МАТЕМАТИКА

MATHEMATICS

УДК 517.956
ББК 22.161.61
К 89

Куижева С.К.
Кандидат физико-математических наук, зав. кафедрой высшей математики и системного анализа Майкопского государственного технологического университета, тел. 89184274441, e-mail: s.kuigeva@yandex.ru
Паланджянц Л.Ж.
Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики и системного анализа Майкопского государственного технологического университета, тел. 89615967350, e-mail: levonmgtu@rambler.ru

О характеристической системе уравнений для некоторого класса алгебраических дифференциальных уравнений

(Рецензирована)

Аннотация
Сформулировано понятие характеристической системы уравнений для некоторого класса алгебраических дифференциальных уравнений. В общем виде вычислена характеристическая система уравнений для определенного класса алгебраических дифференциальных уравнений. В качестве примера рассмотрены нелинейные дифференциальные уравнения пограничного слоя и уравнение Бенджамина-Бона-Махони, для которых характеристические уравнения найдены в явном виде.
Ключевые слова: *алгебраическое дифференциальное уравнение.*

Kuizheva S.K.
Candidate of Phisics and Mathematics, Head of the Department of Higher Mathematics and System Analysis, Maikop State University of Technology, ph. 89184274441, e-mail: s.kuigeva@yandex.ru
Palandzhyants L.Zh.
Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of Higher Mathematics and System Analysis Department, Maikop State University of Technology, ph. 89615967350, e-mail: levonmgtu@rambler.ru

The characteristic system of the equtions for some class of algebraic differential equtions

Abstract
The concept of the characteristic system of the equations for some class of algebraic differential equations is formulated. The characteristic system of the equations for a certain class of the algebraic differential equations is calculated in a general view. The nonlinear differential equations of an interface and Benjamin-Bon-Mahoney’s equation for which the characteristic equations are found in an explicit form are examined as an example.
Keywords: *algebraic differential equation.*

В работе [1] рассматривалось представление характеристического уравнения для некоторого класса алгебраических дифференциальных уравнений, и было предъявлено преобразование, с помощью которого можно вычислить его характеристическое уравнение. Был приведен пример уравнения Кортевега–де Фриза-Бюргерса, для которого характеристический многочлен вычислялся в явном виде как многочлен четвертой степени относительно одного из параметров, входящих в преобразование. Тем самым был получен класс несингулярных точных решений.

В данной статье понятие характеристического уравнения обобщается на понятие характеристической системы уравнений для алгебраического дифференциального уравнения вида

$$(1,u,u^2,\dots,u^n)A(u,u',u'',\dots,u^{(n)})^T+c=0\,, \tag{1}$$

где $A=(a_{ij})$ – постоянная матрица $(n+1)$-го порядка, $i,\,j=\overline{1,n+1}$, $u=u(x)\in C^{\infty}(R)$, $x\in R$; T – транспонирование; c – постоянная.

Приводятся примеры уравнения пограничного слоя и уравнения Бенджамина-Бона-Махони, решение которых предлагается с помощью построения характеристической системы уравнений.

Подвергнем уравнение (1) преобразованию:

$$u(x)=\sum_{s=0}^{k}m_s y^s\,, \tag{2}$$

где $m_s, s=\overline{0,k}$ – неизвестные параметры;

$$y'=\sum_{i=0}^{l}p_r y^r\,, \tag{3}$$

где $p_r, r=\overline{0,l}$ – неизвестные параметры, $y=y(x)$ – гладкая функция переменной $x\in R$.

Преобразования (2) и (3) приводят уравнение (1) к многочлену по переменной y с нулевыми коэффициентами, то есть имеет место алгебраическая система уравнений относительно постоянных параметров $m_s, s=\overline{0,n}$, $p_r, r=\overline{0,l}$, которую естественно назвать ***характеристической*** системой уравнений для исходного уравнения (1).

Вычислим характеристическую систему уравнения (1).

