УДК 517.997; 517.919
ББК 22.19
Ш 96

Шумафов М.М.
Кандидат физико-математических наук, профессор, зав. кафедрой математического анализа и методики преподавания математики факультета математики и компьютерных наук Адыгейского государственного университета, тел. (8772) 59-39-05

Устойчивость систем дифференциальных уравнений с гистерезисными нелинейностями

(Рецензирована)

Аннотация

Рассматриваются вопросы устойчивости дифференциальных систем с гистерезисными нелинейностями. Получены новые частотные критерии глобальной асимптотики, абсолютной устойчивости и дихотомии систем с гистерезисом в некритическом и критическом случаях. Гистерезисные функции могут содержать несколько петель с любым направлением обхода петель. Результаты статьи являются обобщением результатов работ [1-3].

Ключевые слова: *гистерезисная функция, система с гистерезисом, глобальная асимтотика, абсолютная устойчивость, дихотомичность, петля гистерезиса, частотный критерий.*

Shumafov M.M.
Candidate of Physics and Mathematics, Professor, Head of Department of Mathematical Analysis and Methodology of Teaching Mathematics of Mathematics and Computer Science Faculty, Adyghe State University, ph. (8772) 59-39-05

Stability of systems of differential equations with hysteresis nonlinearities

Abstract

Problems of the stability of differential systems with hysteresis nonlinearities are considered. New frequency criteria for global asymptotics, absolute stability and dichotomy of systems with hysteresis in critical and noncritical cases are obtained. Here hysteresis functions may contain several loops which may be bypassed in arbitrary directions. The results of the present paper are a generalization of the results of papers [1-3].

Keywords: *hysteresis function, a system with hysteresis, global asymptotics, absolute stability, dichotomy, hysteresis loop, frequency criterion.*

1. Введение

В различных областях техники широко распространены устройства, динамика которых описывается дифференциальными уравнениями с гистерезисными функциями. К таким устройствам относятся, например, системы автоматического управления, в которых возникает люфт, сухое трение, некоторые приборы имеют зоны нечувствительности, происходит пространственное запаздывание управляющего сигнала. Первые теоретические исследования систем с гистерезисными нелинейностями появились в 40-е годы прошлого столетия в классических работах А.А. Андронова, Н.Н. Баутина [4], А.А. Фельдбаума [5] и Ф. Краутвига [6]. Ряд результатов по исследованию двумерных систем с гистерезисом был получен также в более поздних работах Р.А. Нелепина [7], В.В. Казакевича [8], В.В. Петрова, Г.М. Уланова [9], В.А. Брусина [10] и др. В этих работах использовались методы фазовой плоскости и точечных отображений, а гистерезисные функции имели «стандартный» вид. В последующие годы в работах В.М. Попова [11], В.А. Якубовича [12], Н.Е. Барабанова и В.А. Якубовича [3], А.Х. Гелига [12], В.А. Брусина [13], Я.З. Цыпкина [14] и др. были получены частотные критерии различных типов поведения решений систем с гистерезисными функциями. Важную роль при установлении этих критериев сыграли результаты В.А. Якубовича [15] и Р.Е. Калмана [16] по решению специальных матричных неравенств.

Различным вопросам, связанным с гистерезисными нелинейностями, посвящено большое число работ, список которых можно найти, например, в статьях [1-3, 23] и в фундаментальной монографии М.А. Красносельского и А.В.Покровского [17].

В настоящей статье получены новые частотные критерии глобальной асимптотики, абсолютной устойчивости и дихотомии дифференциальных систем с гистерезисными нелинейностями. Рассматриваются два случая: некритический, когда матрица линейной части системы гурвицева, и критический, когда эта матрица особая. Гистерезисные функции, в отличие от рассматривавшихся в литературе случаев, могут содержать несколько петель, направления обхода которых любые.

2. Постановка задачи

Рассмотрим систему

$$\dot{x} = Px + q\xi, \quad \sigma = r^* x \qquad (\dot{x} \equiv dx/dt), \tag{1}$$

$$\xi = \varphi[\sigma, \varphi_0]_t, \tag{2}$$

где P – вещественная постоянная $(n \times n)$-матрица, q, r – вещественные постоянные n-мерные векторы $(q \neq 0,\ r \neq 0)$, $\varphi[\sigma, \varphi_0]_t$ – гистерезисная функция, $\sigma = \sigma(t)$ и $\xi = \xi(t)$ – скалярные функции от t (t – время), $x \in R^n$ – вектор состояния, звездочка $(*)$ означает транспонирование.

