
УДК 537.8
ББК 22.33
М 32

Мастерова М.А.

Ассистент кафедры высшей математики и математической физики Национального исследовательского Томского политехнического университета, тел. (3822) 52-36-44

Янц Ю.Г.

Аспирант кафедры теоретической физики Томского государственного педагогического университета, e-mail: yanz@tspu.edu.ru

**Вектор Умова-Пойнтинга дипольного электрического
и дипольного магнитного моментов***
(Рецензирована)

Аннотация

Исследованы свойства вектора Умова-Пойнтинга для электромагнитного поля, создаваемого произвольно изменяющимся электрическим или магнитным диполем. Показано, что в ближней зоне, на расстояниях, сравнимых с характерной длиной волны, направление вектора потока энергии электромагнитного поля диполя существенно отличается от радиального направления. В дальней зоне полученные формулы асимптотически приближаются к известным формулам для дипольного излучения. Рассмотрены частные случаи линейно изменяющегося и прецессирующего дипольного момента.

Ключевые слова: электромагнитное поле, диполь, вектор Умова-Пойнтинга, энергия поля.

Masterova M.A.

Lecturer Assistant of Higher Mathematics and Mathematical Physics Department of Tomsk National Research Polytechnic University, ph. (3822) 52-36-44

Yants Yu.G.

Post-graduate student of Theoretical Physics Department of Tomsk State Pedagogical University, e-mail: yanz@tspu.edu.ru

Umov-Poynting vector for the electric and magnetic dipole moments

Abstract

This paper examines the properties of Umov-Poynting vector for the electromagnetic field of an arbitrary varying electric and magnetic dipole. It is shown that in the near zone, at distances comparable with the typical wave length, the direction of the energy flow vector is not radial. The derived formulae in the far zone asymptotically approach the known expressions for dipole radiation. Special cases of linearly varying and precessing dipole moment are considered.

Key words: electromagnetic field, dipole, Umov-Poynting vector, field energy.

1. Введение

В настоящей работе рассмотрены свойства вектора Умова-Пойнтинга для электромагнитного поля, создаваемого произвольно изменяющимся электрическим или магнитным диполем.

Обычно поток энергии изменяющегося со временем источника электромагнитного поля вычисляется вдали от источника, в так называемой волновой зоне. В этой области поток энергии направлен радиально от источника и представляет собой излучение.

В данной работе вычислено распределение потока энергии на любых расстояниях от источника поля. В частности, показано, что в ближней зоне вектор Умова-Пойнтинга имеет не только радиальную, но и существенную составляющую, ортогональную радиальному направлению. И только в волновой зоне поток энергии приобретает значи-

* Работа поддержана грантом LRSS, No. 3558.2010.2.

тельную радиальную составляющую, превращаясь в поток излучения.

Исследования потока энергии в ближней зоне имеют как чисто академическое, так и практическое значение. Например, если дипольный момент находится в среде, то электромагнитное поле может оказывать давление на нейтральные частицы вещества, аналогичное давлению света.

2. Вектор Умова-Пойнтинга дипольного момента

Найдем вектор Умова-Пойнтинга поля дипольного электрического момента. Векторы напряженности электрического поля $\vec{E}(t)$ и напряженности магнитного поля $\vec{H}(t)$ электрического дипольного момента $\vec{p}(t')$ на расстоянии r представимы следующим образом [1]:

$$\vec{E}(t) = \frac{(\vec{n} \times (\vec{n} \times \ddot{\vec{p}}))}{rc^2} + \frac{3\vec{n}(\vec{n} \cdot \dot{\vec{p}}) - \dot{\vec{p}}}{r^2c} + \frac{3\vec{n}(\vec{n} \cdot \vec{p}) - \vec{p}}{r^3}, \quad (1)$$

$$\vec{H}(t) = \frac{(\ddot{\vec{p}} \times \vec{n})}{rc^2} + \frac{(\dot{\vec{p}} \times \vec{n})}{r^2c}, \quad (2)$$