Лемма 1. Имеет место равенство:

$$u^i=\sum_{s\ge 0}^{|l|}\frac{i!}{l_0!l_1!\cdots l_k!}m_0^{l_0}m_1^{l_1}\cdots m_k^{l_k}y^{l_1+l_2+\cdots+l_k}\,,\qquad |l|=\sum_{s=0}^{k}l_s\,. \tag{4}$$

Доказательство. Введем обозначение $m_s y^s=a_s$. Тогда $u=\sum_{s=0}^{k}a_s$. Воспользуемся полиномиальной формулой:

$$\left(a_0+a_1+\cdots a_m\right)^n=\sum_{s\ge 0}^{|k|}\frac{n!}{k_0!k_1!\cdots k_m!}\cdot a_0^{k_0}a_1^{k_1}\cdots a_m^{k_m}\,,\qquad |k|=\sum_{s=0}^{m}k_s\,.$$

В наших обозначениях индексов полиномиальная формула примет вид:

$$\left(a_0+a_1+\cdots a_k\right)^i=\sum_{s\ge 0}^{|l|}\frac{i!}{l_0!l_1!\cdots l_k!}\cdot a_0^{l_0}a_1^{l_1}\cdots a_k^{l_k}\,,\qquad |l|=\sum_{s=0}^{k}l_s\,.$$

Кроме того, $a_0^{l_0}a_1^{l_1}\cdots a_k^{l_k}=m_0^{l_0}m_1^{l_1}\cdots m_k^{l_k}y^{l_1+l_2+\cdots+l_k}$, откуда следует равенство (4). Лемма 1 доказана.

Лемма 2. Имеет место равенство:

$$u^{(j)}=\sum_{q_j=0}^{k+jl}a_{q_j}y^{q_j}\,, \tag{5}$$

где $a_{q_j} = \sum_{q_{q-1},r=0}^{q_{j-1}+r=q_j} q_{j-1} a_{q_{j-1}} p_r$, …, $a_{q_2} = \sum_{q_1,r=0}^{q_1+r=q_2} q_1 a_{q_1} p_r$, $a_{q_1} = \sum_{s,r=0}^{s+r=q_2} s a_s p_r$.

Доказательство проведем индукцией по j.

Пусть $j=1$. Тогда имеет место равенство

$$u' = \left(\sum_{s=0}^{k} s m_s y^{s-1}\right) \cdot \left(\sum_{r=0}^{l} p_r y^r\right). \tag{6}$$

Воспользуемся формулой перемножения многочленов

$$\left(\sum_{i=0}^{n} a_i y^i\right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{m} b_j y^j\right) = \sum_{k=0}^{n+m} \left(\sum_{i,j=0}^{i+j=k} a_i b_j\right) y^k .$$

Тогда равенство (6) запишется в виде: $u' = \sum_{q_1=0}^{k+l} a_{q_1} y^{q_1}$, где $a_{q_1} = \sum_{s,r=0}^{s+r=q_1} s m_s p_r$.

Пусть $j=2$. Тогда имеет место равенство

$$u'' = \left(\sum_{q_1=0}^{k+l} q_1 a_{q_1} y^{q_1-1}\right) \cdot \left(\sum_{r=0}^{l} p_r y^r\right) = \sum_{q_2=0}^{k+2l} a_{q_2} y^{q_2} ,$$

где $a_{q_2} = \sum_{s,r=0}^{s+r=q_2} q_1 a_{q_1} p_r$.

Предположим, что имеет место равенство

$$u^{(j-1)} = \sum_{q_{j-1}=0}^{k+(j-1)l} a_{q_{j-1}} y^{q_{j-1}} ,$$

где $a_{q_{j-1}} = \sum_{q_{j-2},r=0}^{q_{j-2}+r=q_{j-1}} q_{j-2} a_{q_{j-2}} p_r$.

