УДК 512.54
ББК 22.161
П 88

Паранук В.И.
Кандидат физико-математических наук, профессор кафедры алгебры и геометрии факультета математики и компьютерных наук Адыгейского государственного университета, тел. (8772) 59-38-04, e-mail: pkomagu@mail.ru

О представлениях некоторой группы клеточно-треугольных матриц четвертого порядка

(Рецензирована)

Аннотация

Исследуется группа клеточно-треугольных матриц четвертого порядка. Предварительно рассматриваются некоторые специальные разложения невырожденных вещественных матриц второго порядка, производится параметризация группы, а затем строятся унитарные представления группы, как операторы, реализуемые в пространстве финитных и бесконечно дифференцируемых функций.

Ключевые слова: *представление группы, индуцированное представление, унитарное представление, алгебра Ли группы, коммутатор матриц, однопараметрическая подгруппа.*

Paranuk V.I.
Candidate of Physics and Mathematics, Professor of Algebra and Geometry Department of Mathematics and Computer Science Faculty, Adyghe State University, ph. (8772) 59-38-04, e-mail: pkomagu@mail.ru

On representations of some group of the cellular and triangular matrices of the fourth order

Abstract

The paper examines the group of the fourth order cellular and triangular matrices. Preliminarily some special decomposition of nondegenerated material matrices of the second order is considered. Group parametrization is made. Then unitary group representations as the operators realized in space of finite and infinitely differentiated functions are constructed.

Keywords: *the group representation, the induced representation, unitary representation, algebra of Lie group, the switchboard of matrices, one-parametrical subgroup.*

Пусть G – группа матриц, состоящая из элементов вида

$$g = \begin{pmatrix} \omega_1 & r\omega_2 \\ 0 & \omega_2 \end{pmatrix},$$

где

$$\omega_1 = \begin{pmatrix} ch\alpha & sh\alpha \\ sh\alpha & ch\alpha \end{pmatrix}, \quad \omega_2 = \begin{pmatrix} ch\varphi & sh\varphi \\ sh\varphi & ch\varphi \end{pmatrix}, \quad 0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad -\infty < \alpha, \varphi < \infty,$$

r – вещественная матрица второго порядка.

Укажем закон умножения в группе G:

$$g(\omega_1, \omega_2; r)\, g(\tilde{\omega}_1 \tilde{\omega}_2; \tilde{r}) = g(\omega_1 \tilde{\omega}_1; \omega_2 \tilde{\omega}_2; r + \omega_1 \tilde{r}\, \omega_2^{-1}).$$

Параметризация группы G

Можно записать

$$g(\omega_1,\omega_2;r)=g(E_2,E_2;r)g(\omega_1,\omega_2;0),$$

где

$$E_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

В [1] установлено было:

1). Если невырожденная матрица $g=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ такова, что после преобразования

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \beta_1\\ \gamma_1 & \delta_1\end{pmatrix} \qquad (1)$$

элементы матрицы $\begin{pmatrix}\alpha_1 & \beta_1\\ \gamma_1 & \delta_1\end{pmatrix}$ отличны от нуля, то имеет место разложение

$$g=\begin{pmatrix}ch\sigma & sh\sigma\\ sh\sigma & ch\sigma\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}^{\varepsilon_1}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}^{\varepsilon_2}\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix}^{\varepsilon_3}z\begin{pmatrix}cht & sht\\ sht & cht\end{pmatrix},$$

где $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ равны *0* или *1*, $-\infty<\sigma,t<\infty$, а z – матрица одного из следующих двух типов:

а) $z=\begin{pmatrix}e^{r_1} & 0\\ 0 & e^{r_2}\end{pmatrix}$, $-\infty<r_1,r_2<\infty$;