где $\vec{n} = \frac{\vec{r}}{r}$, \vec{r} – радиус-вектор, проведенный от дипольного момента до наблюдателя, r – модуль радиус-вектора, c – скорость света. Точки обозначают производную по времени. Вектор \vec{p} в правой части и его производные берутся в момент времени t' . Времена t и t' связаны соотношением

$$t = t' + \frac{r}{c}. \quad (3)$$

Для целей настоящей работы эти формулы удобно представить в другом виде. Введем вспомогательный вектор $\vec{P} = \vec{p}' + \vec{p}$, где штрих означает производную по безразмерному времени $\tau = ct/r$. Тогда формулы (1) и (2) запишутся в виде:

$$r^3 \vec{E}(t) = (\vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{p}'')) + 3\vec{n}(\vec{n} \cdot \vec{P}) - \vec{P}, \quad (4)$$

$$r^3 \vec{H}(t) = (\vec{P}'' \times \vec{n}). \quad (5)$$

Найдем вектор Умова-Пойнтинга:

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} (\vec{E} \times \vec{H}). \quad (6)$$

Подставляя значения $\vec{E}(t)$ и $\vec{H}(t)$ из (4), (5) в (6), получим:

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi r^6} \{ \vec{n} [(\vec{p}'' \cdot \vec{P}') - (\vec{n} \cdot \vec{p}'')(\vec{n} \cdot \vec{P}')] - 3(\vec{n} \cdot \vec{P})(\vec{n} \cdot \vec{P}') + (\vec{P}' \cdot \vec{P})] + 2\vec{P}'(\vec{n} \cdot \vec{P}) \}. \quad (7)$$

Радиальная часть вектора Умова-Пойнтинга полностью определяется выражением в квадратных скобках. В зависимости от величин, входящих в это выражение, оно может принимать как положительное, так и отрицательное значение. Другими словами, поток энергии электромагнитного поля может быть направлен как к диполю, так и от него. Нерadiальная часть вектора \vec{S} полностью определяется последним слагаемым. Разные слагаемые пропорциональны разным степеням расстояния от диполя. На больших расстояниях преобладают слагаемые, содержащие старшие производные от ди-

польного момента. Если в последнем выражении оставить только такие слагаемые, то для вектора Умова-Пойнтинга получим:

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi r^6} (\vec{n} \times \vec{p}'')^2. \quad (8)$$

Это хорошо известная формула для потока энергии излучения дипольного момента. В ближней зоне пространственное распределение потока имеет довольно сложный вид, но очевидно, что поток, усредненный за достаточно большой отрезок времени, должен быть направлен радиально от диполя. Покажем это.

Найдем проекцию вектора \vec{S} на направление \vec{n} :

$$(\vec{S} \cdot \vec{n}) = \frac{c}{4\pi r^6} \{(\vec{n} \times \vec{p}'')^2 + (\vec{n} \times \vec{p}')(\vec{n} \times \vec{p}'') + (\vec{n} \times \vec{P})(\vec{n} \times \vec{P}')\}.$$

Последнее выражение можно записать в виде:

$$(\vec{S} \cdot \vec{n}) = \frac{c}{4\pi r^6} (\vec{n} \times \vec{p}'')^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{d\tau} ((\vec{n} \times \vec{p}')^2 + (\vec{n} \times \vec{P})^2). \quad (9)$$

Будем считать, что дипольный момент \vec{p} изменяется в ограниченных пределах. Тогда при усреднении по τ от $-\infty$ до $+\infty$ последнее слагаемое обращается в ноль, а оставшееся выражение описывает интенсивность излучения в радиальном направлении:

$$\overline{(\vec{S} \cdot \vec{n})} = \frac{c}{4\pi r^6} \overline{(\vec{n} \times \vec{p}'')^2}. \quad (10)$$

Рассмотрим теперь поле дипольного магнитного момента. В силу дуальной симметрии оно получается из поля дипольного электрического момента заменой $\vec{E} \rightarrow \vec{H}$, $\vec{H} \rightarrow -\vec{E}$ и $\vec{p} \rightarrow \vec{m}$, $\vec{m} \rightarrow -\vec{p}$, где \vec{m} – вектор магнитного момента.

В результате получим

$$r^3 \vec{H}(t) = (\vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{m}'')) + 3\vec{n}(\vec{n} \cdot \vec{P}) - \vec{P}, \quad (11)$$

$$r^3 \vec{E}(t) = (\vec{P}'' \times \vec{n}), \quad (12)$$

где теперь $\vec{P} = \vec{m}' + \vec{m}$. Поскольку вектор Умова-Пойнтинга является квадратичной комбинацией вектора дипольного момента и его производных, выражения (7) – (10) остаются справедливыми и для электрического дипольного момента. Но под \vec{p} можно понимать либо электрический, либо магнитный момент.

