УДК 336.76
ББК 65.264
К 21

А.Х. Каранашев
Кандидат экономических наук, доцент, заведующий кафедрой технологии социально-культурного сервиса Кабардино-Балкарского государственного университета, г. Нальчик. Тел.: (87937) 629 84, e-mail: in63@mail.ru.

Мартингальное решение задачи стохастического управления инвестированием и потреблением

(Рецензирована)

Аннотация. В статье построены оптимальные стратегии инвестирования и потребления агентом финансового рынка, извлекающим пользу из промежуточного потребления и/или конечного капитала; выведены аналитические выражения для характеристик оптимального портфеля (спекулятивного спроса на рисковые активы и портфеля хеджирования).

Ключевые слова: моделирование, оптимизация, фондовый рынок, рисковые активы.

A.Kh. Karanashev
Candidate of Economics, Associate Professor, Head of Department of Socio-Cultural Service Technology of Kabardino-Balkar State University, Nalchik. Ph.: (87937) 629 84, e-mail: in63@mail.ru.

Martingale solution for the problem of stochastic control of investment and consumption

Abstract. This work discusses optimal investment and consumption strategies of an agent of financial market with utility of intermediate consumption and/or terminal wealth. The author derives an analytical characterization of the optimal portfolio (speculative demand for risky assets and a hedge portfolio).

Keywords: modeling, optimization, market of securities, risky assets.

Проблема управления портфелем ценных бумаг, его активами и пассивами, финансовыми инструментами вообще является фундаментальной в финансовой теории и практике. В то же время задача управления в условиях неопределенности относится к фундаментальным проблемам в теории принятия решений. В последнее время теория и практика выбора оптимального финансового портфеля столкнулась с отличительной чертой современных финансовых рынков: стохастичностью эволюции инвестиционной среды — краткосрочной процентной ставки, цен рисковых активов, ожидаемых ставок доходности, вариационно-ковариационной матрицы доходностей по рисковым активам, ожидаемой скорости изменения дохода инвестора вне финансового рынка, ковариации или корреляции между перечисленными переменными [1, 2, 3]. Отмеченные особенности существенно влияют на оптимальный выбор инвестора, который может существенно отличаться от выбора в классической портфельной теории Марковица-Шарпа-Тобина.

Поставим задачу выбора инвестором на полном финансовом рынке оптимальной стратегии инвестирования в n рисковых и в один безрисковый актив при наличии промежуточного потребления. Рассматриваем бесфрикционную экономику, динамика которой определяется n-мерным винеровским процессом w, определенным на вероятностном пространстве (Ω, f, P); $F = \{f_t : t \geq 0\}$ — стандартная фильтрация w. Экономический агент имеет возможность инвестировать капитал в свободный от риска актив (банковский счет) с краткосрочной процентной ставкой r и n рисковых активов, динамика цен которых определяется стохастическими дифференциальными уравнениями

$$dP_t = diag(P_t)(\mu dt + \sigma dw_t),$$

где $diag(P_t)$ - $n \times n$ — диагональная матрица с элементами P_t по главной диагонали; μ — n-мерный вектор ожидаемых доходностей рисковых активов; σ - $n \times n$ — матрица волатильностей.

Вектор рыночных цен риска определяется следующим образом:

$$\lambda = \frac{\mu - r\mathbf{1}}{\sigma},$$

где $\mathbf{1}$ — n-мерный вектор из единиц.

Динамику капитала инвестора при данных стратегиях потребления c и инвестирования π (π — n-мерный процесс, определяющий доли капитала, инвестированные в рисковые активы) записываем в следующем виде:

$$dW_t = W_t\left(r + \pi^T \sigma\lambda\right)dt - cdt + W_t \pi^T \sigma dw_t. \quad (1)$$

Поставленная задача решается с помощью мартингального подхода, преимущества которого по сравнению с методом динамического программирования изложены в [4, 5].