б) $z=\begin{pmatrix}\rho & -\mu\\ \mu & \rho\end{pmatrix}$, $\rho\ge|\mu|$

2). Если невырожденная матрица $\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ такова, что после преобразования, указанного в пункте 1), хотя бы один из элементов матрицы $\begin{pmatrix}\alpha_1 & \beta_1\\ \gamma_1 & \delta_1\end{pmatrix}$ равен 0, то справедливо разложение

$$g=\begin{pmatrix}ch\sigma & sh\sigma\\ sh\sigma & ch\sigma\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}^{\varepsilon_1}\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix}^{\varepsilon_2}\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}^{\varepsilon_3}\begin{pmatrix}s_1 & \dfrac{s_1-s_2}{2}\\ \dfrac{s_2-s_1}{2} & s_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}^{\varepsilon_4},$$

где $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$ равны *0* или *1*, $-\infty<\sigma<\infty$, $s_1\ne\pm s_2$.

Для случая, указанного в пункте 1), разложение матрицы g можно записать так:

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ch\sigma & sh\sigma \\ sh\sigma & ch\sigma \end{pmatrix} \Delta \begin{pmatrix} cht & sht \\ sht & cht \end{pmatrix},$$

где $e^{\sigma} = \left|\dfrac{\gamma_1\delta_1}{\alpha_1\beta_1}\right|^{\frac{1}{4}}$, $e^{t} = \left|\dfrac{\beta_1\delta_1}{\alpha_1\gamma_1}\right|^{\frac{1}{4}}$, а Δ – матрица одного из видов, указанных ниже.

Введем обозначения $a = |\alpha_1\delta_1|^{\frac{1}{2}}$, $b = \beta_1\left|\dfrac{\gamma_1}{\beta_1}\right|^{\frac{1}{2}}$.

Тогда Δ матрица вида:

1). $\begin{pmatrix} a+b & 0 \\ 0 & a-b \end{pmatrix}$, если $\alpha_1 > 0, \delta_1 > 0,\ \alpha_1\delta_1 > \beta_1\gamma_1 > 0$.

2). $\begin{pmatrix} 0 & -a+b \\ -a-b & 0 \end{pmatrix}$, если $\alpha_1 > 0, \delta_1 < 0,\ \alpha_1\delta_1 < \beta_1\gamma_1 < 0$.

3). $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, если $\alpha_1 > 0, \delta_1 > 0,\ -\alpha_1\delta_1 \le \beta_1\gamma_1 < 0$.

4). $\begin{pmatrix} -b & -a \\ -a & b \end{pmatrix}$, если $\alpha_1 > 0, \delta_1 < 0,\ -\alpha_1\delta_1 \ge \beta_1\gamma_1 > 0$.

5). $\begin{pmatrix} 0 & a-b \\ a+b & 0 \end{pmatrix}$, если $\alpha_1 < 0, \delta_1 > 0,\ \alpha_1\delta_1 < \beta_1\gamma_1 < 0$.

6). $\begin{pmatrix} -a-b & 0 \\ 0 & b-a \end{pmatrix}$, если $\alpha_1 < 0, \delta_1 < 0,\ \alpha_1\delta_1 > \beta_1\gamma_1 > 0$.

7). $\begin{pmatrix} b & a \\ a & -b \end{pmatrix}$, если $\alpha_1 < 0, \delta_1 > 0,\ -\alpha_1\delta_1 \ge \beta_1\gamma_1 > 0$.

8). $\begin{pmatrix} -a & b \\ -b & -a \end{pmatrix}$, если $\alpha_1 < 0, \delta_1 < 0,\ \alpha_1\delta_1 \ge -\beta_1\gamma_1 > 0$.

9). $\begin{pmatrix} 0 & -a+b \\ -a-b & 0 \end{pmatrix}$, если $\beta_1 > 0, \gamma_1 < 0,\ \beta_1\gamma_1 < \alpha_1\delta_1 < 0$.

10). $\begin{pmatrix} -a-b & 0 \\ 0 & b-a \end{pmatrix}$, если $\beta_1 < 0, \gamma_1 < 0,\ 0 < \alpha_1\delta_1 < \beta_1\gamma_1$.