В разделах 3 и 4 рассмотрены частные случаи для линейно изменяющегося и прецессирующего дипольного момента.

3. Поле линейно изменяющегося дипольного момента

Найдем величину и направление переноса энергии электромагнитного поля линейно изменяющегося дипольного момента.

Будем считать далее, что направление дипольного момента не меняется со временем, изменяется только его величина. Тогда можно записать:

$$\vec{p} = \vec{\zeta} p(t), \quad \dot{\vec{p}} = \vec{\zeta} \dot{p}(t), \quad \ddot{\vec{p}} = \vec{\zeta} \ddot{p}(t), \quad (13)$$

где вектор $\vec{\zeta} = const$ и $|\vec{\zeta}| = 1$.

Тогда вектор Умова-Пойнтинга \vec{S} можно представить в следующем виде:

$$\vec{S} = \frac{3}{4\pi} \left(\frac{\dot{p}}{r^2 c} + \frac{\ddot{p}}{rc^2} \right) \left(\left(\frac{2p}{r^3} + \frac{2\dot{p}}{r^2 c} \right) \vec{\zeta} (\vec{n} \cdot \vec{\zeta}) - \left(\frac{3p}{r^3} + \frac{3\dot{p}}{r^2 c} + \frac{\ddot{p}}{rc^2} \right) \vec{n} (\vec{n} \cdot \vec{p})^2 + \left(\frac{p}{r^3} + \frac{\dot{p}}{r^2 c} + \frac{\ddot{p}}{rc^2} \right) \vec{n} \right).$$

Как видно из последнего выражения, вектор Умова-Пойнтинга \vec{S} не равен нулю только тогда, когда дипольный момент изменяется, то есть имеются слагаемые, содержащие первую и вторую производные от дипольного момента \dot{p} , \ddot{p} .

Полученное выражение зависит от разных степеней r , на очень больших расстояниях основную роль играет слагаемое $\vec{n} \frac{\ddot{p}^2}{r^2 c^4}$. Отсюда следует, что это слагаемое сонаправленно с единичным вектором \vec{n} , то есть энергия переносится в радиальном направлении от диполя и представляет собой электромагнитное излучение. В тоже время, в этой формуле присутствуют слагаемые, направленные под углом к вектору \vec{n} , описывающие перенос энергии из одной области пространства в другую, в окрестности изменяющегося дипольного момента.

Для того чтобы получить более детальную информацию о свойствах электромагнитного поля вблизи дипольного момента, найдем разложение этого поля в спектр. Вообще говоря, изменение поля со временем представляет собой непериодический процесс, поэтому векторы напряженностей электрического и магнитного полей дипольного момента $\vec{E}(t)$ и $\vec{H}(t)$ следует разлагать в интеграл Фурье. Представим вектор напряженности электрического поля $\vec{E}(\omega)$ в виде интеграла Фурье [2]:

$$\vec{E}(\omega) = \int \vec{E}(t') e^{i\omega t'} dt', \quad (14)$$

где $t = t' + \frac{r}{c}$, ω – частота. Переходя к интегрированию по времени t' , получим:

$$\vec{E}(\omega) = e^{i\omega r} \int \vec{E}(t') e^{i\omega t'} dt', \quad (15)$$

Аналогичное выражение справедливо для вектора напряженности магнитного поля $\vec{H}(\omega)$:

$$\vec{H}(\omega) = e^{i\omega r} \int \vec{H}(t') e^{i\omega t'} dt'. \quad (16)$$

Подставляя выражения (1), (2) в уравнения (15), (16) и интегрируя по частям, получим выражения для векторов \vec{E} и \vec{H} :

$$\vec{E}(\omega) = e^{i\vec{k}\vec{r}} \left[\vec{p}(\omega) \left(\frac{k^2}{r} + \frac{ik}{r^2} - \frac{1}{r^3} \right) - \vec{n} (\vec{n} \cdot \vec{p}(\omega)) \left(\frac{k^2}{r} + \frac{3ik}{r^2} - \frac{3}{r^3} \right) \right],$$

$$\vec{H}(\omega) = ik (\vec{p}(\omega) \times \vec{n}) \left(\frac{ik}{r} - \frac{1}{r^2} \right) e^{i\vec{k}\vec{r}},$$

где $\vec{k} = \frac{\omega}{c} \vec{n}$ – волновой вектор.

