УДК 517.997; 517.919
ББК 22.19
Ш 96

Шумафов М.М.
Кандидат физико-математических наук, профессор, зав. кафедрой математического анализа и методики преподавания математики факультета математики и компьютерных наук Адыгейского государственного университета, тел. (8772) 59-39-05

Устойчивость систем дифференциальных уравнений с гистерезисными нелинейностями

(Рецензирована)

Аннотация
Рассматриваются вопросы устойчивости дифференциальных систем с гистерезисными нелинейностями. Получены новые частотные критерии глобальной асимптотики, абсолютной устойчивости и дихотомии систем с гистерезисом в некритическом и критическом случаях. Гистерезисные функции могут содержать несколько петель с любым направлением обхода петель. Результаты статьи являются обобщением результатов работ [1-3].
Ключевые слова: *гистерезисная функция, система с гистерезисом, глобальная асимптотика, абсолютная устойчивость, дихотомичность, петля гистерезиса, частотный критерий.*

Shumafov M.M.
Candidate of Physics and Mathematics, Professor, Head of Department of Mathematical Analysis and Methodology of Teaching Mathematics of Mathematics and Computer Science Faculty, Adyghe State University, ph. (8772) 59-39-05

Stability of systems of differential equations with hysteresis nonlinearities

Abstract
Problems of the stability of differential systems with hysteresis nonlinearities are considered. New frequency criteria for global asymptotics, absolute stability and dichotomy of systems with hysteresis in critical and noncritical cases are obtained. Here hysteresis functions may contain several loops which may be bypassed in arbitrary directions. The results of the present paper are a generalization of the results of papers [1-3].
Keywords: *hysteresis function, a system with hysteresis, global asymptotics, absolute stability, dichotomy, hysteresis loop, frequency criterion.*

1. Введение

В различных областях техники широко распространены устройства, динамика которых описывается дифференциальными уравнениями с гистерезисными функциями. К таким устройствам относятся, например, системы автоматического управления, в которых возникает люфт, сухое трение, некоторые приборы имеют зоны нечувствительности, происходит пространственное запаздывание управляющего сигнала. Первые теоретические исследования систем с гистерезисными нелинейностями появились в 40-е годы прошлого столетия в классических работах А.А. Андронова, Н.Н. Баутина [4], А.А. Фельдбаума [5] и Ф. Краутвига [6]. Ряд результатов по исследованию двумерных систем с гистерезисом был получен также в более поздних работах Р.А. Нелепина [7], В.В. Казакевича [8], В.В. Петрова, Г.М. Уланова [9], В.А. Брусина [10] и др. В этих работах использовались методы фазовой плоскости и точечных отображений, а гистерезисные функции имели «стандартный» вид. В последующие годы в работах В.М. Попова [11], В.А. Якубовича [12], Н.Е. Барабанова и В.А. Якубовича [3], А.Х. Гелига [12], В.А. Брусина [13], Я.З. Цыпкина [14] и др. были получены частотные критерии различных типов поведения решений систем с гистерезисными функциями. Важную роль при

установлении этих критериев сыграли результаты В.А. Якубовича [15] и Р.Е. Калмана [16] по решению специальных матричных неравенств.

Различным вопросам, связанным с гистерезисными нелинейностями, посвящено большое число работ, список которых можно найти, например, в статьях [1-3, 23] и в фундаментальной монографии М.А. Красносельского и А.В.Покровского [17].

В настоящей статье получены новые частотные критерии глобальной асимптотики, абсолютной устойчивости и дихотомии дифференциальных систем с гистерезисными нелинейностями. Рассматриваются два случая: некритический, когда матрица линейной части системы гурвицева, и критический, когда эта матрица особая. Гистерезисные функции, в отличие от рассматривавшихся в литературе случаев, могут содержать несколько петель, направления обхода которых любые.

2. Постановка задачи

Рассмотрим систему

$$\dot{x} = Px + q\xi, \quad \sigma = r^* x \quad (\dot{x} \equiv dx/dt), \tag{1}$$

$$\xi = \varphi[\sigma, \varphi_0]_t, \tag{2}$$

где P – вещественная постоянная $(n \times n)$-матрица, q, r – вещественные постоянные n-мерные векторы $(q \neq 0,\ r \neq 0)$, $\varphi[\sigma, \varphi_0]_t$ – гистерезисная функция, $\sigma = \sigma(t)$ и $\xi = \xi(t)$ – скалярные функции от t (t – время), $x \in R^n$ – вектор состояния, звездочка $(*)$ означает транспонирование.

В работах [1-3] были получены достаточные частотные условия абсолютной устойчивости системы (1), (2), а в [18] – необходимые условия асимптотической устойчивости в целом. В статье [19] рассматривались вопросы неустойчивости и наличия свойства колебательности системы (1), (2). Отметим, что общая теория систем с гистерезисом развита в монографии [17], где разработаны общие методы описания и исследования широких классов систем с гистерезисом.

Основная *цель настоящей статьи* – получить новые частотные критерии абсолютной устойчивости, глобальной асимптотики и наличия свойства дихотомии для класса систем вида (1), (2). Доказательства соответствующих критериев основаны на некотором развитии прямого метода Ляпунова и применении частотной теоремы Якубовича-Калмана [20].

3. Определения основных понятий

Напомним определения основных понятий, которые будут использованы ниже.