11). $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, если $\beta_1 > 0, \gamma_1 < 0,\ 0 < \alpha_1\delta_1 \le -\beta_1\gamma_1$.

12). $\begin{pmatrix} -b & a \\ a & b \end{pmatrix}$, если $\beta_1 < 0, \gamma_1 < 0,\ \beta_1\gamma_1 \geq -\alpha_1\delta_1 > 0$.

13). $\begin{pmatrix} a+b & 0 \\ 0 & a-b \end{pmatrix}$, если $\beta_1 > 0, \gamma_1 > 0,\ 0 < \alpha_1\delta_1 < \beta_1\gamma_1$.

14). $\begin{pmatrix} 0 & a-b \\ a+b & 0 \end{pmatrix}$, если $\beta_1 < 0, \gamma_1 > 0,\ 0 > \alpha_1\delta_1 > \beta_1\gamma_1$.

15). $\begin{pmatrix} b & -a \\ -a & -b \end{pmatrix}$, если $\beta_1 > 0, \gamma_1 > 0,\ 0 < -\alpha_1\delta_1 \leq \beta_1\gamma_1$.

16). $\begin{pmatrix} -a & -b \\ b & -a \end{pmatrix}$, если $\beta_1 < 0, \gamma_1 > 0,\ 0 < \alpha_1\delta_1 \leq -\beta_1\gamma_1$.

Пусть теперь невырожденная матрица $g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ такова, что после преобразования, указанного в пункте 1), хотя бы один из элементов матрицы $\begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \gamma_1 & \delta_1 \end{pmatrix}$ равен нулю.

а). Пусть $\delta_1 = 0$. Введем обозначения: $a = \left|\beta_1\gamma_1\right|^{\frac{1}{2}}$, $b = \alpha_1\left|\dfrac{\gamma_1}{\beta_1}\right|^{\frac{1}{2}}$, $e^{\sigma} = \left|\dfrac{\gamma_1}{\beta_1}\right|^{\frac{1}{2}}$.

Тогда справедливо разложение

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ch\sigma & sh\sigma \\ sh\sigma & ch\sigma \end{pmatrix} \cdot \Delta,$$

где Δ матрица вида:

17). $\begin{pmatrix} 2a+b & -b \\ -b & -2a+b \end{pmatrix}$, если $\beta_1 > 0, \gamma_1 > 0$.

18). $\begin{pmatrix} b & -2a-b \\ 2a-b & b \end{pmatrix}$, если $\beta_1 < 0, \gamma_1 > 0$.

19). $\begin{pmatrix} b & 2a-b \\ -2a-b & b \end{pmatrix}$, если $\beta_1 > 0, \gamma_1 < 0$.

20). $\begin{pmatrix} -2a+b & -b \\ -b & 2a+b \end{pmatrix}$, если $\beta_1 < 0, \gamma_1 < 0$.

б). Пусть $\gamma_1 = 0$. Введем обозначения: $a = \left|\alpha_1\delta_1\right|^{\frac{1}{2}}$, $b = \beta_1\left|\dfrac{\delta_1}{\alpha_1}\right|^{\frac{1}{2}}$, $e^{\sigma} = \left|\dfrac{\delta_1}{\alpha_1}\right|^{\frac{1}{2}}$.

Справедливо разложение

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ch\sigma & sh\sigma \\ sh\sigma & ch\sigma \end{pmatrix} \cdot \Delta,$$

где Δ матрица вида:

21). $\begin{pmatrix} 2a+b & b \\ -b & 2a-b \end{pmatrix}$, если $\alpha_1 > 0, \delta_1 > 0$.

22). $\begin{pmatrix} b & 2a+b \\ 2a-b & -b \end{pmatrix}$, если $\alpha_1 < 0, \delta_1 > 0$.

23). $\begin{pmatrix} b & -2a+b \\ -2a-b & -b \end{pmatrix}$, если $\alpha_1 > 0, \delta_1 < 0$.