Вектор Умова-Пойнтинга \vec{S}' для векторов напряженностей $\vec{E}(\omega)$ и $\vec{H}(\omega)$ имеет вид:

$$\vec{S}' = \frac{c}{4\pi} (\vec{E} \times \vec{H}^*),$$

где \vec{H}^* – комплексно сопряженное для \vec{H} .

Тогда получим:

$$\vec{S}' = -\frac{ik}{4\pi c} \left[(\vec{p} \times (\vec{p}^* \times \vec{n})) \left(\frac{1}{r^5} - \frac{ik^3}{r^2} \right) - (\vec{n} \cdot \vec{p}) (\vec{n} \times (\vec{p}^* \times \vec{n})) \left(\frac{3}{r^5} + \frac{2k^2}{r^3} - \frac{ik^3}{r^2} \right) \right].$$

Картина силовых линий вектора Умова-Пойнтинга \vec{S} приведена на рисунке 1.

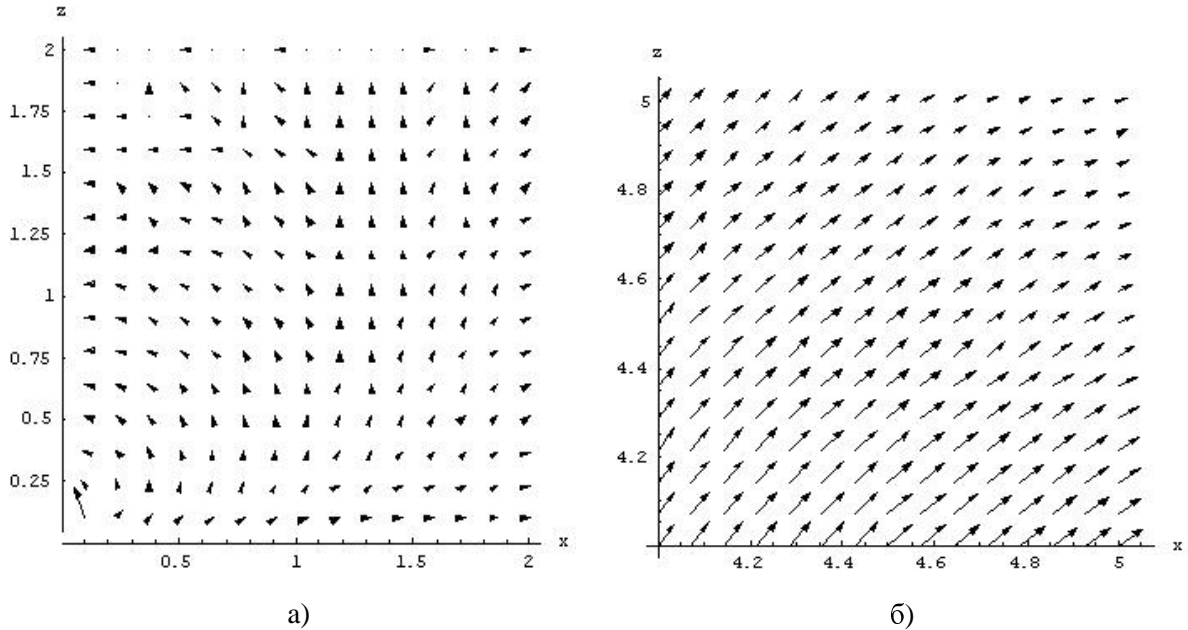


Рис. 1. Картина Фурье-разложения вектора Умова-Пойнтинга:
а) на малых расстояниях от диполя; б) на больших расстояниях от диполя

По осям отложены координаты x , z в единицах длин волн. Из последних формул видно, что зависимость от r входит в формулы как отношение r к длине волны, поэтому данный рисунок не зависит от того, для какой длины волны поля он построен.

Из рисунка 1 б) видно, что на больших расстояниях от диполя поток энергии имеет радиальное направление.

Таким образом, в данном разделе исследовано электрическое поле \vec{E} и магнитное поле \vec{H} вблизи изменяющегося дипольного момента. Показано, что вектор Умова-Пойнтинга \vec{S} , определяющий перенос энергии электромагнитного поля, имеет не только радиальную компоненту. Следовательно, перенос энергии электромагнитного поля в ближней зоне не является излучением. Так же построена картина силовых линий вектора Умова-Пойнтинга, демонстрирующая направление переноса энергии в ближней зоне. Для измерения потока энергии необходимо использовать приборы, отличающиеся от стандартных приборов, измеряющих поток излучения.