Тогда $u^{(j)} = \sum_{q_{j-1}=0}^{k+(j-1)l} q_{j-1} a_{q_{j-1}} y^{q_{j-1}-1} \cdot \sum_{r=0}^{l} p_r y^r = \sum_{q_j=0}^{k+(j-1)l+l} a_{q_j} y^{q_j} = \sum_{q_j=0}^{k+jl} a_{q_j} y^{q_j}$,

где $a_{q_j} = \sum_{q_{q-1},r=0}^{q_{j-1}+r=q_j} q_{j-1} a_{q_{j-1}} p_r$. Лемма 2 доказана.

Теорема. Характеристическая система уравнения (1) имеет вид:

$$a_{ij} \sum_{q_j,|l|_1=0}^{q_j+|l|_1=q} \frac{i! \prod_{s=0}^{k} m_s^{l_s}}{\prod_{s=0}^{r} l_s!} a_{q_j} = \begin{cases} 0, q_j \neq 0, |l|_1 = \sum_{s=1}^{k} l_s, \\ -c, q_j = 0, i, j = 0,1,\cdots,n. \end{cases} \tag{7}$$

Доказательство следует из лемм 1 и 2 путем перемножения многочленов u^i и $u^{(j)}$ по формулам (4) и (5).

Вопрос о совместности характеристической системы уравнений (7) остается открытым. Для совместности характеристической системы уравнений для приведенных ниже примеров необходимо выполнение ряда условий:

1. Обозначим степень многочлена по y через $\deg(u^i u^{(j)})$. Необходимо выполнения условия $\deg(u^{i_1} u^{(j_1)}) = \deg(u^{i_2} u^{(j_2)})$ хотя бы для двух пар индексов (i_1, j_1) и (i_2, j_2), соответствующих максимальным степеням многочлена по y.

2. Число параметров преобразования (2) и (3) равно $k+l+2$. Число элементов матрицы A, входящее в характеристическую систему уравнений, зависит от k и l, поэтому обозначим это число через $a(k,l)$. Число параметров преобразования должно быть не менее числа коэффициентов многочлена по y, то есть необходимо выполнения условия $k+l+1+a(k,l) \ge \deg(u^i u^{(j)})$.

В случае $l = 2,3,4$ уравнение (3) в общем виде интегрируется в квадратурах. Однако при $l=3$ и $l=4$ функция $y = y(x)$ входит в интеграл уравнения (3) неявно. Например, при $l=3$ уравнение (3) имеет следующий интеграл:

$$\frac{|y-y_2|^{(y_3-y_1)}}{|y-y_1|^{(y_3-y_2)}|y-y_3|^{(y_2-y_1)}} = e^{p_3\Delta(x-x_1)},$$

где $x_1 = x_0 - \dfrac{1}{p_3\Delta}\ln(y_0-y_1)^{y_2-y_3}(y_0-y_2)^{y_3-y_1}(y_0-y_3)^{y_1-y_2}$,

$\Delta = (y_3-y_1)(y_2-y_3)(y_2-y_1) < 0$, $\quad y_1, < y_2 < y_2$.

Это обстоятельство затрудняет записать в общем случае решение в явном виде, но дает качественную картину поведения решения при тех или иных начальных условиях. Отметим, что уравнения, рассмотренные в работе [2] с помощью теста Пенлеве, относятся к тем случаям, когда удается представить решение алгебраического уравнения в явном виде. В частности, для уравнения Кортевега–де Фриза – Бюргерса $k=2$, $l=2$, для уравнения Курамото–Сивашинского $k=3$, $l=2$.

Пример 1. Уравнение пограничного слоя (см., например, [3], с. 525)

$$u''' + auu'' = 0, \tag{8}$$

где a – константа.

Сделаем следующую замену: $u = m_1 y + m_0$, $\quad y' = p_2 y^2 + p_1 y + p_0$.