Предполагаем, что источником полезности инвестора является как промежуточное потребление, так и конечный капитал. Неявная функция полезности имеет вид:

$$J(W,t) = \sup_{(c_s,\pi_s)_s \in [t,T]} E_{W,t}\left[\int_t^T e^{-\delta(s-t)} u(c_s) ds + e^{-\delta(T-t)} \bar{u}(W_T)\right],$$

где δ — субъективный дисконтный фактор инвестора. На полном финансовом рынке существует единственный процесс плотности цены состояния (иначе называемый ценовым ядром) $\xi = (\xi_t)$, определяемый следующим образом:

$$\xi_t = \exp\left\{-\int_0^t r_s ds - \int_0^t \lambda_s^T dw_s - \frac{1}{2}\int_0^t \lambda_s^T \lambda_s ds\right\}.$$

Согласно [4] оптимальная норма потребления определяется соотношением:

$$c_t^* = I_u\left[Y(W_0)e^{\delta t}\xi_t\right]$$

и оптимальный уровень конечного капитала равен

$$W^* = I_{\bar{u}}\left[Y(W_0)e^{\delta T}\xi_T\right],$$

где Y — функция, обратная к

$$H(\psi) = E\left[\int_0^T \xi_t I_u\left(\psi e^{\delta t}\xi_t\right)dt + \xi_T I_{\bar{u}}\left(\psi e^{\delta T}\xi_T\right)\right],$$

а $I_u(\cdot)$ обозначает функцию, обратную функции предельной полезности $u'(\cdot)$. При условии, что функция полезности инвестора характеризуется постоянной относительной терпимостью к риску, имеем:

$$u(c) = \frac{c^{1-\gamma}}{1-\gamma}, \quad \bar{u}(W) = \frac{W^{1-\gamma}}{1-\gamma}$$

$$u'(c) = c^{-\gamma}, \quad \bar{u}'(W) = W^{-\gamma},$$

а обратные функции равны:

$$I_u(z) = z^{-1/\gamma}, \; I_{\bar{u}}(z) = z^{-1/\gamma}.$$

Целесообразно определить $g=(g_t)$ следующим образом:

$$g_t = E_t\left[\int_t^T e^{-\frac{\delta}{\gamma}(s-t)}\left(\frac{\xi_s}{\xi_t}\right)^{1-\frac{1}{\gamma}} ds + e^{-\frac{\delta}{\gamma}(T-t)}\left(\frac{\xi_T}{\xi_t}\right)^{1-\frac{1}{\gamma}}\right]. \tag{2}$$

Следовательно, функция H может быть вычислена таким образом:

$$H(\psi) = E\left[\int_0^T \xi_t e^{-\frac{\delta}{\gamma}t}\psi^{-\frac{1}{\gamma}}\xi_t^{-\frac{1}{\gamma}}dt + \xi_T e^{-\frac{\delta}{\gamma}T}\psi^{-\frac{1}{\gamma}}\xi_T^{-\frac{1}{\gamma}}\right] =$$

$$\psi^{-\frac{1}{\gamma}}\left(E\left[\int_0^T e^{-\frac{\delta}{\gamma}t}\xi^{1-\frac{1}{\gamma}}dt + e^{-\frac{\delta}{\gamma}T}\xi_T^{1-\frac{1}{\gamma}}\right]\right) = \psi^{-\frac{1}{\gamma}}g_0,$$

а обратная к ней функция имеет вид:

$$Y(W_0) = W_0^{-\gamma}g_0^{\gamma}.$$

Поэтому оптимальная политика потребления дается выражением:

$$c_t^* = e^{-\frac{\delta}{\gamma}t}Y(W_0)^{-\frac{1}{\gamma}}\xi_t^{-\frac{1}{\gamma}} = \frac{W_0}{g_0}e^{-\frac{\delta}{\gamma}t}\xi_t^{-\frac{1}{\gamma}}, \tag{3}$$

а оптимальный уровень конечного капитала составляет:

$$W^* = e^{-\frac{\delta}{\gamma}T}Y(W_0)^{-\frac{1}{\gamma}}\xi_T^{-\frac{1}{\gamma}} = \frac{W_0}{g_0}e^{-\frac{\delta}{\gamma}T}\xi_T^{-\frac{1}{\gamma}}. \tag{4}$$