В работах [1-3] были получены достаточные частотные условия абсолютной устойчивости системы (1), (2), а в [18] – необходимые условия асимптотической устойчивости в целом. В статье [19] рассматривались вопросы неустойчивости и наличия свойства колебательности системы (1), (2). Отметим, что общая теория систем с гистерезисом развита в монографии [17], где разработаны общие методы описания и исследования широких классов систем с гистерезисом.

Основная *цель настоящей статьи* – получить новые частотные критерии абсолютной устойчивости, глобальной асимптотики и наличия свойства дихотомии для класса систем вида (1), (2). Доказательства соответствующих критериев основаны на некотором развитии прямого метода Ляпунова и применении частотной теоремы Якубовича-Калмана [20].

3. Определения основных понятий

Напомним определения основных понятий, которые будут использованы ниже.

Определение 1 (гистерезисной функции). Предположим, что для каждого $\sigma_0 \in (-\infty, +\infty)$ задано множество $E[\sigma_0]$ «начальных значений». Пусть далее любому $t \in [0, +\infty)$, каждой непрерывной на $[0, t]$ функции $\sigma(\tau)$ $(0 \leq \tau \leq t)$ и любому $\varphi_0 \in E[\sigma_0]$ сопоставлено число $\varphi[\sigma, \varphi_0]_t$, причем $\varphi[\sigma, \varphi_0]_0 = \varphi_0$. В этом случае говорят, что на промежутке $[0, +\infty)$ задана гистерезисная функция $\varphi[\sigma, \varphi_0]_t$.

Если значение $\varphi[\sigma, \varphi_0]_t$ представляет собой непрерывную функцию двух численных аргументов t и σ, то гистерезисная функция называется непрерывной. Если функция $\varphi[\sigma(\tau), \varphi_0]_t\ (0 \leq \tau \leq t)$ не является непрерывной, то гистерезисная функция называется разрывной или релейно-гистерезисной. В этом случае под $\varphi[\sigma, \varphi_0]_t$ в (2) следует понимать «дополненную функцию» подобно тому, как это делается для обычных разрывных функций [20, 21].

Таким образом, гистерезисной функцией является семейство операторов. Указанное описание гистерезисной функции введено в работах [2, 3] (подробнее см. [1, 17]). В частном случае уравнение (2) может иметь вид: $\xi = \varphi(\sigma)$, где $\varphi(\sigma)$ – однозначная функция. (Здесь значение $\xi(t)$ равно $\xi(t) = \varphi(\sigma(t))$.) Типичные графики гистерезисных функций представлены на рисунке 1.