Определение 1 (гистерезисной функции). Предположим, что для каждого $\sigma_0 \in (-\infty, +\infty)$ задано множество $E[\sigma_0]$ «начальных значений». Пусть далее любому $t \in [0, +\infty)$, каждой непрерывной на $[0, t]$ функции $\sigma(\tau)$ $(0 \le \tau \le t)$ и любому $\varphi_0 \in E[\sigma_0]$ сопоставлено число $\varphi[\sigma, \varphi_0]_t$, причем $\varphi[\sigma, \varphi_0]_0 = \varphi_0$. В этом случае говорят, что на промежутке $[0, +\infty)$ задана гистерезисная функция $\varphi[\sigma, \varphi_0]_t$.

Если значение $\varphi[\sigma, \varphi_0]_t$ представляет собой непрерывную функцию двух численных аргументов t и σ, то гистерезисная функция называется непрерывной. Если функция $\varphi[\sigma(\tau), \varphi_0]_t$ $(0 \le \tau \le t)$ не является непрерывной, то гистерезисная функция называется разрывной или релейно-гистерезисной. В этом случае под $\varphi[\sigma, \varphi_0]_t$ в (2) сле-

дует понимать «дополненную функцию» подобно тому, как это делается для обычных разрывных функций [20, 21].

Таким образом, гистерезисной функцией является семейство операторов. Указанное описание гистерезисной функции введено в работах [2, 3] (подробнее см. [1, 17]). В частном случае уравнение (2) может иметь вид: $\xi = \varphi(\sigma)$, где $\varphi(\sigma)$ – однозначная функция. (Здесь значение $\xi(t)$ равно $\xi(t) = \varphi(\sigma(t))$.) Типичные графики гистерезисных функций представлены на рисунке 1.

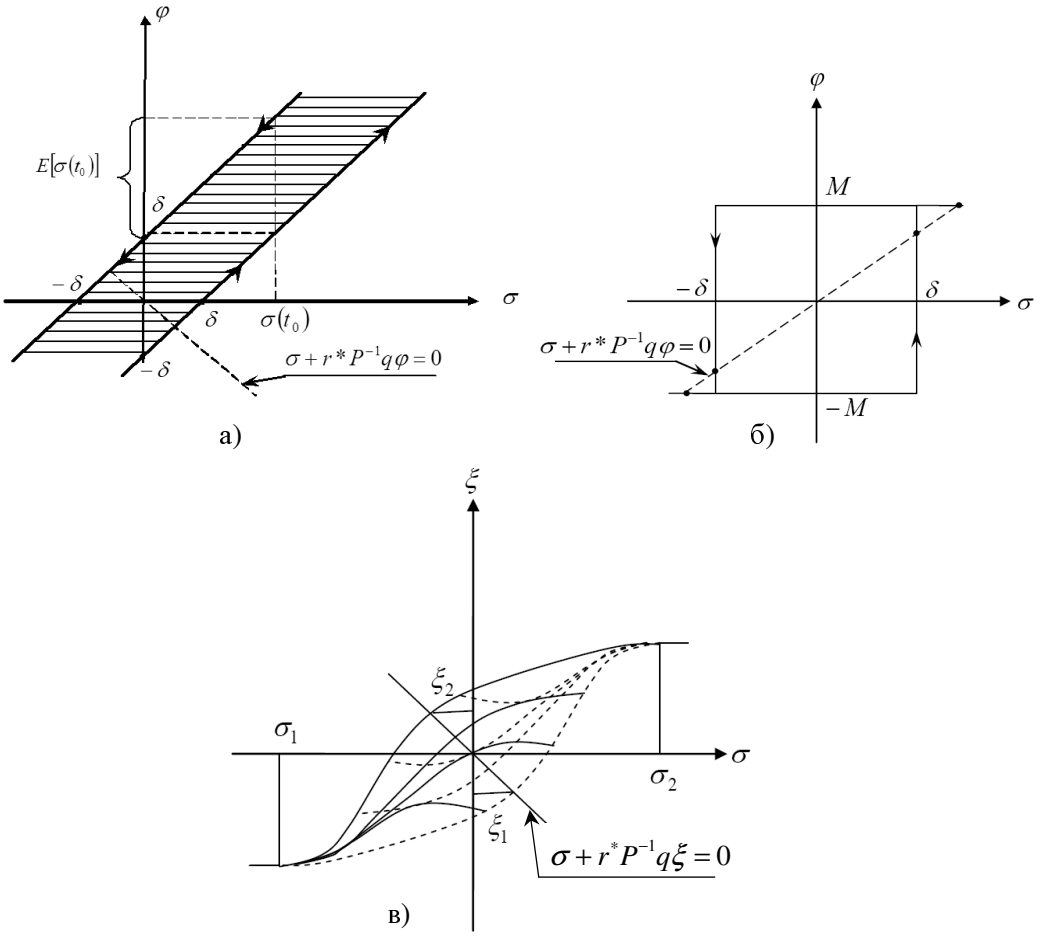

Рис. 1. Типичные графики гистерезисных функций: а) люфт; б) реле с гистерезисом; в) гистерезисная функция с заданным направлением обхода петли

На рисунке 1а) изображена гистерезисная нелинейность типа «люфт». Движение $(\sigma(t), \xi(t))$ происходит по горизонтальному отрезку до тех пор, пока изображающая точка не попадет на одну из граничных прямых: $\xi = \sigma - \delta$ или $\xi = \sigma + \delta$. Если точка попадет на нижнюю наклонную прямую $\xi = \sigma - \delta$ и $\sigma(t)$ возрастает, то дальше движение идет по нижней наклонной прямой (в соответствии с направлением стрелки на рисунке); при убывании $\sigma(t)$ движение вновь происходит по горизонтальному отрезку. Если изображающая точка попадет на верхнюю наклонную прямую и $\sigma(t)$ убывает, то в дальнейшем движение происходит по верхней наклонной прямой $\xi = \sigma + \delta$ и т.д. В данном случае $E[\sigma_0] = [\sigma_0 - \delta, \sigma_0 + \delta]$, где $\sigma_0 = \sigma(0)$.