Динамика капитала при оптимальной стратегии (3), (4) определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} W_t^* &= \frac{1}{\xi_t}E_t\left[\int_t^T \xi_s c_s^* ds + \xi_T W^*\right] = \\ &= \frac{W_0}{g_0}\frac{1}{\xi_t}E_t\left[\int_t^T e^{-\frac{\delta}{\gamma}s}\xi_s^{1-\frac{1}{\gamma}}ds + e^{-\frac{\delta}{\gamma}T}\xi_T^{1-\frac{1}{\gamma}}\right] = \\ &= \frac{W_0}{g_0}e^{-\frac{\delta}{\gamma}t}\xi_t^{-\frac{1}{\gamma}}E_t\left[\int_t^T e^{-\frac{\delta}{\gamma}(s-t)}\left(\frac{\xi_s}{\xi_t}\right)^{1-\frac{1}{\gamma}}ds + e^{-\frac{\delta}{\gamma}(T-t)}\left(\frac{\xi_T}{\xi_t}\right)^{1-\frac{1}{\gamma}}\right] = \frac{W_0}{g_0}e^{-\frac{\delta}{\gamma}t}\xi_t^{-\frac{1}{\gamma}}g_t \end{aligned} \tag{5}$$

Следовательно,

$$\frac{W^*}{g_t} = \frac{W_0}{g_0}e^{-\frac{\delta}{\gamma}t}\xi_t^{-\frac{1}{\gamma}}. \tag{6}$$

Непосредственно из (3) видно, что можно переписать оптимальную норму потребления в момент t как

$$c_t^* = \frac{W_t^*}{g_t}, \tag{7}$$

Так, что g_t интерпретируется как оптимальное отношение капитала к потреблению. Более того, при $s>t$ получаем соотношение:

$$c_s^* = \frac{W_0}{g_0}e^{-\frac{\delta}{\gamma}s}\xi_s^{-\frac{1}{\gamma}} = \frac{W_0}{g_0}e^{-\frac{\delta}{\gamma}t}\xi_t^{-\frac{1}{\gamma}}e^{-\frac{\delta}{\gamma}(s-t)}\left(\frac{\xi_s}{\xi_t}\right)^{-\frac{1}{\gamma}} = \frac{W_t^*}{g_t}e^{-\frac{\delta}{\gamma}(s-t)}\left(\frac{\xi_s}{\xi_t}\right)^{-\frac{1}{\gamma}}, \tag{8}$$

которое устанавливает неопределенную норму потребления в момент s при заданной информации, доступной в момент t. Аналогично можно выразить оптимальный конечный капитал в следующем виде:

$$W^* = \frac{W_t^*}{g_t} e^{-\frac{\delta}{\gamma}(T-t)} \left(\frac{\xi_T}{\xi_t} \right)^{-\frac{1}{\gamma}}. \tag{9}$$

Неявная функция полезности в момент t записывается следующим образом:

$$J_t = E_t \left[\int_t^T e^{-\delta(s-t)} u\left(c_s^*\right) ds + e^{-\delta(T-t)} \overline{u}\left(W^*\right) \right] =$$

$$= \frac{1}{1-\gamma} E_t \left[\int_t^T e^{-\delta(s-t)} \left(c_s^*\right)^{1-\gamma} ds + e^{-\delta(T-t)} \left(W^*\right)^{1-\gamma} \right] =$$

$$= \frac{1}{1-\gamma} \left(\frac{W_t^*}{g_t} \right)^{1-\gamma} E_t \left[\int_t^T e^{-\frac{\delta}{\gamma}(s-t)} \left(\frac{\xi_s}{\xi_t} \right)^{1-\frac{1}{\gamma}} ds + e^{-\frac{\delta}{\gamma}(T-t)} \left(\frac{\xi_T}{\xi_t} \right)^{1-\frac{1}{\gamma}} \right] =$$

$$= \frac{1}{1-\gamma} g_t^{\gamma} \left(W_t^*\right)^{1-\gamma},$$

где третье равенство имеет место в силу (8) и (9), а последнее равенство следует из определения g_t.