24). $\begin{pmatrix} -2a+b & b \\ -b & -2a-b \end{pmatrix}$, если $\alpha_1 < 0, \delta_1 < 0$.

в). Пусть $\alpha_1 = 0$. Введем обозначения $a = |\gamma_1\beta_1|^{\frac{1}{2}}$, $b = \delta_1 \left|\frac{\beta_1}{\gamma_1}\right|^{\frac{1}{2}}$, $e^{\sigma} = \left|\frac{\gamma_1}{\beta_1}\right|^{\frac{1}{2}}$.

Справедливо разложение

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ch\sigma & sh\sigma \\ sh\sigma & ch\sigma \end{pmatrix} \cdot \Delta,$$

где Δ матрица вида:

25). $\begin{pmatrix} 2a+b & b \\ b & -2a+b \end{pmatrix}$, если $\beta_1 > 0, \gamma_1 > 0$.

26). $\begin{pmatrix} b & -2a+b \\ 2a+b & b \end{pmatrix}$, если $\beta_1 < 0, \gamma_1 > 0$.

27). $\begin{pmatrix} b & 2a+b \\ -2a+b & b \end{pmatrix}$, если $\beta_1 > 0, \gamma_1 < 0$.

28). $\begin{pmatrix} -2a+b & b \\ b & 2a+b \end{pmatrix}$, если $\beta_1 < 0, \gamma_1 < 0$.

г). Пусть $\beta_1 = 0$. Введем обозначения $a = |\alpha_1\delta_1|^{\frac{1}{2}}$, $b = \gamma_1 \left|\frac{\alpha_1}{\delta_1}\right|^{\frac{1}{2}}$, $e^{\sigma} = \left|\frac{\delta_1}{\alpha_1}\right|^{\frac{1}{2}}$.

Справедливо разложение

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ch\sigma & sh\sigma \\ sh\sigma & ch\sigma \end{pmatrix} \cdot \Delta,$$

где Δ матрица вида:

29). $\begin{pmatrix} 2a+b & -b \\ b & 2a-b \end{pmatrix}$, если $\alpha_1 > 0, \delta_1 > 0$.

30). $\begin{pmatrix} b & 2a-b \\ 2a+b & -b \end{pmatrix}$, если $\alpha_1 < 0, \delta_1 > 0$.

31). $\begin{pmatrix} b & -2a-b \\ -2a+b & -b \end{pmatrix}$, если $\alpha_1 > 0, \delta_1 < 0$.

32). $\begin{pmatrix} -2a+b & -b \\ b & -2a-b \end{pmatrix}$, если $\alpha_1 < 0, \delta_1 < 0$.

Представим

$$g(\omega_1, \omega_2; r) = g(E_2, E_2; r) \cdot g(\omega_1, \omega_2; 0).$$

В свою очередь, представив $r = \widetilde{\omega}_1 \varDelta \widetilde{\omega}_2$ (в предположении, что $\det r \neq 0$),

$$g\left(E_2, E_2; \widetilde{\omega}_1 \cdot \varDelta \widetilde{\omega}_2\right) = \left(\begin{array}{c|c} \widetilde{\omega}_1 & 0 \\ \hline 0 & \widetilde{\omega}_2^{-1} \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} E_2 & \varDelta \\ \hline 0 & E_2 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} \widetilde{\omega}_1^{-1} & 0 \\ \hline 0 & \widetilde{\varpi}_2 \end{array}\right)$$

$$= g\left(\widetilde{\omega}_1, \widetilde{\omega}_2^{-1}; 0\right) g\left(E_2, E_2; \varDelta\right) g\left(\widetilde{\omega}_1^{-1}, \widetilde{\omega}_2; 0\right),$$

имеем:

$$g\left(\omega_1, \omega_2; r\right) = g\left(\widetilde{\omega}_1, \widetilde{\omega}_2^{-1}\right) g\left(E_2, E_2; \varDelta\right) g\left(\widetilde{\omega}_1^{-1} \omega_1, \widetilde{\omega}_2 \omega_2; 0\right) \qquad (2)$$