На рисунке 1б) изображен график гистерезисной функции релейного типа. Петлю

гистерезиса следует обходить в соответствии с направлениями стрелок на рисунке. Здесь множество $E[\sigma_0]$ состоит из двух точек, если $|\sigma_0| < \delta$; из одной точки $\{M \operatorname{sgn} \sigma_0\}$ при $|\sigma_0| > \delta$, и из отрезка $[-M, M]$, если $|\sigma_0| = \delta$ $(\sigma_0 = \sigma(0))$.

На рисунке 1в) изображен график гистерезисной функции с заданной петлей. Движение $(\sigma(t), \xi(t))$ происходит по сплошным линиям, если $\sigma(t)$ убывает, и по пунктирным, если $\sigma(t)$ возрастает. Множество $E[\sigma_0]$ представляет собой вертикальный отрезок: пересечение вертикальной прямой $\sigma = \sigma_0$ с заполненной петлей гистерезиса $(\sigma_1 < \sigma_0 < \sigma_2)$; это множество состоит из одной точки, если $\sigma \notin (\sigma_1, \sigma_2)$.

Таким образом, во всех трех случаях на рисунке 1 нелинейности определяют множество $E[\sigma_0]$ и оператор $\varphi[\sigma, \varphi_0]$: $\sigma(\tau) \to \xi(\tau) = \varphi[\sigma(\tau), \varphi_0]$ $(0 \le \tau \le t)$. Аналогично можно описать и другие гистерезисные нелинейности, встречающиеся на практике.

Определение 2 [2]. Гистерезисная функция обладает свойством предельной непрерывности (или просто предельно непрерывна), если из соотношений $\sigma(t) \to \sigma_*$, $\varphi[\sigma, \varphi_0]_t \to \varphi_*$ при $t \to +\infty$ следует $\varphi_* \in E[\sigma_*]$ и $\varphi[\sigma_*, \varphi_0]_t \equiv \varphi_*$.

Определение 3 [2]. Гистерезисная функция называется ограниченной, если для любого $k > 0$ можно указать такое $k_1 > 0$, что из неравенства $|\sigma(t)| < k$ следует $|\varphi[\sigma(t), \varphi_0]|_t < k_1$ для любых t.

Определение 4 [1]. Под решением системы (1), (2) на интервале (t_1, t_2) понимается пара функций $(x(t), \xi(t))$ такая, что:

1) $x(t)$ – абсолютно непрерывная вектор-функция;

2) соотношения (1), (2) выполнены почти всюду на (t_1, t_2);

3) значение $\xi(t) \in E[\sigma(t)]$ при всех $t \in (t_1, t_2)$.

Из 3) следует, что в случае разрывной гистерезисной функции точка $(\sigma(t), \xi(t))$ на некотором интервале (t_1, t_2) может принадлежать вертикальному отрезку $\sigma = \sigma_0$, $\varphi(\sigma_0 - \delta) \le \xi \le \varphi(\sigma_0 + \delta)$.

В [22] доказана теорема существования и продолжимости решений системы (1), (2) с гистерезисными функциями достаточно широкого класса.

Теорема (существования и продолжимости решений [22]). Если в системе (1), (2) гистерезисная функция $\varphi[\sigma, \varphi_0]_t$ представляет собой одну из нелинейностей, графики которых имеют вид, изображенный на рисунке 1 (люфт, нелинейность релейного типа или с заданной петлей гистерезиса), то решение системы (1), (2) с любыми начальными данными t_0, x_0, $\xi_o \in E[r^* x_o]$ существует и продолжимо на $[t_0, +\infty)$.

Определение 5. Стационарным множеством системы (1), (2) называется множество

$$\{(x_0, \xi_0) \in R^{n+1} \mid Px_0 + q\xi_0 = 0, \quad \xi_0 \equiv \varphi[r^* x_0, \ \varphi_0]_t\}.$$

Определение 6. Будем говорить, что система (1), (2) обладает глобальной асимптотикой, если любое ее решение стремится при $t \to +\infty$ к стационарному множеству.

Определение 7. Система (1), (2) дихотомична, если любое ограниченное при $t > 0$ решение стремится при $t \to +\infty$ к стационарному множеству.

Обозначим через $K=\{\varphi\}$ класс нелинейных блоков, описываемых гистерезисными функциями вида (2) и удовлетворяющих соотношению – условию «секториальности»

$$0 \le \sigma(t)\varphi[\sigma,\varphi_0]_t \le \mu_0\,\sigma(t)^2, \quad \varphi[0,\,\varphi_0]_t = 0 \quad (\mu_0 \le \infty). \tag{3}$$

Определение 8. Система (1), (2) называется абсолютно устойчивой в классе K нелинейных блоков, удовлетворяющих условию (3), если любая система (1), (2) с $\varphi \in K$ асимптотически устойчива в целом, и при этом устойчивость равномерна для всех $\varphi \in K$.

