МАТЕМАТИКА

MATHEMATICS

УДК 517.2/.3
ББК 22.161.1
Ш 65

Шишкин А.Б.
Доктор физико-математических наук, профессор кафедры математики, информатики и методик их преподавания факультета математики, информатики и технологии Славянского-на-Кубани государственного педагогического института, тел. 89897601384, e-mail: shishkin-home@mail.ru

Интегрирование на ориентированном множестве по проекции

(Рецензирована)

Аннотация
Изложены основы конструктивной теории интегрирования по проекции на частично ориентированных множествах в пространстве $\mathbf{R}^n$.
Ключевые слова: *интергирование по проекции, ориентированные множества, ранг, ячейки, домен, счетная аддитивность меры по проекции.*

Shishkin A.B.
Doctor of Physics and Mathematics, Professor of Department of Mathematics, Informatics and Techniques of Their Teaching, Faculty of Mathematics, Informatics and Technology, Slavyansk-on-Kuban State Pedagogical Institute, ph. 89897601384, e-mail: shishkin-home@mail.ru

Integration on the focused set on a projection

Abstract
The paper contains bases of constructive theory of integration on a projection on to the partially oriented set in space $\mathbf{R}^n$.
Keywords: *integration on the projections, the focused sets, a rank, cells, the domain, calculating additivity of a measure on a projection.*

Мера ориентированного множества по проекции. Выберем натуральное число ν и рассмотрим покрытие пространства $\mathbf{R}^n := \{x := (x_1,\dots,x_n): x_j \in \mathbf{R}\}$ счетной системой n-мерных кубов

$$\delta_{k_1,\dots,k_n} := \{x\colon 2^{-\nu}k_j \le x_j \le 2^{-\nu}(k_j+1)\},\ k_1,\dots,k_n \in \mathbf{Z}$$

с длиной ребра $2^{-\nu}$. Отмечая зависимость этого покрытия от числа ν, называем его *каноническим покрытием ранга* ν, а его элементы δ называем *ячейками ранга* ν.

Объединения конечных совокупностей ячеек ранга ν называем *элементарными множествами ранга* ν. Пустое множество $\varnothing$ тоже считаем элементарным множеством ранга ν.

Если e – элементарное множество ранга ν, m – общее количество ячеек ранга ν, составляющих множество e, то число $v(e) := 2^{-\nu n}m$ называется (n-мерным) *объемом* множества e.

Пусть $k \in \mathbf{N}$ и $k \le n$. Проекцию $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^k\colon x \to x' := (x_1,\dots,x_k)$ обозначаем π. Проекция π отображает всякое элементарное множество $e \subset \mathbf{R}^n$ ранга ν на элементарное множество $\pi e \subset \mathbf{R}^k$ ранга ν. Связное элементарное множество $d \subset \mathbf{R}^n$ ранга ν называем *доменом ранга* ν, если оно проецируется в одну ячейку $\delta' \subset \mathbf{R}^k$.

Проекция домена $d \subset \mathbf{R}^n$ ранга ν имеет k-мерный объем $v(\pi d) = 2^{-\nu k}$. Всякое элементарное множество составлено из конечного числа отдельных доменов. Если m – общее количество доменов ранга ν, составляющих элементарное множество e, то число $v^{\pi}(e) := 2^{-\nu k} m$ называется *объемом* множества e по проекции π.

Символом Σ^k обозначим совокупность всех ограниченных частично ориентированных множеств $E \subseteq \mathbf{R}^n$ размерности k (см. [1]). Отношение ориентирования на множестве E индуцирует отношение ориентирования на любом его подмножестве. Значит, любое подмножество частично ориентированного множества $E \in \Sigma^k$ само является элементом совокупности Σ^k. Совокупность всех ориентированных таким образом подмножеств множества $E \in \Sigma^k$ обозначается $\Sigma^k(E)$. Пространство $\mathbf{R}^k$ наделяем отношением естественного ориентирования. Это означает, что любая ячейка $\delta' \subset \mathbf{R}^k$ ранга ν и каждое элементарное множество $e' \subset \mathbf{R}^k$ ранга ν являются ориентированными множествами, то есть принадлежат $\Sigma^k(\mathbf{R}^k)$.

Пусть $E \in \sum^k$ – объединение всех ячеек ранга ν, пересекающихся с множеством E. Домен $d \subset \mathbf{R}^n$ называем *положительным* (соотв. *отрицательным*), если он обладает свойством: отображение $\pi\colon d \cap E \to \delta'$ является изоморфизмом (соотв. антиизоморфизмом) ориентированных пространств. Положительный (соотв. отрицательный) домен $d \subset \mathbf{R}^n$ называем *минимальным*, если всякий «меньший» домен $\tilde{d} \subset d$ не является положительным (соотв. отрицательным). Объединение всех минимальных положительных (соотв. отрицательных) доменов $d \subset \mathbf{R}^n$ обозначим p_ν^E (соотв. n_ν^E).