Алгебра Ли группы G

В качестве базиса этой алгебры выберем касательные матрицы к однопараметрическим подгруппам, состоящим из матриц вида:

$$a_{11}(t) = \left(\begin{array}{c|c} E_2 & \begin{matrix} t & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \\ \hline 0 & E_2 \end{array}\right), \quad a_{12}(t) = \left(\begin{array}{c|c} E_2 & \begin{matrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{matrix} \\ \hline 0 & E_2 \end{array}\right),$$

$$a_{21}(t) = \left(\begin{array}{c|c} E_2 & \begin{matrix} 0 & 0 \\ t & 0 \end{matrix} \\ \hline 0 & E_2 \end{array}\right), \quad a_{22}(t) = \left(\begin{array}{c|c} E_2 & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & t \end{matrix} \\ \hline 0 & E_2 \end{array}\right),$$

$$\omega_1(t) = \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} cht & sht \\ sht & cht \end{matrix} & 0 \\ \hline 0 & E_2 \end{array}\right), \quad \omega_2(t) = \left(\begin{array}{c|c} E_2 & 0 \\ \hline 0 & \begin{matrix} cht & sht \\ sht & cht \end{matrix} \end{array}\right).$$

Мы имеем

$$A_{11} = \left.\frac{d\, a_{11}(t)}{dt}\right|_{t=0} = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right).$$

Точно также находим

$$A_{12}=\left(\begin{array}{c|c}0 & \begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}\\ \hline 0 & 0\end{array}\right),\quad A_{21}=\left(\begin{array}{c|c}0 & \begin{smallmatrix}0&0\\1&0\end{smallmatrix}\\ \hline 0 & 0\end{array}\right),\quad A_{22}=\left(\begin{array}{c|c}0 & \begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}\\ \hline 0 & 0\end{array}\right),$$

$$b_1=\left.\frac{d\,\omega_1(t)}{dt}\right|_{t=0}=\left(\begin{array}{c|c}\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix} & 0\\ \hline 0 & 0\end{array}\right),\quad b_2=\left.\frac{d\,\omega_2(t)}{dt}\right|_{t=0}=\left(\begin{array}{c|c}0 & 0\\ \hline 0 & \begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\end{array}\right).$$

Соотношения коммутации для этих матриц имеют следующий вид:

$$[A_{ij},A_{pq}]=0\quad \forall i,j,p,q=1{,}2,\quad [b_1,b_2]=0,$$

$$[A_{11},b_1]=\left(\begin{array}{c|c}0 & \begin{smallmatrix}0&0\\-1&0\end{smallmatrix}\\ \hline 0 & 0\end{array}\right)=-A_{21},\qquad [A_{12},b_1]=\left(\begin{array}{c|c}0 & \begin{smallmatrix}0&0\\0&-1\end{smallmatrix}\\ \hline 0 & 0\end{array}\right)=-A_{22},$$

$$[A_{21},b_1]=\left(\begin{array}{c|c}0 & \begin{smallmatrix}-1&0\\0&0\end{smallmatrix}\\ \hline 0 & 0\end{array}\right)=-A_{11},\qquad [A_{22},b_1]=\left(\begin{array}{c|c}0 & \begin{smallmatrix}0&-1\\0&0\end{smallmatrix}\\ \hline 0 & 0\end{array}\right)=-A_{12},$$

$$[A_{11},b_2]=\left(\begin{array}{c|c}0 & \begin{smallmatrix}0&1\\0&0\end{smallmatrix}\\ \hline 0 & 0\end{array}\right)=A_{12},\qquad [A_{12},b_2]=\left(\begin{array}{c|c}0 & \begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}\\ \hline 0 & 0\end{array}\right)=A_{11},$$

$$[A_{21},b_2]=\left(\begin{array}{c|c}0 & \begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}\\ \hline 0 & 0\end{array}\right)=A_{22},\qquad [A_{22},b_2]=\left(\begin{array}{c|c}0 & \begin{smallmatrix}0&0\\1&0\end{smallmatrix}\\ \hline 0 & 0\end{array}\right)=A_{21}.$$