4. Формулировка результатов

Будем различать два случая: первый – некритический, когда в (1) матрица P имеет одно нулевое собственное значение, а остальные лежат в открытой левой полуплоскости.

Предположим, что гистерезисная функция (2) удовлетворяет всем условиям, обеспечивающим существование, продолжимость на $[0,+\infty)$ и правостороннюю зависимость решения от начальных условий.

4.1. Некритический случай: матрица P гурвицева

Введем в рассмотрение передаточную функцию линейной части системы (1), (2):

$$x(\lambda) = r^*(P-\lambda I)q, \quad \lambda \in C, \tag{4}$$

где I – едничнаая $(n\times n)$-матрица.

Теорема 1 (о глобальной асимптотике). Предположим, что P гурвицева матрица, гистерезисная функция $\varphi[\sigma,\varphi_0]_t$ удовлетворяет соотношению (3) и при $\mu_0=\infty$ ограничена, и передадочная функция (4) невырождена. Пусть, далее, выполнены следующие условия:

1) система (1), (2) диссипативна;

2) существуют числа $\delta>0$, $\varepsilon>0$, $\tau\ge 0$ и θ такие, что выполнено неравенство

$$\pi(\omega) \equiv \tau/\mu_0 + \mathrm{Re}(\tau+\theta\, i\,\omega)\chi(i\,\omega) - \varepsilon\omega^2|\chi(i\,\omega)|^2 > \delta \qquad \forall\,\omega\ge 0;$$

3) существует непрерывная функция $F(\sigma)$ и число ν, для которых выполнено неравенство

$$\left|\varphi[\sigma,\varphi_0]_t - F[\sigma(t)]\right| \le \nu\left|\varphi[\sigma,\,\varphi_0]_t\right|;$$

4) $4\delta\varepsilon > (\theta\nu)^2$.

Тогда для любого решения $(x(t),\xi(t))$ системы (1), (2) $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t)=0$.

Если, кроме того, гистерезисная функция $\varphi[\sigma,\varphi_0]_t$ предельно непрерывна, то $(x(t)\equiv 0,\,\xi(t)\equiv 0)$ является стационарным решением системы (1), (2), и тогда система (1), (2) обладает глобальной асимптотикой.

Замечание 1. Условия теоремы 1 обеспечивают также дихотомичность системы (1), (2).

Замечание 2. Условие 1) диссипативности в теореме 1 будет выполнено, если до-

полнительно предположить ограниченность гистерезисной функции $\varphi[\sigma,\varphi_0]_t$.

Замечание 3. Для каждой гистерезисной функции $\varphi[\sigma,\varphi_0]_t$ функция $F(\sigma)$ «своя», которую можно брать удовлетворяющей условию «секториальности» (3).

Нижеследующая теорема не предполагает диссипативности системы и усиливает теорему 1.

Теорема 2 (об абсолютной устойчивости). Предположим, что выполнены все условия теоремы 1, кроме условия 1). Пусть гистерезисная функция $\varphi[\sigma,\varphi_0]_t$ предельно непрерывна. Тогда система (1), (2) обладает глобальной асимптотикой. Более того, система (1), (2) является абсолютно устойчивой.

Следующая теорема устанавливает дихотомичность системы (1), (2) в другом классе гистерезисных функций. Предположим, что гистерезисная функция $\varphi[\sigma,\varphi_0]_t$ удовлетворяет следующим условиям:

а) если $\sigma(t)$ абсолютно непрерывна на $[0,+\infty)$, то $\varphi[\sigma,\varphi_0]_t$ также абсолютно непрерывна на $[0,+\infty)$ $\forall\varphi_0\in E[\sigma_0]$;

б) при почти всех $t\in[0,+\infty)$ выполнено соотношение

$$0\le\frac{d\varphi[\sigma,\varphi_0]_t}{dt}\cdot\frac{d\sigma(t)}{dt}\le\mu_0\left(\frac{d\sigma(t)}{dt}\right)^2,\qquad d\varphi[0,\varphi_0]_t/dt\equiv 0;\tag{5}$$

в) $\varphi[\sigma,\varphi_0]_t$ обладает свойством предельной непрерывности;

г) если $(x(t),\xi(t))$ – решение системы (1), (2), то пара функций $x_1(t)=x(t+c)$, $\varepsilon_1(t)=\varepsilon(t+c)$, где $c>0$ – константа, также является решением этой системы.

Примером гистерезисной функции, удовлетворяющей условиям а) – г), является, например, люфт.

Теорема 3 (о дихотомичности). Предположим, что матрица P гурвицева, гистерезисная функция $\varphi[\sigma,\varphi_0]_t$ удовлетворяет условиям а) – г) и выполнены условия 1) – 4) теоремы 1. Тогда система (1), (2) дихотомична.

4.2. Критический случай

Рассмотрим теперь критический случай, когда матрица P имеет одно нулевое собственное значение, а остальные лежат в левой полуплоскости.

Пусть $\lambda=0$ простой корень уравнения $\det(P-\lambda I)=0$. Неособым линейным преобразованием $x=S(y,\eta)^*$ $(\det S\ne 0)$, $y\in R^{n-1}$, $\eta\in R$, систему (1), (2) можно привести к виду

$$\begin{cases}\dot y=Ay+b\xi, & \sigma=c^*y+\beta\eta,\\ \dot\eta=-\alpha\xi, & \xi=\varphi[\sigma,\varphi_0]_t,\end{cases}\tag{6}$$

где A – гурвицева $(n-1)\times(n-1)$-матрица, b, c – $(n-1)$-мерные векторы, α и β – числа.