Придавая ν всевозможные натуральные значения, получаем три числовые последовательности

$$\{v^{\pi}(p_\nu^E)\}_{\nu=1}^{\infty},\ \{v^{\pi}(n_\nu^E)\}_{\nu=1}^{\infty},\ \{v^{\pi}(e_\nu^E)\}_{\nu=1}^{\infty}.$$

Первые две последовательности не убывают, а третья последовательность не возрастает. Кроме того, для любых ν, $\nu' \in \mathbf{N}$ справедливо неравенство

$$v^{\pi}(p_\nu^E) + v^{\pi}(n_\nu^E) \le v^{\pi}(e_{\nu'}^E).$$

По теореме о пределах монотонных последовательностей существуют пределы

$$\mu_+^{\pi}(E) := \lim_{\nu\to\infty} v^{\pi}(p_\nu^E) = \sup_\nu v^{\pi}(p_\nu^E),$$

$$\mu_-^{\pi}(E) := \lim_{\nu\to\infty} v^{\pi}(n_\nu^E) = \sup_\nu v^{\pi}(n_\nu^E),$$

$$\left|\mu^{\pi}\right|(E) := \lim_{\nu\to\infty} v^{\pi}(e_\nu^E) = \inf_\nu v^{\pi}(e_\nu^E).$$

При этом $0 \le \mu_+^{\pi}(E) + \mu_-^{\pi}(E) \le \left|\mu^{\pi}\right|(E)$. Если $\mu_+^{\pi}(E) + \mu_-^{\pi}(E) = \left|\mu^{\pi}\right|(E)$, то говорим, что частично ориентированное множество E *измеримо* по проекции π. При этом число $\mu^{\pi}(E) := \mu_+^{\pi}(E) - \mu_-^{\pi}(E)$ называем *мерой* E по проекции π, а неотрицательное число $\left|\mu^{\pi}\right|(E) = \mu_+^{\pi}(E) + \mu_-^{\pi}(E)$ называем *полной вариацией* меры E по проекции π.

Совокупность всех множеств $E \in \Sigma^k$, измеримых по проекции π, обозначаем Σ^π. Если $E \in \Sigma^\pi$, то символом $\Sigma^\pi(E)$ обозначаем совокупность всех подмножеств E, принадлежащих Σ^π.

Функция множества $\left|\mu^\pi\right|$ определена на совокупности Σ^k и обладает свойством *полуаддитивности*:

Свойство 1. Если $E_1, E_2 \in \Sigma^k(E)$ и $E \subseteq E_1 \cup E_2$, то $\left|\mu^\pi\right|(E) \le \left|\mu^\pi\right|(E_1) + \left|\mu^\pi\right|(E_2)$.

Доказательство. Из очевидного соотношения $e_\nu^E \subseteq e_\nu^{E_1} \cup e_\nu^{E_2}$ вытекает неравенство $\nu^\pi(e_\nu^E) \le \nu^\pi(e_\nu^{E_1}) + \nu^\pi(e_\nu^{E_2})$. Переходя в этом неравенстве к пределу при $\nu \to \infty$, получаем требуемое неравенство.

Функции множества μ_+^π, μ_-^π определены на совокупности Σ^π и обладают свойством *аддитивности*:

Свойство 2. Если $E_1, E_2 \in \Sigma^\pi(E)$, $E = E_1 \cup E_2$ и при этом $E_1 \cap E_2 = \varnothing$, то справедливы равенства $\mu_+^\pi(E) = \mu_+^\pi(E_1) + \mu_+^\pi(E_2)$ и $\mu_-^\pi(E) = \mu_-^\pi(E_1) + \mu_-^\pi(E_2)$.