Возьмем еще линейные комбинации

$$B_+=A_{11}+A_{22}=\left(\begin{array}{c|c}0 & \begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\\ \hline 0 & 0\end{array}\right),\qquad B_-=A_{11}-A_{22}=\left(\begin{array}{c|c}0 & \begin{smallmatrix}1&0\\0&-1\end{smallmatrix}\\ \hline 0 & 0\end{array}\right),$$

$$C_+=A_{12}+A_{21}=\left(\begin{array}{c|c}0 & \begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\\ \hline 0 & 0\end{array}\right),\qquad C_-=A_{12}-A_{21}=\left(\begin{array}{c|c}0 & \begin{smallmatrix}0&1\\-1&0\end{smallmatrix}\\ \hline 0 & 0\end{array}\right).$$

Соотношения коммутации для этих матриц с предшествующими матрицами имеют следующий вид:

$$[B_\pm,C_\pm]=0,\quad [B_\pm,A_{ij}]=0,\quad [C_\pm,A_{ij}]=0,$$

$$[B_+,b_1]=\left(\begin{array}{c|c}0 & \begin{smallmatrix}0&-1\\-1&0\end{smallmatrix}\\ \hline 0 & 0\end{array}\right)=-C_+,\qquad [B_-,b_1]=\left(\begin{array}{c|c}0 & \begin{smallmatrix}0&1\\-1&0\end{smallmatrix}\\ \hline 0 & 0\end{array}\right)=C_-,$$

$$[B_+,b_2]=\left(\begin{array}{c|c}0 & \begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\\ \hline 0 & 0\end{array}\right)=C_+,\qquad [B_-,b_2]=\left(\begin{array}{c|c}0 & \begin{smallmatrix}0&1\\-1&0\end{smallmatrix}\\ \hline 0 & 0\end{array}\right)=C_-,$$

$$[C_+,b_1]=\left(\begin{array}{c|c}0 & \begin{smallmatrix}-1&0\\0&-1\end{smallmatrix}\\ \hline 0 & 0\end{array}\right)=-B_+,\qquad [C_-,b_1]=\left(\begin{array}{c|c}0 & \begin{smallmatrix}1&0\\0&-1\end{smallmatrix}\\ \hline 0 & 0\end{array}\right)=B_-,$$

$$[C_+,b_2]=\left(\begin{array}{c|c}0 & \begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\\ \hline 0 & 0\end{array}\right)=B_+,\qquad [C_-,b_2]=\left(\begin{array}{c|c}0 & \begin{smallmatrix}1&0\\0&-1\end{smallmatrix}\\ \hline 0 & 0\end{array}\right)=B_-.$$

Представления группы G

Представим группу G в виде $G = R\Omega$, где R состоит из элементов $g(E_2, E_2; r)$, а Ω из элементов $g(\omega_1, \omega_2; 0)$. Подгруппа R – коммутативная. Одномерные представления ее

$$\alpha_\Lambda\left[g(\omega_1, \omega_2; r)\right] \equiv \alpha_\Lambda(r) = e^{-Sp\,\Lambda r}, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Положим $\Omega(r) = \left\{\omega \in \Omega : \alpha\left(\omega r \omega^{-1}\right) = \alpha(r) \text{ для всех } r \in R\right\}$.

Из равенства $Sp\,\Lambda r = Sp\,\omega_2^{-1} \Lambda\, \omega_1 r$, справедливого для всех r, вытекает $\Lambda = \omega_2^{-1} \Lambda\, \omega_1$.