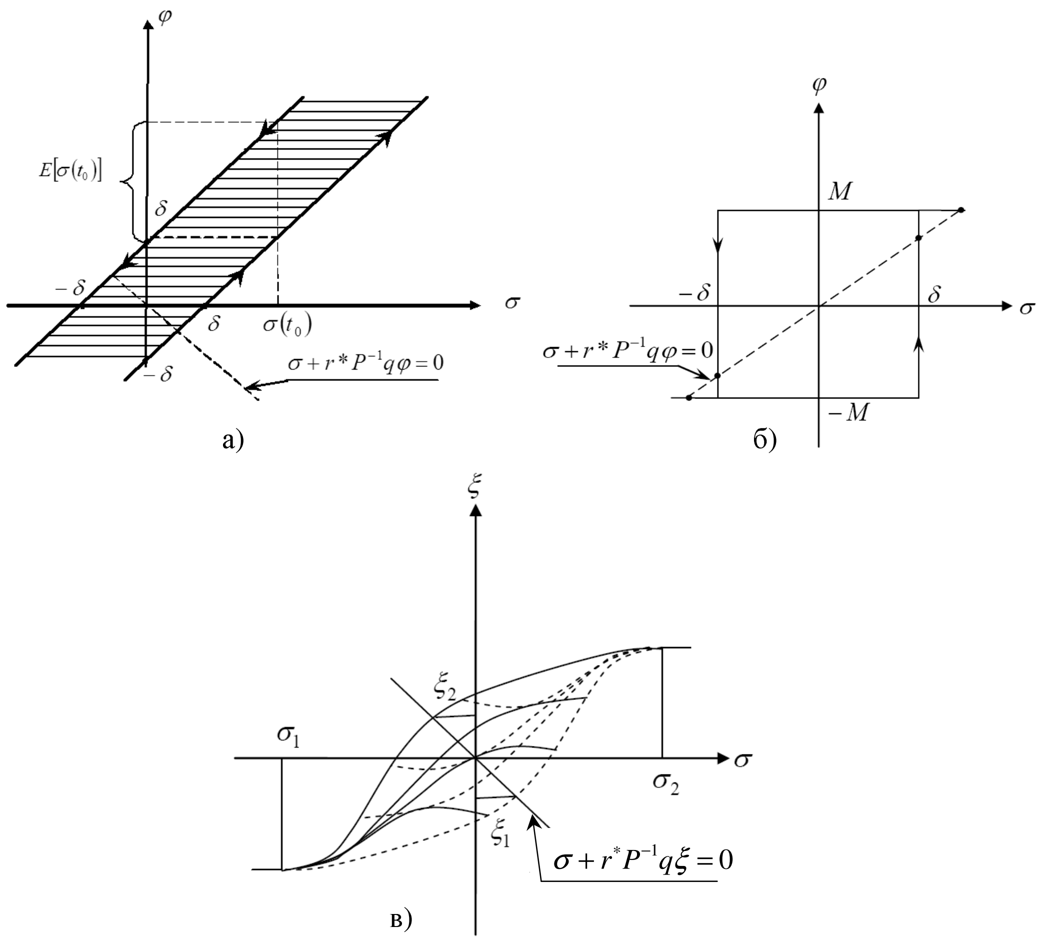

Рис. 1. Типичные графики гистерезисных функций: а) люфт; б) реле с гистерезисом; в) гистерезисная функция с заданным направлением обхода петли

На рисунке 1а) изображена гистерезисная нелинейность типа «люфт». Движение $(\sigma(t), \xi(t))$ происходит по горизонтальному отрезку до тех пор, пока изображающая точка не попадет на одну из граничных прямых: $\xi = \sigma - \delta$ или $\xi = \sigma + \delta$. Если точка попадет на нижнюю наклонную прямую $\xi = \sigma - \delta$ и $\sigma(t)$ возрастает, то дальше движение идет по нижней наклонной прямой (в соответствии с направлением стрелки на рисунке); при убывании $\sigma(t)$ движение вновь происходит по горизонтальному отрезку. Если изображающая точка попадет на верхнюю наклонную прямую и $\sigma(t)$ убывает, то в дальнейшем движение происходит по верхней наклонной прямой $\xi = \sigma + \delta$ и т.д. В данном случае $E[\sigma_0] = [\sigma_0 - \delta, \sigma_0 + \delta]$, где $\sigma_0 = \sigma(0)$.

На рисунке 1б) изображен график гистерезисной функции релейного типа. Петлю гистерезиса следует обходить в соответствии с направлениями стрелок на рисунке. Здесь множество $E[\sigma_0]$ состоит из двух точек, если $|\sigma_0| < \delta$; из одной точки $\{M \operatorname{sgn} \sigma_0\}$ при $|\sigma_0| > \delta$, и из отрезка $[-M, M]$, если $|\sigma_0| = \delta$ $(\sigma_0 = \sigma(0))$.

На рисунке 1в) изображен график гистерезисной функции с заданной петлей. Движение $(\sigma(t), \xi(t))$ происходит по сплошным линиям, если $\sigma(t)$ убывает, и по пунктирным, если $\sigma(t)$ возрастает. Множество $E[\sigma_0]$ представляет собой вертикальный отрезок: пересечение вертикальной прямой $\sigma = \sigma_0$ с заполненной петлей гистерезиса $(\sigma_1 < \sigma_0 < \sigma_2)$; это множество состоит из одной точки, если $\sigma \notin (\sigma_1, \sigma_2)$.

Таким образом, во всех трех случаях на рисунке 1 нелинейности определяют множество $E[\sigma_0]$ и оператор $\varphi[\sigma, \varphi_0]$: $\sigma(\tau) \to \xi(\tau) = \varphi[\sigma(\tau), \varphi_0]$ $(0 \le \tau \le t)$. Аналогично можно описать и другие гистерезисные нелинейности, встречающиеся на практике.

Определение 2 [2]. Гистерезисная функция обладает свойством предельной непрерывности (или просто предельно непрерывна), если из соотношений $\sigma(t) \to \sigma_*$, $\varphi[\sigma, \varphi_0]_t \to \varphi_*$ при $t \to +\infty$ следует $\varphi_* \in E[\sigma_*]$ и $\varphi[\sigma_*, \varphi_0]_t \equiv \varphi_*$.

Определение 3 [2]. Гистерезисная функция называется ограниченной, если для любого $k > 0$ можно указать такое $k_1 > 0$, что из неравенства $|\sigma(t)| < k$ следует $|\varphi[\sigma(t), \varphi_0]|_t < k_1$ для любых t.

Определение 4 [1]. Под решением системы (1), (2) на интервале (t_1, t_2) понимается пара функций $(x(t), \xi(t))$ такая, что:

1) $x(t)$ – абсолютно непрерывная вектор-функция;

2) соотношения (1), (2) выполнены почти всюду на (t_1, t_2);

3) значение $\xi(t) \in E[\sigma(t)]$ при всех $t \in (t_1, t_2)$.