Доказательство. Действительно, из очевидных соотношений $p_\nu^E \supseteq p_\nu^{E_1} \cup p_\nu^{E_2}$, $n_\nu^E \supseteq n_\nu^{E_1} \cup n_\nu^{E_2}$ вытекает, что $\nu^\pi(p_\nu^E) \ge \nu^\pi(p_\nu^{E_1}) + \nu^\pi(p_\nu^{E_2})$, $\nu^\pi(n_\nu^E) \ge \nu^\pi(n_\nu^{E_1}) + \nu^\pi(n_\nu^{E_2})$. Переходя в последних неравенствах к пределу при $\nu \to \infty$, получаем

$$\mu_+^\pi(E) \ge \mu_+^\pi(E_1) + \mu_+^\pi(E_2), \qquad \mu_-^\pi(E) \ge \mu_-^\pi(E_1) + \mu_-^\pi(E_2).$$

С другой стороны, $\nu^\pi(e_\nu^E) \le \nu^\pi(e_\nu^{E_1}) + \nu^\pi(e_\nu^{E_2})$, значит

$$\nu^\pi(e_\nu^E) - \nu^\pi(p_\nu^E) \le [\nu^\pi(e_\nu^{E_1}) - \nu^\pi(p_\nu^{E_1})] + [\nu^\pi(e_\nu^{E_2}) - \nu^\pi(p_\nu^{E_2})],$$

$$\nu^\pi(e_\nu^E) - \nu^\pi(n_\nu^E) \le [\nu^\pi(e_\nu^{E_1}) - \nu^\pi(n_\nu^{E_1})] + [\nu^\pi(e_\nu^{E_2}) - \nu^\pi(n_\nu^{E_2})].$$

Переходя в последних двух неравенствах к пределу при $\nu \to \infty$, получаем

$$\mu_-^\pi(E) \le \mu_-^\pi(E_1) + \mu_-^\pi(E_2), \qquad \mu_+^\pi(E) \le \mu_+^\pi(E_1) + \mu_+^\pi(E_2).$$

Аддитивность функций μ_+^π, μ_-^π влечет аддитивность функций μ^π, $\left|\mu^\pi\right|$. Заметим, что аддитивные функции множества часто называются *мерами*.

Если $k = n$, то говорим не об измеримости ориентированного множества по проекции и не о его мере по проекции, а об измеримости ориентированного множества и об его мере соответственно. При этом вместо символов μ_+^π, μ_-^π, μ^π, $\left|\mu^\pi\right|$, Σ^k, Σ^π используются символы μ_+, μ_-, μ, $|\mu|$, Σ^n, Σ.

Если $k = n$ и отношение ориентирования на множестве $E \subseteq \mathbf{R}^n$ индуцировано из $\mathbf{R}^n$, то пишем $E \in \Sigma^n(\mathbf{R}^n)$. При этом $\mu_-(E) = 0$; мера $\mu_*(E) := \mu_+(E)$ совпадает с внутренней (нижней) мерой множества E по Жордану; мера $\mu^*(E) := |\mu|(E)$ совпадает с внешней (верхней) мерой множества E по Жордану; условие измеримости множества E принимает классический вид $\mu_*(E) = \mu^*(E)$.

Если множество $E \in \Sigma^n(\mathbf{R}^n)$ является измеримым, то пишем $E \in \Sigma(\mathbf{R}^n)$.

Общее значение мер $\mu_*(E), \mu^*(E)$ совпадает с мерой Жордана множества E и обозначается $\mu(E)$.

Критерий измеримости по проекции. Пусть $E \in \Sigma^k$ и $\nu \in \mathbf{N}$. Символом z_ν^E обозначим объединение всех доменов элементарного множества e_ν^E, которые не входят ни в p_ν^E ни в n_ν^E. Пересечение $\bigcap_{\nu=1}^{\infty} z_\nu^E$ обозначаем символом E_0 и называем *границей ориентирования* множества E по проекции π. Если $E_+ := \bigcup_{\nu=1}^{\infty} p_\nu^E$, $E_- := \bigcup_{\nu=1}^{\infty} n_\nu^E$, то, как легко заметить, $E \setminus (E_+ \cup E_-) \subseteq E_0$. Существует простое необходимое и достаточное условие измеримости E по проекции π в терминах границы ориентирования множества E.

Теорема 1. Частично ориентированное множество $E \in \Sigma^k$ принадлежит Σ^π тогда и только тогда, когда $E_0 \in \Sigma^\pi$ и $\left|\mu^\pi\right|(E_0) = 0$.