Уравнения, выведенные выше, справедливы при общих предположениях об инвестиционных возможностях для функции полезности с постоянной относительной терпимостью к риску. Далее будем рассматривать постоянные инвестиционные возможности, т.е. предполагать, что r, μ и σ не зависят от времени. В этом случае дефлятор цены состояния принимает вид:

$$\xi_t = \exp\left(-rt - \lambda^T z_t - \frac{1}{2} \lambda^T \lambda t \right). \tag{10}$$

Следовательно, будущие значения дефлятора цены состояния распределены логнормально. Заметим, что для любого $s>t$ имеем:

$$E_t \left[e^{-\frac{\delta}{\gamma}(s-t)} \left(\frac{\xi_s}{\xi_t} \right)^{1-\frac{1}{\gamma}} \right] =$$

$$= E_t \left[e^{-\frac{\delta}{\gamma}(s-t)} \left(\exp\left\{ -r(s-t) - \lambda^T (z_s - z_t) - \frac{1}{2} \lambda^T \lambda (s-t) \right\} \right)^{1-\frac{1}{\gamma}} \right] =$$

$$= e^{-\frac{\delta}{\gamma}(s-t)} \exp\left\{ -\left(1-\frac{1}{\gamma}\right) r(s-t) - \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\gamma}\right) \lambda^T \lambda (s-t) \right\} E_t \left[\exp\left\{ -\left(1-\frac{1}{\gamma}\right) \lambda^T (z_s - z_t) \right\} \right] =$$

$$= e^{-\frac{\delta}{\gamma}(s-t)} \exp\left\{ -\left(1-\frac{1}{\gamma}\right) r(s-t) - \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\gamma}\right) \lambda^T \lambda (s-t) \right\} \exp\left\{ \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\gamma}\right)^2 \lambda^T (s-t) \right\} =$$

$$= \exp\left\{ -\left(\frac{\delta - r(1-\gamma)}{\gamma} - \frac{1}{2} \frac{1-\gamma}{\gamma^2} \lambda^T \lambda \right)(s-t) \right\} = e^{-A(s-t)},$$

где A — постоянная, определяемая следующей формулой:

$$A = \frac{\delta - r(1-\gamma)}{\gamma} - \frac{1}{2} \frac{1-\gamma}{\gamma^2} \lambda^T \lambda = \frac{\delta - r(1-\gamma)}{\gamma} - \frac{1}{2} \frac{1-\gamma}{\gamma^2} (\mu - r1)^T \left(\sigma\sigma^T\right)^{-1} (\mu - r1).$$

Теперь можно вычислить g_t в замкнутой форме:

$$g_t = E_t\left[\int_t^T e^{-\frac{\delta}{\gamma}(s-t)}\left(\frac{\xi_s}{\xi_t}\right)^{1-\frac{1}{\gamma}} ds + e^{-\frac{\delta}{\gamma}(T-t)}\left(\frac{\xi_T}{\xi_t}\right)^{1-\frac{1}{\gamma}}\right] =$$

$$= \int_t^T E_t\left[e^{-\frac{\delta}{\gamma}(s-t)}\left(\frac{\xi_s}{\xi_t}\right)^{1-\frac{1}{\gamma}}\right] ds + E_t\left[e^{-\frac{\delta}{\gamma}(T-t)}\left(\frac{\xi_T}{\xi_t}\right)^{1-\frac{1}{\gamma}}\right] =$$

$$= \int_t^T e^{-A(s-t)} ds + e^{-A(T-t)} = \frac{1}{A}\left(1 + (A-1)e^{-A(T-t)}\right),$$

т.е. она является детерминированной функцией. Поэтому для случая постоянных инвестиционных возможностей формулы для оптимальной нормы потребления и функции неявной полезности, выведенные выше, совпадают с результатами, полученными при использовании метода динамического программирования [5].

Остается вывести уравнение оптимальной инвестиционной стратегии. Оптимальный процесс накопления капитала описывается выражением (5). Поскольку сейчас мы уже знаем, что g_t является детерминированной функцией, то единственным стохастическим процессом в выражении (5) остаётся дефлятор цены состояния ξ_t. При постоянных инвестиционных возможностях динамика дефлятора цены состояния определяется следующим стохастическим дифференциальным уравнением:

$$d\xi_t = -\xi_t\left(rdt + \lambda^T dz_t\right).$$

Применяя лемму Ито, можно вывести уравнение, определяющее динамику процесса накопления капитала:

$$dW_t^* = W_t^*\left[\left(r + \frac{1}{\gamma}\lambda^T\lambda - g(t)^{-1}\right)dt + \frac{1}{\gamma}\lambda^T dz_t\right]. \tag{11}$$

Поэтому оптимальный капитал эволюционирует как геометрическое броуновское движение (хотя и с зависящей от времени тенденцией). Сравнивая (10) с динамикой капитала для любой данной инвестиционной стратегии $\pi=(\pi_t)$ из выражения (1), получаем, что оптимальный процесс накопления капитала достигается при инвестиционной стратегии вида

$$\pi_t^* = \frac{1}{\gamma}\left(\sigma^T\right)^{-1}\lambda, \tag{12}$$

что совпадает с результатом, полученным ранее методом динамического программирования.