Из рассмотрения этого равенства в предположении, что $\lambda_1 \neq \lambda_2$, следует $\Omega(r) = \left(\begin{array}{c|c} E_2 & 0 \\ \hline 0 & E_2 \end{array}\right)$, т.е. Вигнеровская подгруппа единичная. Тогда по конструкции Вигнера [2] все представления нашей группы будут получены как индуцированные представлением подгруппы R (фактически, по этой конструкции все представления получаются как индуцированные представлением подгруппы $H = R\Omega(r)$. Но для нашего случая $\left(\lambda_1 \neq \lambda_2 \setminus \Omega(r) = E\right)$. В дальнейшем будем полагать, что матрица Λ такова: $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, λ – некоторое число, не обязательно вещественное.

Оператор представления задаем в пространстве бесконечно дифференцируемых финитных функций на группе G, удовлетворяющих условию $f(rg) = \alpha_\Lambda f(g), r \in R, g \in G$, как оператор правого сдвига: $T(\tilde{g}) f(g) = f(g\tilde{g})$.

Для $\forall g \in G$ представим $g = r\omega$, где $r \in R, \omega \in \Omega$.

Тогда $f(g) = f(r\omega) = \alpha(r) f(\omega) = e^{-Sp\Lambda r} \cdot f(\omega)$. Если $g = g(\omega_1, \omega_2; r)$, $\tilde{g} = g(\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2; \tilde{r})$, то $f(g\tilde{g}) = e^{-Sp\Lambda\left(r + \omega_1 \tilde{r} \omega_2^{-1}\right)} \cdot f(\omega_1\tilde{\omega}_1, \omega_2\tilde{\omega}_2)$.

Значит

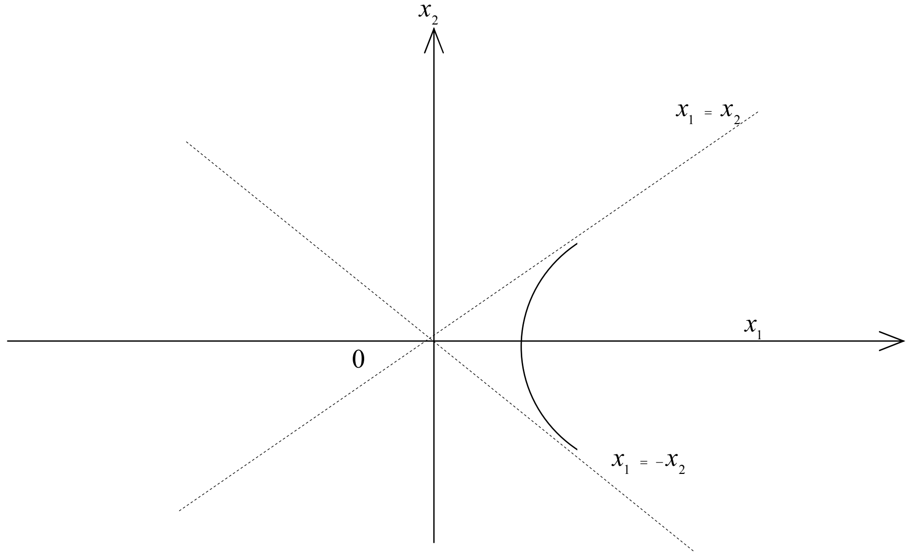
$$T_\Lambda(\tilde{g}) e^{-Sp\Lambda r} \cdot f(\omega_1, \omega_2) = e^{-Sp\Lambda\left(r + \omega_1 \tilde{r} \omega_2^{-1}\right)} \cdot f(\omega_1\tilde{\omega}_1, \omega_2\tilde{\omega}_2),$$

откуда

$$T_\Lambda(\tilde{g}) \cdot f(\omega_1, \omega_2) = e^{-Sp\Lambda\omega_1 \tilde{r} \omega_2^{-1}} \cdot f(\omega_1\tilde{\omega}_1, \omega_2\tilde{\omega}_2). \quad (3)$$

Функции $f(\omega_1, \omega_2)$ определены на группе Ω, состоящей из матриц $\left(\begin{array}{c|c} \omega_1 & 0 \\ \hline 0 & \omega_2 \end{array}\right)$. Каждой матрице $g(\varphi) = \begin{pmatrix} ch\varphi & sh\varphi \\ sh\varphi & ch\varphi \end{pmatrix}$ можно поставить во взаимно однозначное соответсвие точку на гиперболе $x_1^2 - x_2^2 = 1, -x_1 < x_2 < x_1,\ x_1 > 0$.