Доказательство. Пусть $E \in \Sigma^\pi$ и $\nu \in \mathbf{N}$. Рассмотрим четыре элементарных множества p_ν^E, n_ν^E, z_ν^E, e_ν^E ранга ν. Эти множества дизъюнктны (то есть их внутренности не пересекаются) и связаны очевидным соотношением $e_\nu^E = p_\nu^E \cup n_\nu^E \cup z_\nu^E$. Значит

$$v^\pi\left(e_\nu^E\right) = v^\pi(p_\nu^E) + v^\pi(n_\nu^E) + v^\pi(z_\nu^E).$$

Переходя в последнем равенстве к пределу при $\nu \to \infty$, получим $\left|\mu^\pi\right|(E) = \mu_+^\pi(E) + \mu_-^\pi(E) + \left|\mu^\pi\right|(E_0)$, значит $\left|\mu^\pi\right|(E_0) = 0$. При этом $\mu_+^\pi(E_0) \le \left|\mu^\pi\right|(E_0)$ и $\mu_-^\pi(E_0) \le \left|\mu^\pi\right|(E_0)$, значит $\mu_+^\pi(E_0) = \mu_-^\pi(E_0) = 0$. Следовательно,

$$\mu_+^\pi(E_0) + \mu_-^\pi(E_0) = \left|\mu^\pi\right|(E_0).$$

Это означает, что $E_0 \in \Sigma^\pi$.

Обратно. Пусть $E \in \Sigma^k$, $E_0 \in \Sigma^\pi$ и $\left|\mu^\pi\right|(E_0) = 0$. Переходя в равенстве $v^\pi\left(e_\nu^E\right) = v^\pi(p_\nu^E) + v^\pi(n_\nu^E) + v^\pi(z_\nu^E)$ к пределу при $\nu \to \infty$, получаем

$$\left|\mu^\pi\right|(E) = \mu_+^\pi(E) + \mu_-^\pi(E) + 0,$$

то есть $E \in \Sigma^\pi$.

Из доказанного критерия вытекает, что *совокупность* $\Sigma^\pi(E)$ *замкнута относительно основных теоретико-множественных операций*. Убедимся в этом.

Во-первых, если $A, B \in \Sigma^\pi(E)$, то $A \setminus B \in \Sigma^\pi(E)$. Действительно, выберем произвольную точку $x \in (A \setminus B)_0$ и для любого натурального ν обозначим d_ν какой-либо домен элементарного множества $z_\nu^{A \setminus B}$, содержащий точку x. Если все домены d_ν пересекаются с B, то $x \in B_0$. Если какой-либо из этих доменов d_ν не пересекается с B, то $x \in A_0$. Следовательно, $(A \setminus B)_0 \subseteq A_0 \cup B_0$. На основании полуаддитивности функции множества $\left|\mu^\pi\right|$ заключаем, что $|\mu^\pi|\left((A \setminus B)_0\right) = 0$. Следовательно $A \setminus B \in \Sigma^\pi(E)$.

Во-вторых, пусть $A, B \in \Sigma^\pi(E)$. Выберем произвольную точку $x \in (A \cup B)_0$ и для любого натурального ν обозначим d_ν какой-либо домен элементарного множества $z_\nu^{A\cup B}$, содержащий точку x. Если все домены d_ν пересекаются с A, то $x\in A_0$. Если какой-либо из этих доменов d_ν не пересекается с A, то $x\in B_0$. Следовательно, $(A\cup B)_0\subseteq A_0\cup B_0$. На основании полуаддитивности функции множества $\left|\mu^\pi\right|$ заключаем, что $|\mu^\pi|\big((A\cup B)_0\big)=0$. Это означает, что $A\cup B\in\Sigma^\pi(E)$.

В-третьих, если $A,B\in\Sigma^\pi(E)$, то из соотношения $A\cap B=E\setminus[\big(E\setminus A\big)\cup\big(E\setminus B\big)]$ вытекает, что $A\cap B\in\Sigma^\pi(E)$.

Счетная аддитивность меры по проекции. Меры μ_+^π, μ_-^π обладают свойством *счетной аддитивности*:

Свойство 3. Если $A,A_1,A_2,\ldots\in\Sigma^\pi(E)$, $A=\bigcup_{j=1}^\infty A_j$ и множества $A_1,A_2,\ldots$ попарно не пересекаются, то $\mu_+^\pi(A)=\sum_{j=1}^\infty\mu_+^\pi(A_j)$ и $\mu_-^\pi(A)=\sum_{j=1}^\infty\mu_-^\pi(A_j)$.