Будем предполагать, что $\alpha\beta>0$. Имеет место следующая

Теорема 4. Предположим, что уравнение $\det(P-\lambda I)=0$ имеет простой нулевой

корень, а остальные его корни лежат в левой полуплоскости. Пусть гистерезисная функция $\varphi[\sigma,\varphi_0]_t$ удовлетворяет соотношению (3) и обладает свойством предельной непрерывности. Пусть далее передаточная функция $\chi(\lambda)$ невырождена и выполнены следующие условия:

1) существуют числа $\delta>0$, $\varepsilon>0$, $\tau\ge 0$ и θ такие, что выполнено частотное неравенство

$$\tau/\mu_0+\varepsilon\rho^2+2\operatorname{Re}[\tau/2+(\varepsilon\rho+\theta/2)i\omega]\chi(i\omega)>\delta+\varepsilon|\rho+i\omega\chi(i\omega)|^2 \qquad \forall\omega\ge 0,$$

где $\rho=c^*b-\alpha\beta$ $(\rho\ne 0)$;

2) существует непрерывная функция $F(\sigma)$, для которой выполнено неравенство

$$|\varphi[\sigma,\varphi_0]_t-F(\sigma(t))|\le\nu|\varphi[\sigma,\varphi_0]_t|, \quad \nu>0,$$

причем

$$\int_0^{\pm\infty}F(\sigma)d\sigma<+\infty; \tag{7}$$

3) $4\delta\varepsilon>(\theta\nu)^2$.

Тогда система (6) обладает глобальной асимптотикой.

Замечание 1. Условие (7) в теореме 4 можно заменить условием ограниченности всех решений системы (6).

Замечание 2. Функцию $F(\sigma)$ можно выбрать удовлетворяющей соотношению (3).

Следующая теорема дает достаточные условия глобальной асимптотики системы (1), (2) (эквивалентной системе (6)) в другом классе гистерезисных функций.

Теорема 5. Пусть в системе (6) матрица A гурвицева, гистерезисная функция $\varphi[\sigma,\varphi_0]_t$ ограничена, удовлетворяет соотношению (5), обладает свойством предельной непрерывности и такова, что существование предела $\lim\limits_{t\to+\infty}\varphi[\sigma,\varphi_0]_t=0$ влечет существование конечного предела $\lim\limits_{t\to+\infty}\sigma(t)=\sigma_\infty$. Пусть далее пара (A,b) полностью управляема и выполнены следующие условия:

1) существуют числа $\delta>0$, $\varepsilon>0$, $\tau\ge 0$ и θ такие, что имеет место частотное неравенство

$$\mu_0^{-1}+\theta\operatorname{Re}K(i\omega)-\varepsilon|K(i\omega)|^2-\tau\operatorname{Re}\,i\omega K(i\omega)\ge\delta \qquad \forall\omega\in R,$$

где $K(\lambda)=c^*(A-\lambda I)^{-1}b-\rho$, $\rho=c^*b-\alpha\beta$;

2) существует непрерывная функция $F(\sigma)$ такая, что

$$|\varphi[\sigma,\varphi_0]_t-F(\sigma(t))|\le\nu|\varphi[\sigma,\varphi_0]_t|, \quad \nu>0,$$

причем

$$\int_0^{\pm\infty}F(\sigma)d\sigma<+\infty;$$

3) $4\delta\varepsilon>(\theta\nu)^2$.

Тогда система (6) обладает глобальной асимптотикой.

Доказательства теорем 1–5 приведены в пункте 6.

5. Примеры

Рассмотрим примеры применения теорем 1–4.

Пример 1. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \ddot{x} + \alpha\dot{x} + \beta x + \xi = 0, & (8) \\ \xi = \varphi[x, \varphi_0]_t, & (9) \end{cases}$$

где $\alpha > 0$, $\beta > 0$ – постоянные, $\xi = \varphi[x, \varphi_0]_t$ – гистерезисная функция, удовлетворяющая условиям теоремы 1.

Различные свойства систем вида (8), (9) изучались в работах [4, 5]. К системе вида (8), (9) сводится пример 2, рассмотренный в [2].

Применяя к системе (8), (9) теорему 1, можно получить следующий результат.

Предложение 1. Система (8), (9) обладает свойством глобальной асимптотики при всех $\alpha > 0$, $\beta > 0$ в классе всех гистерезисных нелинейностей $\xi = \varphi[\sigma, \varphi_0]_t$, удовлетворяющих условию «секториальности» (3) и обладающих свойством предельной непрерывности, если выполнено неравенство

$$0 < \nu < \alpha / \sqrt{\mu_o},$$

где ν – число, фигурирующее в условии 3) теоремы 1.

Замечание. В [23] исследована абсолютная устойчивость системы (8), (9) в случае, когда φ – релейно-гистерезисная функция, состоящая из двух ветвей однозначных функций φ_1 и φ_2.

Пример 2. Рассмотрим дифференциальную систему второго порядка [2]

$$\begin{cases} \dot{x} = -\beta x - y, \\ \alpha \dot{y} = x - \varphi[y, \varphi_0]_t, \end{cases} \tag{10}$$

где $\alpha > 0$, $\beta > 0$. Применив к системе (10) теорему 1, можно получить следующее

Предложение 2. Система (10) обладает свойством глобальной асимптотики в классе всех ограниченных гистерезисных нелинейностей, удовлетворяющих условию (3) и обладающих свойством предельной непрерывности, если выполнено неравенство

$$\nu^2 < \frac{2\left(\alpha\beta^2 - 1\right) - 1}{\beta\mu_0\left(\alpha\beta^2 - 1\right)^2},$$

где ν – число в условии 3) теоремы 1.