Из 3) следует, что в случае разрывной гистерезисной функции точка $(\sigma(t), \xi(t))$ на некотором интервале (t_1, t_2) может принадлежать вертикальному отрезку $\sigma = \sigma_0$, $\varphi(\sigma_0 - \delta) \le \xi \le \varphi(\sigma_0 + \delta)$.

В [22] доказана теорема существования и продолжимости решений системы (1), (2) с гистерезисными функциями достаточно широкого класса.

Теорема (существования и продолжимости решений [22]). Если в системе (1), (2) гистерезисная функция $\varphi[\sigma, \varphi_0]_t$ представляет собой одну из нелинейностей, графики которых имеют вид, изображенный на рисунке 1 (люфт, нелинейность релейного типа или с заданной петлей гистерезиса), то решение системы (1), (2) с любыми начальными данными t_0, x_0, $\xi_o \in E[r^* x_o]$ существует и продолжимо на $[t_0, +\infty)$.

Определение 5. Стационарным множеством системы (1), (2) называется множество

$$\{(x_0, \xi_0) \in R^{n+1} \mathrm{I}\, P x_0 + q\xi_0 = 0, \quad \xi_0 \equiv \varphi[r^* x_0, \ \varphi_0]_t\}.$$

Определение 6. Будем говорить, что система (1), (2) обладает глобальной асимптотикой, если любое ее решение стремится при $t \to +\infty$ к стационарному множеству.

Определение 7. Система (1), (2) дихотомична, если любое ограниченное при $t > 0$ решение стремится при $t \to +\infty$ к стационарному множеству.

Обозначим через $K=\{\varphi\}$ класс нелинейных блоков, описываемых гистерезисными функциями вида (2) и удовлетворяющих соотношению – условию «секториальности»

$$0\le\sigma(t)\varphi[\sigma,\varphi_0]_t\le\mu_0\,\sigma(t)^2,\quad \varphi[0,\varphi_0]_t=0\quad(\mu_0\le\infty).\tag{3}$$

Определение 8. Система (1), (2) называется абсолютно устойчивой в классе K нелинейных блоков, удовлетворяющих условию (3), если любая система (1), (2) с $\varphi\in K$ асимптотически устойчива в целом, и при этом устойчивость равномерна для всех $\varphi\in K$.

4. Формулировка результатов

Будем различать два случая: первый – некритический, когда в (1) матрица P имеет одно нулевое собственное значение, а остальные лежат в открытой левой полуплоскости.

Предположим, что гистерезисная функция (2) удовлетворяет всем условиям, обеспечивающим существование, продолжимость на $[0,+\infty)$ и правостороннюю зависимость решения от начальных условий.

4.1. Некритический случай: матрица P гурвицева

Введем в рассмотрение передаточную функцию линейной части системы (1), (2):

$$x(\lambda)=r^*(P-\lambda I)q,\quad \lambda\in C,\tag{4}$$

где I – едничнаая $(n\times n)$-матрица.

Теорема 1 (о глобальной асимптотике). Предположим, что P гурвицева матрица, гистерезисная функция $\varphi[\sigma,\varphi_0]_t$ удовлетворяет соотношению (3) и при $\mu_0=\infty$ ограничена, и передадочная функция (4) невырождена. Пусть, далее, выполнены следующие условия:

1) система (1), (2) диссипативна;

2) существуют числа $\delta>0$, $\varepsilon>0$, $\tau\ge0$ и θ такие, что выполнено неравенство

$$\pi(\omega)\equiv\tau/\mu_0+\operatorname{Re}(\tau+\theta i\,\omega)\chi(i\,\omega)-\varepsilon\omega^2|\chi(i\,\omega)|^2>\delta\qquad\forall\omega\ge0;$$

3) существует непрерывная функция $F(\sigma)$ и число ν, для которых выполнено неравенство

$$\left|\varphi[\sigma,\varphi_0]_t-F[\sigma(t)]\right|\le\nu\left|\varphi[\sigma,\,\varphi_0]_t\right|;$$

4) $4\delta\varepsilon>(\theta\nu)^2$.

Тогда для любого решения $(x(t),\xi(t))$ системы (1), (2) $\lim\limits_{t\to+\infty}x(t)=0.$

Если, кроме того, гистерезисная функция $\varphi[\sigma,\varphi_0]_t$ предельно непрерывна, то $(x(t)\equiv0,\,\xi(t)\equiv0)$ является стационарным решением системы (1), (2), и тогда система (1), (2) обладает глобальной асимптотикой.

Замечание 1. Условия теоремы 1 обеспечивают также дихотомичность системы (1), (2).

Замечание 2. Условие 1) диссипативности в теореме 1 будет выполнено, если до-