Именно, матрице $g(\varphi)$ поставим в соответствие точку $\bar{x}_\varphi = g(\varphi)\bar{x}_0$, $\bar{x}_0 = (1;0)$.



В четырехмерном пространстве с базисом x_1, x_2, x_3, x_4 возьмем двумерные плоскости R_{x_1,x_2} и R_{x_3,x_4} и в каждой из них ветви гиперболы:

$$\Gamma_1 : x_1^2 - x_2^2 = 1, -x_1 < x_2 < x_1,\ x_1 > 0,$$

$$\Gamma_2 : x_3^2 - x_4^2 = 1, -x_3 < x_4 < x_3,\ x_3 > 0.$$

С учетом указанного соответствия, операторы $T_\lambda(g)$ в равенстве (3) оставляют инвариантным пространство бесконечно дифференцируемых функций на $\Gamma_1 \times \Gamma_2 : T_\lambda(g) f(\xi,\eta) = e^{-\lambda \xi r \eta'} \cdot f(\xi\omega_1, \eta\omega_2),\quad g = g(\omega_1, \omega_2; r),\quad \xi \in \Gamma_1, \eta \in \Gamma_2$.

Точки $\xi = (\xi_1, \xi_2) \in \Gamma_1$ можно записать в виде $\xi_1 = ch\Theta, \xi_2 = sh\Theta$. Аналогично, если $\eta \in \Gamma_2$, то $\eta_1 = ch\Psi, \eta_2 = sh\Psi$.

Каждой функции $f(\xi,\eta)$ на $\Gamma_1 \times \Gamma_2$ поставим в соответствие функцию $\hat{f}(\Theta,\Psi) = f(ch\Theta, sh\Theta; ch\Psi, sh\Psi)$ вещественных переменных Θ и Ψ.

В пространстве этих функций представление $T_\lambda(g)$ задается следующим образом:

$$T_\lambda(g)\hat{f}(\Theta,\Psi) = e^{-\lambda(r_{11} ch\Theta ch\Psi + r_{22} sh\Theta sh\Psi + r_{12} ch\Theta sh\Psi + r_{21} sh\Theta ch\Psi)} \hat{f}(\Theta+\alpha, \Psi+\varphi), \quad (4)$$

где

$$g = g(\omega_1, \omega_2; r),\quad \omega_1 = \begin{pmatrix} ch\alpha & sh\alpha \\ sh\alpha & ch\alpha \end{pmatrix},\quad \omega_2 = \begin{pmatrix} ch\varphi & sh\varphi \\ sh\varphi & ch\varphi \end{pmatrix},\quad r = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{pmatrix}.$$

Введем в пространстве функций $\hat{f}(\Theta, \Psi)$ скалярное произведение, положив

$$\left(\hat{f}_1, \hat{f}_2\right) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}_1(\Theta, \Psi)\hat{f}_2(\Theta, \Psi)\, d\Theta d\Psi .$$

Отсюда видно, что представление $T_\lambda(g)$ унитарно относительно этого скалярного произведения тогда и только тогда, когда λ чисто мнимое число.

Примечания:

1. Паранук В.И. О некоторых разложениях прямоугольных матриц // Сборник научных трудов Московского государственного заочного пединститута. М., 1974. С. 124-138.
2. Hermann R. Lie groups for physicists. N. Y.; Amsterdam: Benjamin, 1966.

References:

1. Paranuk V.I. On some decomposition of rectangular matrices // Collection of scientific proceeding of the Moscow State Correspondence Teachers' Training institute. M., 1974. P. 124-138.
2. Hermann R. Lie groups for physicists. N. Y.; Amsterdam: Benjamin, 1966.