Рассмотрим теперь примеры, где имеет место критический случай.

Пример 3. Рассмотрим систему

$$\ddot{x} + \alpha\dot{x} + \xi = 0, \qquad \xi = \varphi[x, \varphi_0]_t, \tag{11}$$

где $\alpha > 0$. Применяя теорему 4 к системе (11), можно получить следующее утверждение.

Предложение 3. Система (11) обладает глобальной асимптотикой при всех $\alpha > 0$, если гистерезисная функция $\varphi[x, \varphi_0]_t$ ограничена, удовлетворяет условию (3), обладает

свойством предельной непрерывности и такова, что из существования предела $\lim\limits_{t\to+\infty}\varphi[\sigma,\varphi_0]_t=0$ следует существование предела $\lim\limits_{t\to+\infty}\sigma(t)=\sigma_\infty\in R$.

Пример 4. Рассмотрим систему

$$\begin{cases}\dot y=-y/T+b\xi, & \sigma=cy+\beta\eta,\\ \dot\eta=-\alpha\xi, & \xi=\varphi[\sigma,\varphi_o]_t,\end{cases}\tag{12}$$

где $y,\eta,\xi\in R$; b, c, α и β – числа, такие, что $cb=\gamma-1,\quad \alpha\beta=\gamma(T+1)-1.$

Применяя к системе (12) теорему 4, можно получить следующее

Предложение 4. Система (12) обладает глобальной асимптотикой, если гистерезисная функция $\varphi[\sigma,\varphi_0]_t$ удовлетворяет соотношению (3) и выполнены неравенства

$$T>\frac{(-cb)}{1+cb}\quad (cb<0),\qquad 0<\nu<2/M,$$

где ν – число в условии 2) теоремы 4, а M – число, зависящее от параметров T,c,b,μ_0.

6. Доказательства теорем 1–5

Доказательство теоремы 1.

А) Рассмотрим функцию

$$V(x)=x^*Hx+\theta\int_0^\sigma F(\eta)d\eta,\qquad \sigma=r^*x.\tag{13}$$

Дифференцируя (13) в силу системы (1), (2), получаем

$$\dot V=2x^*H(Px+q\xi)+\theta F(\sigma)\dot\sigma=\Phi(x,\xi)-\varepsilon\dot\sigma^2-\delta\xi^2+\theta[F(\sigma)-\xi]\dot\sigma-\tau\xi(\sigma-\xi/\mu_0),\tag{14}$$

где $\xi=\varphi[\sigma,\varphi_0]_t$, $\Phi(x,\xi)$ – квадратичная форма переменных $x\in R^n$, $\xi=R$:

$$\begin{aligned}\Phi(x,\xi)=2x^*H(Px+q\xi)+\varepsilon x^*P^*rr^*Px+2x^*\left[\varepsilon P^*rr^*q+(\theta/2)Pr+(\tau/2)r\right]\xi+\\+\left[\varepsilon(r^*q)^2+\theta r^*q+\delta-\tau/\mu_0\right]\xi^2.\end{aligned}\tag{15}$$

Частотное условие 2) в теореме 1 равносильно неравенству

$$\Phi\left[(i\omega I-P)^{-1}q\xi,\ \xi\right]<0\qquad \forall\omega\ge 0.$$

Из леммы Якубовича-Калмана [20] следует существование симметрической вещественной матрицы H такой, что для формы (15) будет выполнено неравенство

$$\Phi(x,\xi)<0\qquad \forall x\in R^n,\quad \forall\xi\in R.\tag{16}$$

Так как P гурвицева матрица и $P^*rr^*P\ge 0$, то из той же леммы Якубовича-Калмана следует, что $H>0$. Учитывая, что $\xi(\sigma-\xi/\mu_0)\ge 0$ в силу (3), и используя условие 3) теоремы 1, получим из (14) следующую оценку

$$\dot V\le h(\dot\sigma,\xi)+\Phi(x,\xi),$$

где

$$h(\dot\sigma,\xi)=-\varepsilon\dot\sigma^2+|\theta|\cdot\nu\cdot|\dot\sigma|\cdot|\xi|-\delta\xi^2.$$

В силу условия 4) теоремы 1 форма $h(\dot{\sigma}, \xi)$ будет отрицательно определенной. Следовательно, в силу (16)

$$\dot{V} \le -\lambda_*\left(\dot{\sigma}^2 + \xi^2\right) + \Phi(x, \xi) < \Phi(x, \xi) < 0 \qquad \left(x \in R^n,\ \xi \in R\right), \tag{17}$$

где λ_* – некоторое положительное число.

Б) Пусть $(x(t), \xi(t))$ – произвольное решение системы (1), (2). Покажем ограниченность функции $V(t) \equiv V(x(t))$ снизу. Имеем из (13)

$$V(t) \ge \lambda_1 |x(t)|^2 + \theta F(\eta_*)\sigma(t), \qquad \sigma(t) = r^* x(t), \tag{18}$$

где λ_1 – минимальное собственное значение матрицы H, η_* – некоторое значение между нулем и $\sigma(t)$. Поскольку функции $x(t)$ и $\sigma(t)$ ограничены в силу диссипативности системы (1), (2), из (18) получим, что $V(t) > C\ (= \text{const})\quad \forall t \ge 0$. Отсюда и из (17) следует существование $\lim\limits_{t \to +\infty} V(t) = V_\infty$. Последнее означает сходимость интеграла $\int\limits_0^{+\infty} \left(-\dot{V}\right) dt$. В силу (16) будем иметь оценку

$$-\dot{V} > -\Phi(x, \xi) > k\left(|x|^2 + \xi^2\right)$$

для некоторого $k > 0$. Отсюда следует сходимость интегралов $\int\limits_0^{+\infty} \left(\xi^2(t)\right) dt$ и $\int\limits_0^{+\infty} |x(t)|\, dt$.