Вычислим u', u'', u''', uu'':

$$u' = m_1 p_2 y^2 + m_1 p_1 y + m_1 p_0,$$

$$u'' = 2m_1 p_2^2 y^3 + 3m_1 m_2 p_2 y^2 + (2m_1 m_2 p_0 + m_1 p_1^2) y + m_1 p_1 p_0,$$

$$u''' = 6m_1 p_2^3 y^4 + 12 p_1 p_2^2 y^3 + (8m_1 p_2^2 p_0 + 6m_1 p_1^2 p_2 + m_1 p_1 p_2^2) y^2 +$$
$$+ (8m_1 p_0 p_1 p_2 + m_1 p_1^2 p_2) y + (2m_1 p_0 p_2 + m_1 p_1 p_2) p_0,$$

$$uu'' = 2m_1 p_2^2 y^4 + (3m_1^2 p_1 p_2 + 2m_1 p_2^2 m_0) y^3 + (2m_1^2 p_2 p_0 + m_1^2 p_1^2 + 3m_1 p_1 p_2 m_0) y^2 +$$
$$+ (m_1^2 p_1 p_0 + 2m_1 p_2 p_0 m_0 + m_1 p_1^2 m_0) y + m_1 p_1 p_0 m_0.$$

Подставим значения u''', uu'' в уравнение (8). Получим следующую характеристическую систему уравнений для параметров m_s, $s = 0,1$; $\quad p_r$, $r = 0,1,2$:

$$6m_1 p_2^3 + 2am_1^2 p_2^2 = 0, \tag{9}$$

$$12m_1 p_2^2 p_1 + a(3m_1^2 p_1 p_2 + 2m_1 p_2^2 m_0) = 0, \tag{10}$$

$$8m_1p_2^2p_0 + 7m_1p_1^2p_2 + a(2m_1^2p_2p_0 + m_1^2p_1^2 + 3m_1p_1p_2m_0) = 0\,, \tag{11}$$

$$8m_1p_1p_2p_0 + m_1p_1^3 + a(m_1^2p_1p_0 + 2m_1p_2p_0 + m_1p_1^2) = 0\,, \tag{12}$$

$$2m_1p_2p_0^2 + m_1p_1^2p_0 + am_1p_1p_0m_0 = 0\,. \tag{13}$$

Из уравнений (9) – (13) получаем:

$$p_2 = k_1m_1,\quad k_1 = -\frac{a}{3};\quad p_1 = k_2m_0,\quad k_2 = -\frac{2a}{3};\quad m_1p_1 = k_3m_0^2,\quad k_3 = -\frac{a}{3};\quad m_0 = \frac{1}{a}.$$

Решим уравнение $y' = p_2y^2 + p_1y + p_0$.

Вычислим дискриминант квадратного уравнения $p_2y^2 + p_1y + p_0 = 0$:

$$D = p_1^2 - 4p_2p_0 = \frac{4}{9}a^2m_0^2 - 4\cdot\left(-\frac{a}{3}m_0^2\right)\cdot\frac{1}{m_1}\cdot\left(-\frac{a}{3}m_1\right) = 0\,.$$

Следовательно, $y_{1,2} = -\dfrac{p_1}{2p_2}$.

Таким образом, $y = -\dfrac{p_1}{p_2} - \dfrac{1}{p_2(x+c)}$, где c – постоянная.

С учетом решения квадратного уравнения, решение уравнения (8) запишется в виде:

$$u = m_1\left(-\frac{p_1}{p_2} - \frac{1}{p_2(x+c)}\right) + m_0\,. \tag{14}$$

Учитывая, что $-\dfrac{m_1p_1}{2p_2} + m_0 = 0$, из равенства (11) получаем, что $u = \dfrac{3}{a(x+c)}$ есть решение уравнения (8), в чем можно убедиться непосредственной проверкой.

В самом деле, $u' = -\dfrac{3}{a(x+c)^2}$, $u'' = \dfrac{6}{a(x+c)^3}$, $u''' = -\dfrac{18}{a(x+c)^4}$, откуда следует равенство: $-\dfrac{18}{a(x+c)^4} + a\cdot\dfrac{3}{a(x+c)}\cdot\dfrac{6}{a(x+c)^3} = 0$.

