УДК 517.2
ББК 22.161
И 88

Мамий Д.К.
Кандидат физико-математических наук, доцент, зав. кафедрой алгебры и геометрии, декан факультета математики и компьютерных наук Адыгейского государственного университета, тел. (8772) 59-37-32, e-mail: dmami@yandex.ru

Лаврентьев А.В.
Кандидат химических наук, доцент кафедры физики факультета компьютерных технологий и автоматизированных систем Кубанского государственного технологического университета, тел. (861) 255-85-32, e-mail: k-fizika@kubstu.ru

Коваленко А.В.
Кандидат экономических наук, доцент кафедры прикладной математики Кубанского государственного университета, тел. 89184440042, e-mail: savanna-05@mail.ru

Уртенов М.Х.
Доктор физико-математических наук, профессор, зав. кафедрой прикладной математики Кубанского государственного университета, тел. 89184659466, e-mail: urtenovmax@mail.ru

Использование регулярного представления сингулярно возмущенных систем интегродифференциальных уравнений для их численного решения*

(Рецензирована)

Аннотация

Дано регулярное представление одной краевой задачи для сингулярно возмущенного интегро-дифференциального уравнения типа Фредгольма второго порядка в виде возмущенного интегрального уравнения типа Фредгольма. Определены два разных метода последовательных приближений. Показано как регулярное представление сингулярно возмущенных уравнений позволяет строить эффективные разностные методы решения.

Ключевые слова: *краевая задача, сингулярно возмущенное интегро-дифференциальное уравнение, разностные методы решения, метод последовательных приближений.*

Mamiy D.K.
Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Head of Algebra and Geometry Department, Dean of Mathematics and Computer Science Faculty at Adyghe State University, ph. (8772) 59-37-32, e-mail: dmami@yandex.ru

Lavrentyev A.V.
Candidate of Chemistry, Associate Professor of Physics Department at Faculty of Computer Technologies and Automatic Systems at Kuban State University of Technology, ph. (861) 255-85-32, e-mail: k-fizika@kubstu.ru

Kovalenko A.V.
Candidate of Economics, Associate Professor of Applied Mathematics Department at Kuban State University, ph. 89184440042, e-mail: savanna-05@mail.ru

Urtenov M.Kh.
Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Head of Applied Mathematics Department at Kuban State University, ph. 89184659466, e-mail: urtenovmax@mail.ru

* *Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ в рамках темы 1.4.08 Единого заказ/наряда.*

Application of regular representation of a integro-differential singularly perturbed system equations for their numerical solution

Abstract

In this paper we give a regular representation of a boundary value problem for a singularly perturbed Fredholm type integro-differential second order equation in the perturbed Fredholm type integral equation form. Two different successive approximation methods are determined. It is shown how the regular representation of singularly perturbed equations allows us to construct efficient methods for solving differential.

Kew words: *a boundary value problem, a singularly perturbed integro-differential equation, methods for solving differential, a method of successive approximations.*

Сингулярно возмущенные задачи трудно поддаются численному решению стандартными разностными методами [1, 2]. Малый параметр обусловливает разбиение интервала определения решения на зоны, в которых решение меняется очень быстро (зона пограничного слоя) и сравнительно медленно (внешняя зона). Для обеспечения устойчивости соответствующих разностных схем применяют шаг на порядок меньше параметра. Это целесообразно при интегрировании в зоне пограничного слоя. Однако везде применять такой маленький шаг практически невозможно из-за его размеров. Попытки же увеличить длину шага по внешней зоне в стандартных схемах (например, в схеме Рунге-Кутта) приводит к «взрыву погрешности», лавинообразному накоплению ошибок. Поэтому для численного решения задач с сингулярными возмущениями были предложены специальные разностные схемы.

Регулярное представление сингулярно возмущенных уравнений позволяет строить эффективные разностные методы решения.

Рассмотрим краевую задачу для сингулярно возмущенного интегро-дифференциального уравнения типа Фредгольма

$$\mu^2 y'' - a^2(t)y(t) = \lambda\int_0^1 k(t,s)y(s)ds + f(t), \tag{1}$$

$$y(0) = A, \quad y(1) = B, \quad 0 \le t \le 1, \quad 0 < \mu < \mu_0, \tag{2}$$

где μ малый параметр.

Для задачи (1), (2) определим регулярное представление и соответствующие ему итерационные методы решения, на основе которых построим разностные схемы, удобные для численного расчета.

Предположим, что λ не является собственным числом ядра

$$-\frac{k(t,s)}{a^2(t)}.$$

Рассмотрев правую часть (1) как свободный член, перейдем от уравнений (1), (2) к интегральному уравнению

$$y(t) = \lambda\int_0^1 G(t,s,\mu)y(s)ds + \varphi(t). \tag{3}$$

Несложно показать, что функция $G(t,s,\mu)$ имеет асимптотическое представление

$$G(t,s,\mu)=-\frac{k(t,s)}{a^2(t)}+G_0(t,s)+G_1(t,s)+0(\mu),$$

где

$$G_0(t,s)=\frac{k(0,s)}{\sqrt{a(t)a^3(0)}}e^{-\frac{1}{\mu}\int_0^t a(x)dx},\quad G_1(t,s)=\frac{k(1,s)}{\sqrt{a(t)a^3(1)}}e^{-\frac{1}{\mu}\int_0^1 a(x)dx},$$

а функция $\varphi(t)$ является решением задачи

$$\mu^2 y''-a^2(t)y(t)=f(t),\quad \varphi(0)=A,\quad \varphi(1)=B.$$

Для решения уравнения (3) можно предложить два метода последовательных приближений:

а) последовательные приближения определяются равенствами:

$$y_i(t)=x_i(t)-\lambda\int_0^1 R_0(t,s)x_i(s)ds-\lambda\int_0^1 R_1(t,s)x_i(s)d,$$

$x_1(t)$,

$$x_i(t)=-\lambda\int_0^1\frac{k(t,s)}{a^2(t)}x_i(s)ds+\varphi(t)+\lambda\int_0^1 S(t,s,\lambda)x_{i-1}(s)ds,$$

где

$$R_0(t,s)=\frac{G_0(t,s)}{\lambda\int_0^1 G_0(\tau,\tau)d\tau-1},\quad R_1(t,s)=\frac{G_1(t,s)}{\lambda\int_0^1 G_1(\tau,\tau)d\tau-1},$$

$$S(t,s,\lambda)=z(t,s)-\lambda\int_0^1 z(t,\tau)[R_0(\tau,s)+R_1(\tau,s)]d\tau,$$

$$z(t,s)=G(t,s,\mu)+\frac{k(t,s)}{a^2(t)}-G_0(t,s)-G_1(t,s),$$

причем,

$$|S(t,s,\lambda)|\le c\mu;$$

б) последовательные приближения определяются равенствами:

$y_{-1}(t)\equiv 0$,

$$\mathrm{y_i(t)} = \lambda \int_0^1 \left[-\frac{K(t,s)}{a^2(t)} + G_0(t,s) + G_2(t,s) \right] y_i(s)ds + \varphi(t) + \lambda \int_0^1 z(t,s) y_{i-1}(s)ds \,. \quad (4)$$

Для этих методов последовательных приближений, как и выше, доказывается равномерная сходимость относительно t, μ к решению краевой задачи (1), (2) и справедливость оценки

$$|y(t) - y_i(t)| \le C(C\mu)^{i+1}, \quad 0 \le t \le 1, \quad 0 \le \mu \le \mu_0 \,.$$

Для численного решения можно использовать любой из методов последовательных приближений. Для примера построим разностную схему, основанную на последовательных приближениях (4), используя первое приближение.

На отрезке $[0, 1]$ введем равномерную сетку с шагом h и соответствующие сеточные функции, тогда разностная схема может быть определена, например, в виде:

$$U(t) = \frac{h}{2} \left\{ \left[-\frac{K(t,s)}{a^2(t)} + G_0(t,s) + G_2(t,s) \right] U(0) + \left[-\frac{K(t,s)}{a^2(t)} + G_0(t,s) + G_2(t,s) \right] U(1) \right\} +$$

$$+ h \sum_{i=1}^{N-1} \left[-\frac{K(t,ih)}{a^2(t)} + G_0(t,ih) + G_2(t,ih) \right] U(ih) + \varphi(t),$$

$$t = h, 2h, ..., (N-1)h \,. \quad (5)$$

Для численного нахождения $\varphi(t)$ используем разностную схему, предложенную А.М. Ильиным:

$$\gamma(t) U_{t\bar{t}} - a^2(t) U(t) = f(t), \quad U(0) = A, \quad U(1) = B,$$

где

$$\gamma(t) = \frac{a^2(t) h^2}{2ch\left[\frac{a(t)h}{\mu} - 2 \right]}, \quad U_{t\bar{t}} = \frac{U(t+h) - 2U(t) + U(t-h)}{h^2},$$

$$t = h, 2h, ..., (N-1)h \,.$$

Для разностной схемы (5) справедлива оценка:

$$|y(t) - U(t)| \le C(\mu + h), \quad t = 0, h, 2h, ..., (N-1)h, Nh = 1.$$

Для тестового примера

$$K(t,s) = \frac{1}{10} e^s + s^2, \quad a^2(t) = 1, \quad f(t) = t + 2,$$

$$\lambda = 1, \quad \mu = 0{,}01, \quad A = -3{,}749, \quad B = -5{,}749,$$

были проведены расчеты с шагом $h = 0{,}01$. Погрешность составила 0,02.

Полученные регулярные представления позволяют дать итерационные методы вычисления собственных значений и собственных функций задач на собственные значения для сингулярно возмущенных интегродифференциальных операторов.

Примечания:

1. Мамий Д.К., Лаврентьев А.В., Уртенов М.Х. Итерационные методы решения сингулярно возмущенных операторных уравнений Фредгольма // Вестник Адыгейского государственного университета. Сер. «Естественно-математические и технические науки». 2009. Вып. 1(43). С. 9-14. URL: http://vestnik.adygnet.ru
2. Мамий Д.К., Лаврентьев А.В., Уртенов М.Х. Итерационные методы решения сингулярно возмущенных операторных уравнений Фредгольма в случае итерационного и асимптотического представления возмущения // Вестник Адыгейского государственного университета. Сер. «Естественно-математические и технические науки». 2009. Вып. 2(49). С. 9-15. URL: http://vestnik.adygnet.ru

References:

1. Mamiy D.K., Lavrentyev A.V., Urtenov M.Kh. Iterative methods of solution of the Fredholm singular perturbed functional equations // The Bulletin of the Adyghe State University. Series «Natural-Mathematical and Technical Sciences». 2009. Iss. 1(43). P. 9-14. URL: http://vestnik.adygnet.ru
2. Mamiy D.K., Lavrentyev A.V., Urtenov M.Kh. Iterative methods of solution of the Fredholm singular perturbed functional equations in case of iterative and asymptotic representation of perturbation // The Bulletin of the Adyghe State University. Series «Natural-Mathematical and Technical Sciences». 2009. Iss. 2(49). P. 9-15. URL: http://vestnik.adygnet.ru