В частности для того, чтобы измерить перенос энергии недостаточно измерить только напряженности электрического или магнитного поля, как это обычно делается, поскольку в этом случае $|\vec{H}|$ не равно $|\vec{E}|$, и вектор \vec{E} не перпендикулярен вектору \vec{H} . Для измерения потока энергии в ближней зоне необходимо измерять либо \vec{E} и

\vec{H} отдельно, либо использовать прибор, поглощающий энергию и измеряющий, таким образом величину вектора Умова-Пойнтинга.

4. Поле прецессирующего дипольного момента

Результаты исследования поля магнитного дипольного момента и движения заряженных частиц в этом поле имеют большое практическое значение в астрофизике. Магнитные поля планет и звезд в хорошем приближении можно считать дипольными. Хорошо исследован стационарный случай, когда магнитный момент небесного тела совпадает с осью вращения. В частности, довольно подробно исследовано движение заряженных частиц в поле Земли. Решение уравнений движения в магнитном поле покоящегося диполя дает замкнутые области, в которых могут двигаться заряженные частицы определенного диапазона энергий. Для планет эти области называются радиационными поясами [3].

Также известны тела, у которых направление магнитного момента отличается от направления оси вращения. В этом случае вокруг тела присутствует не только магнитное, но и электрическое поле. Примером таких тел могут служить нейтронные звезды и, в частности, пульсары.

Существуют различные модели формирования электромагнитного поля в окрестности нейтронных звезд [4], в которых предполагается, что тело нейтронной звезды является проводящим. Вращаясь в собственном магнитном поле, проводящее тело генерирует разность потенциалов между полюсами и экватором. Электромагнитное поле такого тела существенно отличается от поля диполя. В то же время существуют небесные тела, состоящие из непроводящего вещества и вращающиеся вокруг оси, не совпадающей с осью магнитного поля. Их магнитное поле хорошо аппроксимируется полем прецессирующего магнитного момента [4].

Цель настоящего раздела – исследовать поток энергии в окрестности прецессирующего диполя.

Исходя из общих формул для магнитного и электрического полей, можно дать характеристику величине и направлению переноса энергии электромагнитного поля, используя вектор Умова-Пойнтинга.

Известно, что на больших расстояниях от источника преобладает поле излучения, т.е. вектор Умова-Пойнтинга сонаправлен радиус-вектору \vec{r} и убывает как $\frac{1}{r^2}$. Если в формулах для $\vec{E}(t)$ и $\vec{H}(t)$ устремить $r \rightarrow \infty$, то действительно получим поле электромагнитной волны:

$$\vec{E}(t) \perp \vec{H}(t) \perp \vec{n}.$$

Таким образом, на больших расстояниях энергия переносится в радиальном направлении от диполя и представляет собой энергию электромагнитного излучения и изменяется обратно пропорционально квадрату расстояния.

Процессы переноса энергии в ближней зоне гораздо сложнее и практически не исследованы. Важность этих процессов обусловлена тем, что если магнитосфера небесного тела заполнена поглощающим веществом, то поле передает веществу часть своего импульса, оказывая давление на вещество. Таким образом, динамика атмосферы, окружающей вращающееся намагниченное тело, может существенно определяться силовыми линиями вектора Умова-Пойнтинга в ближней зоне.

Рассмотрим поле, создаваемое прецессирующим дипольным моментом. Закон движения вектора дипольного момента \vec{m} в декартовой системе координат (x, y, z) зададим в виде:

$$\vec{m} = m(\sin \alpha \cos \omega t, \sin \alpha \sin \omega t, \cos \alpha), \quad (17)$$

где m и ω – модуль и угловая скорость прецессии дипольного момента, α – угол между вектором \vec{m} и осью прецессии. Найдем компоненты вектора Умова-Пойнтинга в сферической системе координат (r, θ, φ) .