Замечание. Известно [4], что если $f(x)$ – решение уравнения Блазиуса $f''' + ff'' = 0$, $f''(x) \neq 0$, то уравнение Ленгмюра $3yy'' + (y')^2 + 4yy'' + y^2 = 1$ имеет решение $y(t) = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{3}e^{-t/2}(f(x))^{3/2}$, где x выражается через t с помощью соотношения $t = -\int_c^x f(s)ds$. Таким образом, $t = -3\ln(x+c)$, c – постоянная. При надлежащем выборе постоянной c можно получить очевидные решения $y = \pm 1$.

Пример 2. Уравнение Бенджамина-Бона-Махони (см., например, [5], с. 261)

$$u_t + u_x = \varepsilon(3uu_x + \frac{1}{2}u_{xxt}),\qquad \varepsilon > 0\,. \tag{15}$$

Будем искать решение уравнения (12) в виде бегущей волны $u(t,x) = u(x+v_0t)$, где v_0 – некоторая постоянная. Введем обозначение $\xi = x + v_0t$. Тогда уравнение (15) запишется в виде

$$u_{\xi\xi\xi} + \frac{6}{v_0} u u_\xi - \frac{2(v_0+1)}{\varepsilon v_0} u_\xi = 0\,. \tag{16}$$

Интегрируя уравнения (16), получаем

$$u_{\xi\xi} + \frac{3}{v_0} u^2 - \frac{2(v_0+1)}{\varepsilon v_0} u + c = 0\,, \tag{17}$$

где c – постоянная.

Обозначим $a_1 = \frac{3}{v_0}$, $a_2 = -\frac{2(v_0+1)}{\varepsilon v_0}$.

Сделаем следующую замену: $u = m_2 y^2 + m_1 y + m_0$, $y' = p_2 y^2 + p_1 y + p_0$.

Вычислим u'', u^2:

$$u' = 2m_2 p_2 y^3 + (2m_2 p_1 + m_1 p_2) y^2 + (2m_2 p_0 + m_1 p_1) y + m_1 p_0\,,$$

$$u'' = 6m_2 p_2^2 y^4 + (10 m_2 p_2 p_1 + 2m_1 p_2^2) y^3 + (8m_2 p_2 p_0 + 3m_1 p_2 p_1 + 4m_2 p_1^2) y^2 + \\ + (6m_2 p_1 p_0 + 2m_1 p_2 p_0 + m_1 p_1^2) y + 2m_2 p_0^2 + m_1 p_1 p_0\,,$$

$$u^2 = m_2^2 y^4 + 2m_1 m_2 y^3 + (m_1^2 + 2m_0 m_2) y^2 + 2m_1 m_0 y + m_0^2\,.$$

Подставим значения u'', u^2, u в уравнение (17). Получим следующую характеристическую систему уравнений для параметров m_s, $s = 0,1,2$; p_r, $r = 0,1,2$:

$$6m_2 p_2^2 + a_1 m_2^2 = 0\,, \tag{18}$$

$$10 m_2 p_2 p_1 + 2m_1 p_2^2 + 2a_1 m_1 m_2 = 0\,, \tag{19}$$

$$8m_2 p_2 p_0 + 3m_1 p_2 p_1 + 4m_2 p_1^2 + a_1(m_1^2 + 2m_2 m_0) + a_2 m_2 = 0\,, \tag{20}$$

$$6m_2 p_1 p_0 + 2m_1 p_2 p_0 + m_1 p_1^2 + 2a_1 m_1 m_0 + a_2 m_1 = 0\,, \tag{21}$$

$$2m_2 p_0^2 + m_1 p_1 p_0 + a_1 m_0^2 + a_2 m_0 + c = 0\,. \tag{22}$$

Из уравнений (18) – (22) получаем:

$$m_2 = -\frac{6}{a_1} p_2^2, \quad m_1 = \frac{6}{a_1} p_1 p_2\,, \quad m_0 = \frac{1}{2a_1} p_1^2 + \frac{a_2}{2a_1}\,, \quad p_2 p_0 = \frac{1}{2} p_1^2\,.$$