Итак, оптимальность инвестиционной стратегии достигается поддержанием долей капитала, инвестированных в каждый из активов, на постоянном уровне. Отметим, что при этом инвестор должен постоянно корректировать свой портфель с учетом временной динамики цен активов. Рассмотрим, например, актив, входящий в оптимальный портфель с положительным весом. Если цена этого актива растет быстрее, чем цены других активов в портфеле, то доля капитала, соответствующая этому активу, будет увеличиваться (т.е. и удельный вес этого актива в портфеле будет увеличиваться). Поэтому согласно оптимальной стратегии инвестирования инвестор должен сократить количество единиц этого актива в портфеле. Поэтому оптимальная стратегия состоит в покупке активов, цена которых растет относительно более медленно, и продаже активов, растущих быстрее остальных. Чем выше коэффициент относительного неприятия риска, тем ниже инвестирование в рисковые активы и выше инвестирование в безрисковый актив (банковский счет). Инвестиционная стратегия не зависит от инвестиционного горизонта. Ожидаемая избыточная доходность акций увеличивается с длиной инвестиционного горизонта, но при этом также увеличиваются дисперсия и волатильность доходности. Инвестор, характеризующийся полезностью с постоянной относительной терпимостью к риску, должен принимать во внимание этот компромисс. Для инвестора с такой полезностью в модели финансового рынка с постоянными инвестиционными возможностями указанные два эффекта компенсируют друг друга полностью, так что портфель не зависит от инвестиционного горизонта.

Отметим, что предложенная модель находится в согласии с практическими советами финансовых аналитиков о том, что пропорции рисковых активов в долгосрочном оптимальном портфеле должны зависеть от относительного неприятия риска инвестора. Тем самым построенная модель объясняет так называемый парадокс Каннера [4] о несоответствии между теоремой разделения Тобина и практическими советами популярных аналитиков. Дело в том, что теорема Тобина, утверждающая, что пропорции рисковых активов в оптимальном портфеле не зависят от относительного неприятия риска инвестора, справедлива для статистической однопериодической модели финансового рынка на небольшом инвестиционном горизонте. Модель же с непрерывным временем, предложенная в настоящей работе, указывает на зависимость оптимальной стратегии от коэффициента относительного неприятия риска инвестором.

Примечания:

1. Ширяев А.Н. Основы стохастической финансовой математики. Факты. Модели. Т. 1. М.: ФАЗИС, 2004. 556 с.
2. Ширяев А.Н. Основы стохастической финансовой математики. Теория. Т. 2. М.: ФАЗИС, 2004. 500 с.
3. Шарп У., Александер Г., Бейли Д. Инвестиции. М.: ИНФРА-М. 2003.
4. Cox J.C., Huang C.-f. A variational problem arising in financial economics // J. Mathematical Economics. 1991. V. 20. P. 465-487.
5. Каранашев А.Х. Экономико-математическая модель оптимизации финансовых инвестиций // Современные научные исследования. Кисловодск: Издательский центр КИЭП, 2011. №3.

References:

1. Shiryaev A.N. Bases of the stochastic financial mathematics. Facts. Models. V.1. 2-nd edition, corrected. M.: PHASIS, 2004. 556 p.
2. Shiryaev A.N. Bases of the stochastic financial mathematics. Theory. V.2. 2-nd edition, corrected. M.: PHASIS, 2004. 500 p.
3. Sharp W., Alexander G., Bailey D. Investments. M.: INFRA-M. 2003.
4. Cox J.C., Huang C.-F. A variational problem arising in financial economics // J. Mathematical Economics. 1991. V. 20. P. 465-487.
5. Karanashev A.Kh. Economic-mathematical model of optimization of financial investments // Modern Scientific Researches. 2011. No. 3. Kislovodsk: KIEP Publishing Center.