Используя формулы для плотности потока электромагнитной энергии (7) и магнитного момента (17), получим:

$$S_r = S_0 \rho \{ \rho^3 \sin^2 \alpha (\sin^2 \tau + \cos^2 \theta \cos^2 \tau) + (1/2 - \rho^2) \sin^2 \alpha \sin 2\tau \sin^2 \theta + \rho \sin^2 \alpha \cos 2\tau \sin \theta + 1/4 \sin 2\alpha \sin \theta (\rho \cos \tau + \sin \tau) \}, \quad (18)$$

$$S_\theta = S_0 \rho \sin \alpha \cos \theta [\sin \alpha \sin \theta (\rho^2 \sin 2\tau - 2\rho \cos 2\tau - \sin 2\tau) - 2 \cos \alpha \cos \theta (\rho \cos \tau + \sin \tau)], \quad (19)$$

$$S_\varphi = S_0 2\rho \sin \alpha [\sin \alpha \sin \theta (\rho^2 \sin^2 \tau - \rho \sin 2\tau + \cos^2 \tau) - \cos \alpha \cos \theta (\rho \sin \tau - \cos \tau)], \quad (20)$$

где $\rho = \frac{r\omega}{c}$, $S_0 = \frac{cm^2}{4\pi r^6}$, $\tau = \omega t - \varphi$.

Вблизи источника поля поток энергии ведет себя довольно сложным образом, так как в любой точке пространства вектор Умова-Пойнтинга представляет собой быстро осциллирующую функцию. Практический интерес представляет средний за период поток энергии. Поэтому полученные результаты в формулах (18) – (20) усредним по времени. Тогда будем иметь стационарную картину для распределения потока энергии поля.

После усреднения получим:

$$\begin{aligned} S_r &= \frac{m^2 \omega^6}{8\pi c^5 \rho^2} \sin^2 \alpha (1 + \cos^2 \theta), \\ S_\theta &= 0, \\ S_\varphi &= \frac{m^2 \omega^6}{4\pi c^5 \rho^5} \sin^2 \alpha \sin \theta (\rho^2 + 1). \end{aligned} \quad (21)$$

Проверим, что при $r \rightarrow \infty$ формулы (21) дают известное выражение для интенсивности дипольного излучения. Количество энергии, испускаемое в единицу времени в единицу телесного угла Ω , вычисляется по формуле [1]:

$$\frac{dI}{d\Omega} = \frac{1}{4\pi c^3} (\ddot{\vec{m}} \times \vec{n})^2. \quad (22)$$

Подставляя \vec{m} из (17) в (22) и усредняя по времени, получим:

$$\frac{dI}{d\Omega} = \frac{m^2 \omega^4}{8\pi c^3} \sin^2 \alpha (1 + \cos^2 \theta). \quad (23)$$

С другой стороны, найдем интенсивность излучения через предел вектора Умова-Пойнтинга при $r \rightarrow \infty$. Из формул (21) видно, что в этом пределе остается только радиальная компонента вектора: $\vec{S}_\infty = \vec{S}|_{r \rightarrow \infty} \equiv \vec{S}_r$. Учитывая, что $\rho = \frac{r\omega}{c}$, получим:

$$\vec{S}_\infty = \frac{m^2 \omega^4}{8\pi r^2 c^3} \sin^2 \alpha (1 + \cos^2 \theta). \quad (24)$$

Подставим полученное выражение в формулу для интенсивности излучения $dI = Pr^2 d\Omega$, снова получим формулу (23). Таким образом, формулы (21), определяющие вектор \vec{S} на любом расстоянии от диполя, дают правильный результат в пределе $r \rightarrow \infty$.

Из формул (21) следует, что в области $\rho \ll 1$ преобладает азимутальная компонента вектора Умова-Пойнтинга, а при $\rho \gg 1$ – радиальная. Построим силовые линии вектора \vec{S} . Из того, что $S_\theta = 0$, следует, что силовая линия, проходящая через любую точку пространства, лежит на поверхности конуса с вершиной в начале координат и включающего данную точку. Ось конуса направлена по оси oz . Построим проекцию силовой линии на плоскость xy (рис. 2). Запишем уравнение силовой линии в полярных координатах R и φ , где R – расстояние от начала координат, φ – угол, отсчитываемый от оси ox . Координата R является проекцией радиус-вектора на плоскость xy : $R = r \sin \theta$.