Параметр p_2 – произвольный. Для параметра p_1 получаем биквадратное уравнение:

$$p_1^4 + 4p_1^2 + 3a_2^2 + 4a_1 c\,. \tag{23}$$

Решим уравнение $y' = p_2 y^2 + p_1 y + p_0$ в предположении, что характеристическое уравнение (23) имеет действительные корни. Найдем корни уравнения

$$p_2 y^2 + p_1 y + p_0 = p_2 (y^2 + \frac{p_1}{p_2} y + \frac{p_0}{p_2}) = p_2 (y^2 - y + \frac{1}{2})\,,$$

поскольку $\frac{p_1}{p_2} = -1$, $\frac{p_0}{p_2} = \frac{p_0 p_2}{p_2^2} = \frac{1}{2} \frac{p_1^2}{p_2^2} = \frac{1}{2}$.

Тогда $y' = p_2\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$, откуда получаем $y = \frac{1}{2}\left(1 + tg(2p_2(x + c_1))\right)$, где c_1 – постоянная.

Таким образом, получаем решение уравнения (17)

$$u = -\frac{6}{a_1} p_2^2 (y^2 + y - \frac{1}{12} - \frac{a_2}{6p_2^2}),$$

где $y = \frac{1}{2}\left(1 + tg(2p_2(x + c_1))\right)$.

Замечание. Уравнение (17) имеет солитонное решение вида $u(\xi) = \frac{k_1}{ch^2(\alpha\xi + \beta)}$, где k_1, α, β – неизвестные параметры.

В самом деле, подставив $u(\xi)$ в уравнение (14), находим неизвестные параметры:

$$k_1 = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{v_0 + 1}{3\varepsilon v_0}} - \frac{2(v_0 + 1)}{\varepsilon v_0} - \frac{cv_0}{v_0 + 1}, \quad \alpha = \sqrt{\frac{v_0 + 1}{3\varepsilon v_0}}, \quad \beta \text{ – произвольное число.}$$

Примечания:

1. Куижева С.К., Паланджянц Л.Ж. О характеристических уравнениях для некоторого класса алгебраических дифференциальных уравнений // Доклады АМАН. 2011. Т. 13, № 2. С. 29-32.
2. Кудряшов Н.А. Аналитическая теория нелинейных дифференциальных уравнений. М.; Ижевск: Инс-т компьютерных исследований, 2004. 306 с.
3. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1971. 576 с.
4. Burnside Robert R. Remarks on the equations of Langmur and Blasius // J. Math. Anal. and Appl. 1970. No. 2. P. 392-400. (РЖ Мат. 1970. 11Б197).
5. Нахушев А.М. Уравнения математической биологии: учеб. пособие для ун-тов. М.: Высш. шк., 1995. 301 с.

References:

1. Kuizheva S.K., Palandzhyants L.Zh. On the characteristic equations for some class of the algebraic differential equations // AMAN reports. 2011. Vol. 13, No. 2. P. 29-32.
2. Kudryashov N.A. Analytical theory of the nonlinear differential equations. M.; Izhevsk: The institute of computer research, 2004. 306 pp.
3. Kamke E. A handbook of ordinary differential equations. M.: Nauka, 1971. 576 pp.
4. Burnside Robert R. Remarks on the equations of Langmur and Blasius // J. Math. Anal. and Appl. 1970. No. 2. P. 392-400. (RZh. Math. 1970. 11B197).
5. Nakhushev A.M. Equations of mathematical biology: a manual for universities. M.: Vyssh. shk., 1995. 301 pp.