В) Обозначим $|x(t)|^2 = \eta(t)$. Имеем $\dot{\eta}(t) = 2x(t)^* x(t)$. Из ограниченности $x(t)$, и следовательно, $\sigma(t)$ следует в силу соотношения (3) ограниченность функции $\varphi[\sigma, \varphi_0]_t$: $\varphi[\sigma, \varphi_0]_t \le C_1\ \ (C_1 = \text{const})$. Из системы (1), (2) имеем

$$|\dot{x}(t)| \le \|P\| \cdot |x(t)| + |q| \cdot |\varphi[\sigma, \varphi_0]_t| \le C_2 + |q| C_1 = C_3,$$

т.е. функция $\dot{x}(t)$ ограничена. (Здесь C_1, C_2 – некоторые константы). Отсюда и из ограниченности $x(t)$ следует, что функция $\dot{\eta}(t)$ ограничена, и следовательно, сходится интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \eta(t)\dot{\eta}(t)\, dt$. Отсуда следует существование предела $\lim\limits_{t \to +\infty} \eta(t) = \eta_\infty \ge 0$. В силу сходимости интеграла $\int\limits_0^{+\infty} |x(t)|\, dt$ необходимо $\eta_\infty = 0$. Отсюда следует, что $\lim\limits_{t \to +\infty} x(t) = 0$. Первая часть теоремы 1 доказана.

Вторая часть теоремы следует из того, что в силу условия теоремы будет существовать предел

$$\lim_{t \to +\infty} \varphi[\sigma, \varphi_0]_t = \varphi_\infty, \qquad \varphi[0, \varphi_\infty]_t \equiv \varphi_\infty,$$

причем $\varphi_\infty = 0$, так как $\lim\limits_{t \to +\infty} \sigma(t) = 0$ и $\varphi[\sigma, \varphi_0]_t = \xi(t) \in L_2[0, +\infty)$. Таким образом, $\varphi[0, 0]_t \equiv 0$. Поэтому $(x(t) \equiv 0,\ \xi(t) \equiv 0)$ является стационарным решением системы (1), (2). Отсюда и в силу того, что $\lim\limits_{t \to +\infty} x(t) = 0$, следует, что система (1), (2) обладает глобальной асимптотикой. Теорема 1 доказада полностью.

Доказательства теорем 2–5 основаны на том же методе и идее, что и доказатель-

ство теоремы 1 (но технически более сложные), и проводятся рассуждениями, аналогичными рассуждениям доказательства теоремы 1.

Примечания:

1. Якубович В.А. Частотные условия абсолютной устойчивости регулируемых систем с гистерезисными нелинейностями // Докл. АН СССР. 1963. Т. 149, № 2. С. 288-291.
2. Якубович В.А. Метод матричных неравенств в теории устойчивости нелинейных регулируемых систем. III. Абсолютная устойчивость систем с гистерезисными нелинейностями // Автоматика и телемеханика. 1965. № 5. С. 753-763.
3. Барабанов Н.Е., Якубович В.А. Абсолютная устойчивость систем регулирования с одной гистерезисной нелинейностью // Автоматика и телемеханика. 1979. № 12. С. 5-11.
4. Андронов А.А., Баутин Н.Н. Об одном вырожденном случае общей задачи прямого регулирования // Докл. АН СССР. 1945. Т. 46, № 7. С. 304-306.
5. Фельдбаум А.А. Простейшие релейные системы автоматического регулирования // Автоматика и телемеханика. 1949. № 10. С. 249-260.
6. Krautwig F. Stabilitatsuntersuchungen an unstitigen Reglen Dargestellt an Hand einer Kontactnachlaufstenerung // Archiv. fur Electrotechnik. 1941. Bd. 25, № 2. S. 117-126.
7. Методы исследования нелинейных систем автоматического управления / под ред. Р.А. Нелепина. М.: Наука, 1975. 447 с.
8. Казакевич В.В. К теории спусковых регуляторов // Автоматика и телемеханика. 1951. № 1. С. 41-60.
9. Петров В.В., Уланов Г.М. Теория двух простейших релейных систем регулирования // Автоматика и телемеханика. 1950. № 5. С. 289-299.
10. Брусин В.А. Динамика простейшей модели следящей системы с люфтом // Радиофизика. 1962. Т. 5, № 4. С. 751-764.
11. Попов В.М. Об абсолютной устойчивости нелинейных систем автоматического регулирования // Автоматика и телемехани-

References:

1. Yakubovich V.A. Frequency conditions of absolute stability of controlled systems with hysteresis non-linearities // Reports of the USSR AS. 1963. Vol. 149, No. 2. P. 288-291.
2. Yakubovich V.A. The method of matrix inequalities in the theory of stability of nonlinear controlled systems. III. Absolute stability of systems with hysteresis non-linearities // Automatics and telemechanics. 1965. No. 5. P. 753-763.
3. Barabanov N.E., Yakubovich V.A. Absolute stability of control system with one hysteresis nonlinearity // Automatics and telemechanics. 1979. No. 12. P. 5-11.
4. Andronov A.A., Bautin N.N. About one degenerate case of the general problem of direct control // Reports of the USSR AS. 1945. Vol. 46, No. 7. P. 304-306.
5. Feldbaum A.A. The elementary relay systems of automatic control // Automatics and telemechanics. 1949. No. 10. P. 249-260.
6. Krautwig F. Stabilitatsuntersuchungen an unstitigen Reglen Dargestellt an Hand einer Kontactnachlaufstenerung // Archiv. fur Electrotechnik. 1941. Bd. 25, № 2. S. 117-126.
7. Methods of research of nonlinear systems of automatic control / under the ed. of R.A. Nelepin. M.: Nauka, 1975. 447 pp.
8. Kazakevich V.V. On the theory of trigger regulators // Automatics and telemechanics. 1951. No. 1. P. 41-60.
9. Petrov V.V., Ulanov G.M. Theory of two elementary relay systems of control // Automatics and telemechanics. 1950. No. 5. P. 289-299.
10. Brusin V.A. Dynamics of the elementary model of a follower-up system with backlash // Radiophysics. 1962. Vol. 5, No. 4. P. 751-764.
11. Popov V.M. On absolute stability of nonlinear systems of automatic control // Automatics and telemechanics. 1961. No. 8. P. 961-

ка. 1961. № 8. С. 961-979.

12. Гелиг А.Х. К расчету устойчивости систем регулирования с запаздыванием и люфтом // Энергомашиностроение. 1967. № 7. С. 1-20.

13. Брусин В.А. Об абсолютной устойчивости следящей системы с люфтом // Радиофизика. 1964. № 3. С. 17-29.

14. Цыпкин Я.З. Релейные автоматические системы. М.: Наука, 1974. 575 с.

15. Якубович В.А. Решение некоторых матричных неравенств, встречающихся в теории автоматического регулирования // Докл. АН СССР. 1962. Т. 143, № 6. С. 1071-1080.

16. Kalman R.E. Ljapunov Functions for the problem of Lur'e in Automatic Control // Proc. of the Nat. Akad. of Sci. of USA. 1963. Vol. 49, No. 2. P. 201-205.

17. Красносельский М.А., Покровский А.В. Системы с гистерезисом. М.: Наука, 1983. 271 с.

18. Леонов Г.А., Филина М.Ю. Необходимые условия устойчивости в целом дифференциальных систем с гистерезисной правой частью // Проблемы современной теории периодических движений. Ижевск, 1981. № 5. С. 39-44.

19. Леонов Г.А., Филина М.Ю. Неустойчивость и колебания систем с гистерезисными нелинейностями // Автоматика и телемеханика. 1983. № 1. С. 44-49.

20. Гелиг А.Х., Леонов Г.А., Якубович В.А. Устойчивость нелинейных систем с неединственным положением равновесия. М.: Наука, 1978. 400 с.

21. Филиппов А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985. 224 с.

22. Филина М.Ю. Устойчивость и колебания решений дифференциальных уравнений с гистерезисными функциями: автореф. дис. … канд. физико-математ. наук. Л.: Изд-во ЛГУ, 1984. 12 с.

23. Евдокимов С.М. Абсолютная устойчивость двумерных систем с одной гистерезисной нелинейностью // Дифференциальные уравнения и процессы управления. 2008. № 3. С. 1-18.

979.

12. Gelig A.Kh. On the calculation of stability of control systems with delay and backlash // Power engineering. 1967. No. 7. P. 1-20.

13. Brusin V.A. On absolute stability of a follower-up system with backlash // Radiophysics. 1964. No. 3. P. 17-29.

14. Tsypkin Ya.Z. Relay automatic systems. M.: Nauka, 1974. 575 pp.

15. Yakubovich V.A. The solution of some matrix inequalities in the theory of automatic control // Reports of the USSR AS. 1962. Vol. 143, No. 6. P. 1071-1080.

16. Kalman R.E. Ljapunov Functions for the problem of Lur'e in Automatic Control // Proc. of the Nat. Akad. of Sci. of USA. 1963. Vol. 49, No. 2. P. 201-205.

17. Krasnoselskiy M.A., Pokrovskiy A.V. Systems with hysteresis. M.: Nauka, 1983. 271 pp.

18. Leonov G.A., Filina M.Yu. Necessary conditions of stability in the whole of differential systems with a hysteresis right part // Problems of the modern theory of periodic motion. Izhevsk, 1981. No. 5. P. 39-44.

19. Leonov G.A., Filina M.Yu. Instability andvibrations of systems with hysteresis nonlinearities // Automatics and telemechanics. 1983. No. 1. P. 44-49.

20. Gelig A.Kh., Leonov G.A., Yakubovich V.A. Stability of nonlinear systems with nonunique position of balance. M.: Nauka, 1978. 400 pp.

21. Filippov A.F. The differential equations with discontinuous right part. M.: Nauka, 1985. 224 pp.

22. Filina M.Yu. Stability and oscillations of solutions of the differential equations with hysteresis functions: Dissertation abstract for the Candidate of Physics and Mathematics degree. L.: LGU publishing house, 1984. 12 pp.

23. Evdokimov S.M. Absolute stability of two-dimensional systems with one hysteresis nonlinearity // Differential equations and control processes. 2008. No. 3. P. 1-18.