Доказательство. Пусть натуральные $\nu(\varepsilon)$ и $\nu(j,\varepsilon)$ подобраны так, что выполняются неравенства

$$v^\pi(p_{\nu(\varepsilon)}^E)\ge\mu_+^\pi(E)-\varepsilon,\ v^\pi(n_{\nu(\varepsilon)}^E)\ge\mu_-^\pi(E)-\varepsilon,$$

$$v^\pi(p_{\nu(j,\varepsilon)}^{E_j})\ge\mu_+^\pi(E_j)-\frac{\varepsilon}{2^j},\ v^\pi(n_{\nu(j,\varepsilon)}^{E_j})\ge\mu_-^\pi(E_j)-\frac{\varepsilon}{2^j},$$

$$v^\pi(e_{\nu(j,\varepsilon)}^{E_j})\le|\mu^\pi|(E_j)+\frac{\varepsilon}{2^j},\ \nu(\varepsilon)\le\nu(j,\varepsilon)\le\nu(j+1,\varepsilon).$$

Компакт $\overline{E}$ покрывается открытыми множествами $\operatorname{int}e_{\nu(j,\varepsilon)}^{E_j}$, $j\in\mathbf{N}$. Значит, найдется натуральное $N\ge\nu(\varepsilon)$ такое, что $p_{\nu(N,\varepsilon)}^E\cup n_{\nu(N,\varepsilon)}^E\subseteq E\subseteq\bigcup_{j=1}^N e_{\nu(j,\varepsilon)}^{E_j}$. При этом

$$p_{\nu(N,\varepsilon)}^E\supseteq\bigcup_{j=1}^N p_{\nu(j,\varepsilon)}^{E_j},n_{\nu(N,\varepsilon)}^E\supseteq\bigcup_{j=1}^N n_{\nu(j,\varepsilon)}^{E_j}.$$

Следовательно,

$$v^\pi(p_{\nu(N,\varepsilon)}^E)+v^\pi(n_{\nu(N,\varepsilon)}^E)\le\sum\nolimits_{j=1}^N v^\pi(e_{\nu(j,\varepsilon)}^{E_j}),$$

$$v^\pi(p_{\nu(N,\varepsilon)}^E)\ge\sum\nolimits_{j=1}^N v(p_{\nu(j,\varepsilon)}^{E_j}),\ v(n_{\nu(N,\varepsilon)}^E)\ge\sum\nolimits_{j=1}^N v(n_{\nu(j,\varepsilon)}^{E_j}).$$

Из этих неравенств вытекает, что

$$v^\pi(p_{\nu(\varepsilon)}^E)\le v^\pi(p_{\nu(N,\varepsilon)}^E)\le\sum\nolimits_{j=1}^\infty[v^\pi(e_{\nu(j,\varepsilon)}^{E_j})-v^\pi(n_{\nu(j,\varepsilon)}^{E_j})],$$

$$v^\pi(n_{\nu(\varepsilon)}^E)\le v^\pi(n_{\nu(N,\varepsilon)}^E)\le\sum\nolimits_{j=1}^\infty[v^\pi(e_{\nu(j,\varepsilon)}^{E_j})-v^\pi(p_{\nu(j,\varepsilon)}^{E_j})].$$

Значит $\mu_+^\pi(E)\le\sum_{j=1}^\infty\mu_+^\pi(E_j)+3\varepsilon,\ \mu_-^\pi(E)\le\sum_{j=1}^\infty\mu_-^\pi(E_j)+3\varepsilon$. Отсюда в силу произвольности ε вытекают неравенства $\mu_+^\pi(E)\le\sum_{j=1}^\infty\mu_+^\pi(E_j),\ \mu_-^\pi(E)\le\sum_{j=1}^\infty\mu_-^\pi(E_j)$.

С другой стороны, в силу аддитивности мер μ_+^π, μ_-^π для любого натурального N справедливы неравенства $\mu_+^\pi\big(E\big)\ge\sum_{j=1}^N\mu_+^\pi(E_j),\ \mu_-^\pi\big(E\big)\ge\sum_{j=1}^N\mu_-^\pi(E_j)$. Это означает, что ряды $\sum_{j=1}^\infty\mu_+^\pi(E_j)$, $\sum_{j=1}^\infty\mu_-^\pi(E_j)$ сходятся и при этом $\mu_+^\pi\big(E\big)\ge\sum_{j=1}^\infty\mu_+^\pi(E_j)$,

$\mu_-^\pi(E) \geq \sum_{j=1}^\infty \mu_-^\pi(E_j)$.

Счетная аддитивность мер μ_+^π, μ_-^π влечет счетную аддитивность мер μ^π, $\left|\mu^\pi\right|$.