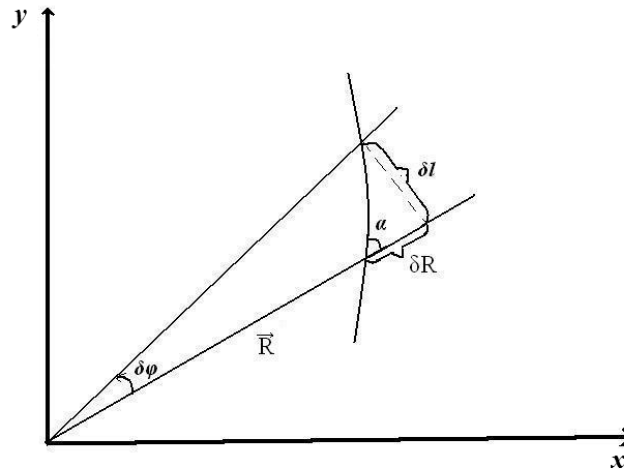


Рис. 2. Наклон силовых линий к радиус-вектору \vec{r}

Из рисунка 2 видно, что для угла α справедливо соотношение:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\delta l}{\delta R} = \frac{R \delta \varphi}{\delta R}. \quad (25)$$

С другой стороны:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{S_\varphi^{xy}}{S_r^{xy}}, \quad (26)$$

где S_φ^{xy} и S_r^{xy} – проекции компонент S_φ и S_r на плоскость xy :

$$\begin{aligned} S_\varphi^{xy} &= P_\varphi, \\ S_r^{xy} &= P_r \sin \theta. \end{aligned} \quad (27)$$

Приравнявая (25) и (26) и используя систему (21), получаем дифференциальное уравнение силовой линии вектора \vec{S} :

$$\frac{d\varphi}{d\rho} = \frac{2(1 + \rho^2)}{\rho^4(1 + \cos^2 \theta)}. \quad (28)$$

Решая дифференциальное уравнение (28) относительно угла φ , получим уравнение проекции силовой линии вектора Умова-Пойнтинга на плоскость xu :

$$\varphi = -\frac{2}{(1 + \cos^2 \theta)} \left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{3\rho^3} \right) + \varphi_0. \quad (29)$$

Здесь φ_0 – постоянная интегрирования. Разным значениям φ_0 соответствуют разные силовые линии. Как видно из уравнения (29), при заданном угле θ одна силовая линия отличается от другой только поворотом вокруг оси z .

На рисунке 3 показана проекция одной силовой линии на плоскость xu в координатах (φ, ρ) для различных значений ρ .

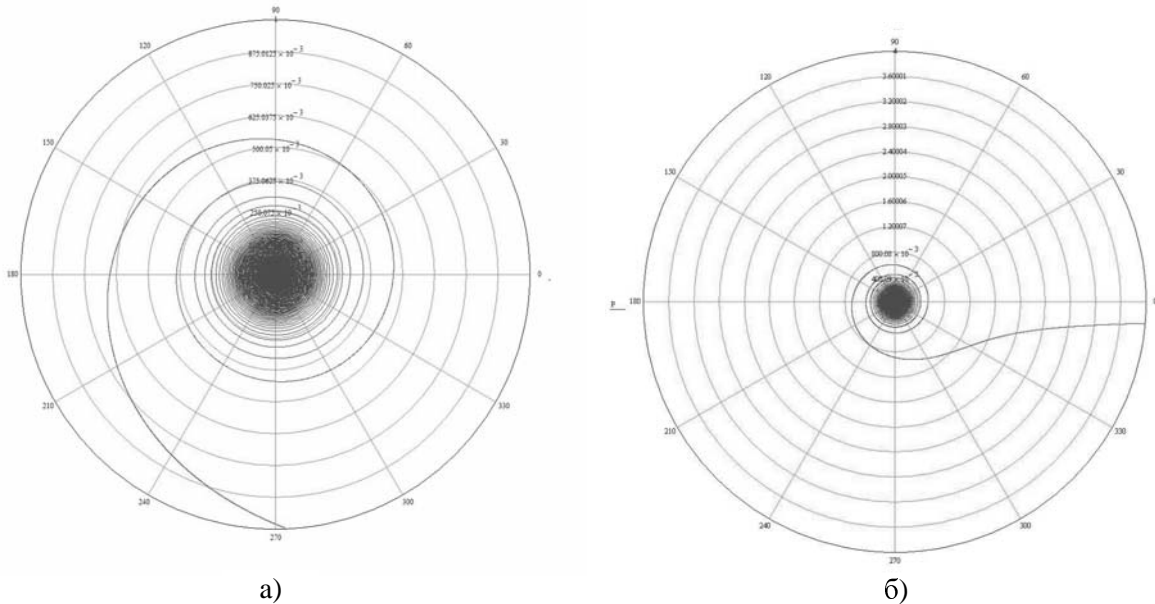


Рис. 3. Картина силовых линий при $\theta = \pi/6$: а) $\rho \in [0,1]$; б) $\rho \in [0,4]$

