t} \right)^{1-\frac{1}{\gamma}} \right] = \\ &= \int_t^T E_t \left[ e^{-\frac{\delta}{\gamma}(s-t)} \left( \frac{\xi_s}{\xi_t} \right)^{1-\frac{1}{\gamma}} \right] ds + E_t \left[ e^{-\frac{\delta}{\gamma}(T-t)} \left( \frac{\xi_T}{\xi_t} \right)^{1-\frac{1}{\gamma}} \right] = \\ &= \int_t^T e^{-A(s-t)} ds + e^{-A(T-t)} = \frac{1}{A} (1 + (A-1)e^{-A(T-t)}), \end{aligned}$$

т.е. она является детерминированной функцией. Поэтому для случая постоянных инвестиционных возможностей формулы для оптимальной нормы потребления и функции неявной полезности, выведенные выше, совпадают с результатами, полученными при использовании метода динамического программирования [5].

Остается вывести уравнение оптимальной инвестиционной стратегии. Оптимальный процесс накопления капитала описывается выражением (5). Поскольку сейчас мы уже знаем, что  $g_t$  является детерминированной функцией, то единственным стохастическим процессом в выражении (5) остаётся дефлятор цены состояния  $\xi_t$ . При постоянных инвестиционных возможностях динамика дефлятора цены состояния определяется следующим стохастическим дифференциальным уравнением:

$$d\xi_t = -\xi_t (r dt + \lambda^T dz_t).$$

Применяя лемму Ито, можно вывести уравнение, определяющее динамику процесса накопления капитала:

$$dW_t^* = W_t^* \left[ \left( r + \frac{1}{\gamma} \lambda^T \lambda - g(t)^{-1} \right) dt + \frac{1}{\gamma} \lambda^T dz_t \right]. \quad (11)$$

Поэтому оптимальный капитал эволюционирует как геометрическое броуновское движение (хотя и с зависящей от времени тенденцией). Сравнивая (10) с динамикой капитала для любой данной инвестиционной стратегии  $\pi = (\pi_t)$  из выражения (1), получаем, что оптимальный процесс накопления капитала достигается при инвестиционной стратегии вида

$$\pi_t^* = \frac{1}{\gamma} (\sigma^T)^{-1} \lambda, \quad (12)$$

что совпадает с результатом, полученным ранее методом динамического программирования.

Итак, оптимальность инвестиционной стратегии достигается поддержанием долей капитала, инвестированных в каждый из активов, на постоянном уровне. Отметим, что при этом инвестор должен постоянно корректировать свой портфель с учетом временной динамики цен активов. Рассмотрим, например, актив, входящий в оптимальный портфель с положительным весом. Если цена этого актива растет быстрее, чем цены других активов в портфеле, то доля капитала, соответствующая этому активу, будет увеличиваться (т.е. и удельный вес этого актива в портфеле будет увеличиваться). Поэтому согласно оптимальной стратегии инвестирования инвестор должен сократить количество единиц этого актива в портфеле. Поэтому оптимальная стратегия состоит в покупке активов, цена которых растет относительно более медленно, и продаже активов, растущих быстрее остальных. Чем выше коэффициент относительного неприятия риска,

тем ниже инвестирование в рисковые активы и выше инвестирование в безрисковый актив (банковский счет). Инвестиционная стратегия не зависит от инвестиционного горизонта. Ожидаемая избыточная доходность акций увеличивается с длиной инвестиционного горизонта, но при этом также увеличиваются дисперсия и волатильность доходности. Инвестор, характеризующийся полезностью с постоянной относительной терпимостью к риску, должен принимать во внимание этот компромисс. Для инвестора с такой полезностью в модели финансового рынка с постоянными инвестиционными возможностями указанные два эффекта компенсируют друг друга полностью, так что портфель не зависит от инвестиционного горизонта.

Отметим, что предложенная модель находится в согласии с практически-

ми советами финансовых аналитиков о том, что пропорции рисковых активов в долгосрочном оптимальном портфеле должны зависеть от относительного неприятия риска инвестора. Тем самым построенная модель объясняет так называемый парадокс Каннера [4] о несоответствии между теоремой разделения Тобина и практическими советами популярных аналитиков. Дело в том, что теорема Тобина, утверждающая, что пропорции рисковых активов в оптимальном портфеле не зависят от относительного неприятия риска инвестора, справедлива для статистической однопериодической модели финансового рынка на небольшом инвестиционном горизонте. Модель же с непрерывным временем, предложенная в настоящей работе, указывает на зависимость оптимальной стратегии от коэффициента относительного неприятия риска инвестором.

#### Примечания:

1. Ширяев А.Н. Основы стохастической финансовой математики. Факты. Модели. Т. 1. М.: ФАЗИС, 2004. 556 с.
2. Ширяев А.Н. Основы стохастической финансовой математики. Теория. Т. 2. М.: ФАЗИС, 2004. 500 с.
3. Шарп У., Александер Г., Бейли Д. Инвестиции. М.: ИНФРА-М. 2003.
4. Cox J.C., Huang C.-f. A variational problem arising in financial economics // J. Mathematical Economics. 1991. V. 20. P. 465-487.
5. Каранашев А.Х. Экономико-математическая модель оптимизации финансовых инвестиций // Современные научные исследования. Кисловодск: Издательский центр КИЭП, 2011. №3.

#### References:

1. Shiryaev A.N. Bases of the stochastic financial mathematics. Facts. Models. V.1. 2-nd edition, corrected. M.: PHASIS, 2004. 556 p.
2. Shiryaev A.N. Bases of the stochastic financial mathematics. Theory. V.2. 2-nd edition, corrected. M.: PHASIS, 2004. 500 p.
3. Sharp W., Alexander G., Bailey D. Investments. M.: INFRA-M. 2003.
4. Cox J.C., Huang C.-F. A variational problem arising in financial economics // J. Mathematical Economics. 1991. V. 20. P. 465-487.
5. Karanashev A.Kh. Economic-mathematical model of optimization of financial investments // Modern Scientific Researches. 2011. No. 3. Kislovodsk: KIEP Publishing Center.