Интеграл по проекции. Пусть на множестве $E \in \Sigma^\pi$ определена ограниченная действительная функция f. Элементарные множества p_ν^E и n_ν^E состоят из конечной совокупности доменов $d \subset \mathbf{R}^n$ ранга ν. Каждый из этих доменов проецируется на отдельную ячейку $\delta' \subset \mathbf{R}^k$ ранга ν. Напомним, что k-мерный объем ячейки δ' равен $2^{-\nu k}$. Пусть

$$m_d := \inf_{d \cap E} f,\; M_d := \sup_{d \cap E} f,$$

$$\sigma_\nu^{\min} := \sum_{d \subseteq p_\nu^E} 2^{-\nu k} m_d - \sum_{d \subseteq n_\nu^E} 2^{-\nu k} M_d,$$

$$\sigma_\nu^{\max} := \sum_{d \subseteq p_\nu^E} 2^{-\nu k} M_d - \sum_{d \subseteq n_\nu^E} 2^{-\nu k} m_d.$$

Укажем два очевидных свойства сумм $\sigma_\nu^{\min}$ и $\sigma_\nu^{\max}$: последовательность $\{\sigma_\nu^{\min}\}_{\nu=1}^\infty$ не убывает, а последовательность $\{\sigma_\nu^{\max}\}_{\nu=1}^\infty$ не возрастает; если $\nu, \nu' \in \mathbf{N}$ и $\nu'' = \max\{\nu, \nu'\}$, то $\sigma_\nu^{\min} \leq \sigma_{\nu''}^{\min} \leq \sigma_{\nu''}^{\max} \leq \sigma_{\nu'}^{\max}$. Из этих свойств вытекает, что последовательности $\{\sigma_\nu^{\min}\}_{\nu=1}^\infty$ и $\{\sigma_\nu^{\max}\}_{\nu=1}^\infty$ являются сходящимися. При этом

$$I_* := \lim_{\nu \to \infty} \sigma_\nu^{\min} = \sup_\nu \sigma_\nu^{\min},\quad I^* := \lim_{\nu \to \infty} \sigma_\nu^{\max} = \sup_\nu \sigma_\nu^{\max}.$$

Число I_* называется *нижним интегралом* функции f по множеству E по проекции π, а число I^* называется *верхним интегралом* функции f по множеству E по проекции π. Если $I_* = I^*$, то функцию f называют *интегрируемой* на множестве E по проекции π, а число $I := I_* = I^*$ называют *интегралом* функции f по множеству E по проекции π и обозначают $\int_E f(x)dx'$.

Легко увидеть, что интегрируемость функции f на множестве E по проекции π равносильна условию

$$\sigma_\nu^{\max} - \sigma_\nu^{\min} = \sum_{d \subseteq p_\nu^E \cup n_\nu^E} 2^{-\nu k}(M_d - m_d) \to 0$$

при $\nu \to \infty$. Множество E является измеримым по проекции π, значит $|\mu^\pi|(E_0) = 0$. Следовательно $\nu^\pi(z_\nu^E) \to 0$ при $\nu \to \infty$. Отсюда вытекает, что

$$\sum_{d \subseteq z_\nu^E} 2^{-\nu k}(M_d - m_d) \leq (M - m)\nu^\pi(z_\nu^E) \to 0$$

при $\nu \to \infty$, где $M := \sup_E f$, $m := \inf_E f$. Это означает, что интегрируемость функции f на множестве E по проекции π равносильна условию

$$\Delta\sigma_\nu := \sum_{d \subseteq e_\nu^E} 2^{-\nu k}(M_d - m_d) \to 0 \;\; \text{при}\; \nu \to \infty.$$

Пару последовательностей $\left\{p_\nu'\right\}_{\nu=1}^\infty$, $\left\{n_\nu'\right\}_{\nu=1}^\infty$ подмножеств $\mathbf{R}^n$ будем называть *парой*, *исчерпывающей* множество E по проекции π, если она удовлетворяет следующим условиям:

1) всякий домен множества p_ν' является доменом множества p_ν^E, а всякий домен множества n_ν' является доменом множества n_ν^E;

2) $\lim_{\nu\to\infty} v^\pi(p_\nu') = \mu_+^\pi(E)$, $\lim_{\nu\to\infty} v^\pi(n_\nu') = \mu_-^\pi(E)$.

Пара последовательностей $\left\{p_\nu^E\right\}_{\nu=1}^\infty$, $\left\{n_\nu^E\right\}_{\nu=1}^\infty$ является примером пары, исчерпывающей множество E по проекции π.