Таким образом, силовая линия вектора \vec{S} представляет собой спираль, навитую на конус с вершиной в начале координат и осью, совпадающей с осью Ox . В области малых ρ шаг спирали мал и силовая линия близка к окружности. С ростом ρ шаг спирали увеличивается и при $\rho \gg 1$ силовая линия асимптотически приближается к лучу, исходящему из начала координат. Сравнивая графики для разных θ , нужно помнить, что они построены в координатах (φ, ρ) , в то время, как физически радиальной координатой является расстояние R от оси z

$$\rho = \frac{\omega R}{c \sin \theta}. \quad (30)$$

Другими словами, графики построены с масштабным фактором $\frac{\omega}{c} \sin \theta$. Величина ρ является безразмерным расстоянием от начала координат вдоль образующей конуса, на который навивается силовая линия. Рассмотрим зависимость шага спирали

от расстояния ρ . В области $\rho \ll 1$ шаг спирали λ много меньше ρ , поэтому в формуле (28), которую мы теперь запишем в виде

$$d\varphi = 2 \left(\frac{c}{\omega R} \right)^3 \frac{\sin \theta (\sin^2 \theta + \omega^2 R^2 / c^2)}{1 + \cos^2 \theta} dR, \quad (31)$$

можно положить $d\varphi \approx 2\pi$, $dR \approx \lambda$. Тогда

$$\lambda = \pi R \left(\frac{\omega R}{c} \right)^3 \frac{1 + \cos^2 \theta}{\sin \theta (\sin^2 \theta + \omega^2 R^2 / c^2)}. \quad (32)$$

Из (32) видно, что при $R \ll c/\omega$ шаг спирали растет как R^4 . С уменьшением угла θ шаг спирали так же растет, и при $\theta \rightarrow 0$ он стремится к бесконечности – спираль вырождается в прямую, совпадающую с осью z . Это следует так же из формул (21), которые для $\theta = 0$ составляют только радиальную компоненту вектора Умова-

Пойнтинга: $P_r = \frac{\mu \sin^2 \alpha}{\rho^2}$, $P_\theta = 0$, $P_\varphi = 0$.

5. Заключение

Таким образом, в работе дана характеристика величины и направления переноса энергии электромагнитного поля произвольно изменяющегося электрического или магнитного дипольного момента. Показано, что выражение для вектора Умова-Пойнтинга имеет одинаковый вид для дипольного электрического и дипольного магнитного моментов. В ближней зоне направление вектора потока энергии электромагнитного поля диполя может существенно отличаться от радиального направления. Тем не менее, усредненный по времени вектор Умова-Пойнтинга направлен радиально от дипольного момента и совпадет со своим асимптотическим значением на бесконечности. Это свойство является, в определенном смысле, следствием закона сохранения энергии – количество энергии, перенесенное через замкнутую поверхность, окружающую источник излучения, за все время не зависит от формы и размеров этой поверхности, если источник поля покоится. Наглядное представление о процессах переноса энергии поля в ближней зоне дают картины силовых линий вектора Умова-Пойнтинга.

Примечания:

1. Терлецкий Я.П. Электродинамика. М.: Высш. шк., 1990. 129 с.
2. Ландау Л.Д. Теория поля. М.: Наука, 1988. 231 с.
3. Россер У. Радиационные пояса земли // Успехи физических наук. 1965. Т. 85, вып. 1. С. 147-177.
4. Michel F.C. Theory of Neutron Star Magnetospheres. L.: Chikago Press, 1991. 287 p.

References:

1. Terletskiy Ya.P. Electrodynamics. M.: Vyssh. shk., 1990. 129 p.
2. Landau L.D. Field theory. M.: Nauka, 1988. 231 p.
3. Rosser W. Earth radiation belts // Physical sciences achivements. 1965. Vol. 85, Iss. 1. P. 147-177.
4. Michel F.C. Theory of Neutron Star Magnetospheres. L.: Chikago Press, 1991. 287 p.