Выберем произвольную пару $\left\{p_\nu'\right\}_{\nu=1}^\infty$, $\left\{n_\nu'\right\}_{\nu=1}^\infty$, исчерпывающую множество E. Пусть

$$(\sigma_\nu^{\min})' := \sum_{d\subseteq p_\nu'} 2^{-\nu k} m_d - \sum_{d\subseteq n_\nu'} 2^{-\nu k} M_d,$$

$$(\sigma_\nu^{\max})' := \sum_{d\subseteq p_\nu'} 2^{-\nu k} M_d - \sum_{d\subseteq n_\nu'} 2^{-\nu k} m_d.$$

Легко убедиться, что

$$\sigma_\nu^{\min} - (\sigma_\nu^{\min})', \sigma_\nu^{\max} - (\sigma_\nu^{\max})' \le M[v^\pi(p_\nu^E) - v^\pi(p_\nu')] - m[v^\pi(n_\nu^E) - v^\pi(n_\nu')],$$

где $m := \inf_E f$, $M := \sup_E |f|$. Следовательно,

$$\lim_{\nu\to\infty}(\sigma_\nu^{\min} - (\sigma_\nu^{\min})') = \lim_{\nu\to\infty}(\sigma_\nu^{\max} - (\sigma_\nu^{\max})') = 0.$$

Это означает, что при определении интеграла $\int_E f(x)dx'$ можно заменить последовательности $\left\{p_\nu^E\right\}_{\nu=1}^\infty$, $\left\{n_\nu^E\right\}_{\nu=1}^\infty$ произвольной парой, исчерпывающей множество E.

Если $k = n$, то говорим не об интегрируемости на E (интеграле по E) по проекции π, а об интегрируемости на E (интеграле по E). При этом вместо символа $\int_E f(x)dx'$ используем символ $\int_E f(x)dx$. Если $E \in \Sigma(\mathbf{R}^n)$, то вместо интегрируемости (интеграла) на измеримом ориентированном множестве говорим об интегрируемости (интеграле) на измеримом множестве. В последнем случае понятия интегрируемости и интеграла эквивалентны аналогичным понятиям по Риману.

Критерий интегрируемости по проекции. Пусть $E \in \Sigma^\pi$. Множество $e_0 \subseteq E$ называем *нуль-множеством* по проекции π, если для любого $\varepsilon > 0$ существуют измеримые множества $e_1, e_2, \ldots \in \Sigma(\mathbf{R}^n)$, удовлетворяющие условиям:

1) множества $e_1, e_2, \ldots$ покрывают множество e_0, то есть $e_0 \subseteq \bigcup_{k=1}^\infty e_k$;

2) ряд $\sum_{k=1}^\infty \mu(\pi e_k)$ сходится и его сумма меньше ε.

Легко убедиться в справедливости следующих утверждений: конечные и счетные множества являются нуль-множествами по проекции π; любое подмножество нуль-множества по проекции π является нуль-множеством по проекции π; измеримое множество, имеющее нулевую вариацию меры по проекции π, является нуль-множеством по проекции π; объединение счетной совокупности нуль-множеств по проекции π является нуль-множеством по проекции π.

Говорим, что функция f, определенная на множестве E, *непрерывна почти всюду на* E по проекции π, если точки разрыва этой функции образуют нульмножество по проекции π.

Теорема 2. Для того чтобы ограниченная на множестве $E \in \Sigma^{\pi}$ функция f была интегрируема на нем по проекции π, необходимо и достаточно, чтобы f была непрерывна почти всюду на E по проекции π.

Доказательство. *Необходимость*. Пусть функция f ограничена на $E \in \Sigma^{\pi}$ и интегрируема на множестве E по проекции π, $e_0 \subseteq E$ – множество точек разрыва функции f по проекции π. Предположим, что множество e_0 не является нуль-множеством по проекции π. Обозначим $e_0^{(j)}$ множество точек x из e_0, удовлетворяющих условию: для любой окрестности $U(x)$ точки x выполняется неравенство

$$\sup\nolimits_{U(x)\cap E} f - \inf\nolimits_{U(x)\cap E} f \geq \frac{1}{j}.$$

Из определения точек разрыва вытекает, что $e_0 = \bigcup_{j=1}^{\infty} e_0^{(j)}$. Следовательно, для некоторого натурального j_0 множество $e_0^{'} := e_0^{(j_0)}$ не является нуль-множеством по проекции π. Это означает, что существует $\varepsilon > 0$ такое, что для любого покрытия $e_1, e_2, \ldots \in \Sigma(\mathbf{R}^n)$ множества $e_0^{'}$ выполняется неравенство $\sum_{k=1}^{\infty} \mu(\pi e_k) \geq \varepsilon$. Выберем произвольное $\nu \in \mathbf{N}$ и из семейства доменов d, составляющих множество e_ν^E, удалим те, внутренности которых не пересекаются с множеством $e_0^{'}$. Полученное множество $e_\nu^{'} \subseteq e_\nu^E$ содержит множество $e_0^{'}$, является измеримым и, значит, $\mu(\pi e_\nu^{'}) = \nu^{\pi}(e_\nu^{'}) = \sum_{d \subseteq e_\nu^{'}} 2^{-\nu k} \geq \varepsilon$. При этом

$$\Delta\sigma_\nu \geq \sum_{d \subseteq e_\nu^{'}} 2^{-\nu k}(M_d - m_d) \geq \frac{\varepsilon}{j_0} > 0$$

для любого $\nu \in \mathbf{N}$. Но это противоречит интегрируемости функции f на множестве E по проекции π.

Достаточность. Будем считать, что множество $e_0 \subseteq E$ точек разрыва функции f является нуль-множеством по проекции π. Пусть

$$\varepsilon > 0, \quad M := \sup\nolimits_E |f|, \quad \varepsilon_1 := \tfrac{\varepsilon}{6M}, \quad \varepsilon_2 := \tfrac{\varepsilon}{3(|\mu^{\pi}|(E)+1)}.$$

По определению нуль-множества существует покрытие $e_1, e_2, \ldots \in \Sigma(\mathbf{R}^n)$ множества e_0, для которого выполняется неравенство $\sum_{k=1}^{\infty} \mu(\pi e_k) < \frac{\varepsilon_1}{2}$. Заменим каждое множество e_k из этого покрытия открытым множеством $e_k^{'} := \operatorname{int} e_{\nu(k)}^{e_k}$, где ранг $\nu(k)$ подобран из условия $\nu^{\pi}(e_{\nu(k)}^{e_k}) < \mu(\pi e_k) + \frac{\delta_1}{2^k}$. Множества $e_1^{'}, e_2^{'}, \ldots$ покрывают множество e_0, и при этом $\sum_{k=1}^{\infty} \mu(\pi e_k^{'}) < \varepsilon_1$. В каждой точке $x \in E \setminus e_0$ функция f является непрерывной, значит, для некоторого натурального $\nu(x)$ выполняется неравенство $\sup_{e_x \cap E} f - \inf_{e_x \cap E} f < \varepsilon_2$, где $e_x := \operatorname{int} e_{\nu(x)}^{\{x\}}$. Кроме того, для некоторого натурального ν_0 выполняется неравенство $\nu^{\pi}(z_{\nu_0}^E) < \varepsilon_1$.

Пусть $e_0^{'} := \operatorname{int} z_{\nu_0}^E$. Семейство открытых множеств $e_0^{'}, e_k^{'}, e_x$, где $k \in \mathbf{N}$, $x \in E \setminus e_0$ покрывают компакт $\bar{E}$. Выберем из этого покрытия конечное подпокрытие

e'_0, e'_{k_i}, e_{x_j}, где $i \in \{1,\ldots,N_1\}$, $j \in \{1,\ldots,N_2\}$ и обозначим N наибольшее из чисел $\max_{i\in\{1,\ldots,N_1\}} \nu(k_i)$, $\max_{j\in\{1,\ldots,N_2\}} \nu(x_j)$ и ν_0. Пусть для любого $\nu > N'$ выполняется неравенство $\nu^{\pi}(e_{\nu}^{E}) < |\mu^{\pi}|(E)+1$. Тогда для всякого $\nu > \max\{N, N'\}$ сумма

$$\Delta\sigma_{\nu} = \sum_{d\subseteq e_{\nu}^{E}} 2^{-\nu k}\left(M_d - m_d\right)$$

распадается на три суммы $\Delta\sigma_{\nu} = \Delta\sigma'_{\nu} + \Delta\sigma''_{\nu} + \Delta\sigma'''_{\nu}$. В сумме $\Delta\sigma'_{\nu}$ суммирование ведется по доменам $d' \subseteq p_{\nu}^{E} \cup n_{\nu}^{E}$, покрываемым системой множеств e'_{k_i}, $i \in \{1,\ldots,N_1\}$; в сумме $\Delta\sigma''_{\nu}$ суммирование ведется по всем доменам $d'' \subseteq z_{\nu}^{E}$; в сумме $\Delta\sigma'''_{\nu}$ суммирование ведется по всем остальным доменам $d''' \subseteq e_{\nu}^{E}$. Из соотношений

$$\Delta\sigma_{\nu} \le 2M\varepsilon_1 + 2M\varepsilon_1 + (|\mu^{\pi}|(E)+1)\varepsilon_2 = \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

вытекает, что $\Delta\sigma_{\nu} \to 0$ при $\nu \to \infty$.

Примечания:

1. Шишкин А.Б. Ориентирование множеств // Труды ФОРА. 2011. № 16. С. 27-31. URL: http://fora.adygnet.ru

References:

1. Shishkin A.B. Orientation of sets // FORA Works. 2011. No. 16. P. 27-31. URL: http://fora.adygnet.ru