УДК 517.9
ББК 22.161.6
Т 49

Тлячев В.Б.
Доктор физико-математических наук, профессор, зав. кафедрой теоретической физики инженерно-физического факультета Адыгейского государственного университета, тел. (8772) 59-39-08, e-mail: stvb2006@rambler.ru
Ушхо А.Д.
Кандидат физико-математических наук, старший преподаватель кафедры теоретической физики инженерно-физического факультета Адыгейского государственного университета, тел. (8772) 59-39-08, e-mail: uschho76@rambler.ru
Ушхо Д.С.
Кандидат физико-математических наук, доцент, зав. кафедрой информатики и вычислительной техники факультета математики и компьютерных наук Адыгейского государственного университета, тел. (8772) 59-39-01, e-mail: damirubych@mail.ru

Об отсутствии изолированных периодических решений у квадратичной системы, имеющей ось симметрии

(Рецензирована)

Аннотация

Рассмотрен пример квадратичной динамической системы, которая имеет инвариантную прямую и хотя бы один предельный цикл при очень близких к нулю положительных значениях параметра. Построены фазовые портреты системы при различных значениях этого параметра в круге Пуанкаре. В результате обобщения доказаны две теоремы. Одна теорема – об отсутствии предельных циклов у квадратичной системы, имеющей четыре особые точки, другая – также об отсутствии предельных циклов у системы, если векторное поле симметрично относительно хотя бы одной оси симметрии.

Ключевые слова: *квадратичная система, особая точка, ось симметрии, фокус, предельный цикл, фазовый портрет, инвариантная прямая.*

Tlyachev V.B.
Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Head of Theoretical Physics Department of Engineering-Physics Faculty, Adyghe State University, ph. (8772) 59-39-08, e-mail: stvb2006@rambler.ru
Ushkho A.D.
Candidate of Physics and Mathematics, Senior Lecturer of Theoretical Physics Department of Engineering-Physics Faculty, Adyghe State University, ph. (8772) 59-39-08, e-mail: uschho76@rambler.ru
Ushkho D.S.
Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Head of Informatics and Computer Equipment Department of Mathematics and Computer Science Faculty, Adyghe State University, ph. (8772) 59-39-01, e-mail: damirubych@mail.ru

On absence of the isolated periodic solutions for the quadratic system with axis of symmetry

Abstract

This paper considers an example of a quadratic dynamical system, which has an invariant straight line and at least one limit cycle with very close to zero positive different values of the parameter. The phase portraits of the system under different conditions of this parameter in terms of the Poincare circle are constructed. As a result of a generalization two theorems are proved. One theorem is on the absence of limit cycles in the quadratic system with four singular points and the other is also on the absence of limit cycles in the system, if the vector field is symmetric with respect to at least one axis of symmetry.

Keywords: *quadratic differential system, singular point, axis of symmetry, focus, limit cycle, phase portrait, bifurcation diagram, invariant straight line.*

Введение

В данной работе рассматриваются плоские автономные дифференциальные полиномиальные системы второго порядка

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \sum\limits_{i+j=0}^{2} a_{ij} x^i y^j \equiv P_2(x,y), \\ \dfrac{dy}{dt} = \sum\limits_{i+j=0}^{2} b_{ij} x^i y^j \equiv Q_2(x,y), \end{cases} \tag{1}$$

где $a_{ij}, b_{ij} \in R$, $(P_2, Q_2) = 1$, которые часто встречаются во многих областях прикладной математики. Несмотря на то, что вопросам, связанным с такими системами, уделяется большое внимание и имеется весьма обширная библиографияих исследования, до сих пор не достигнуто полное понимание всех свойств данной системы. В качестве обзора по этому поводу см., например, работу [1] и монографию [2]. В частности, все еще открыта для таких систем такая классическая проблема, как 16-я проблема Гильберта [Hilbert, 1900, 1902] о максимальном числе и относительном положении предельных циклов системы (1).

Тема, посвященная изучению вопросов, связанных с существованием, единственностью и отсутствием предельных циклов системы дифференциальных уравнений, является практически неисчерпаемой. Особенно много публикаций появилось по этой теме в 70-х годах прошлого столетия, но интерес к ней по-прежнему остается повышенным. Это объясняется той ролью, которую играют квадратичные системы в приложениях. Так, некоторые вопросы химической кинетики, астрофизики, математической биологии и др. приводят к системе (1) следующего специального вида [3]:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x(a_{10}x + a_{01}y + a_{00}), \\ \dfrac{dy}{dt} = y(b_{10}x + b_{01}y + b_{00}). \end{cases} \tag{2}$$

В работах [3] и [4] приводится доказательство отсутствия предельных циклов системы (2). Однако существуют квадратичные системы, имеющие одну инвариантную прямую и предельный цикл. Рассмотрим следующий пример:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = (x+\varepsilon)y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 4 - 2x - (2+\varepsilon)y - 2x^2 + 2xy + 3y^2, \end{cases} \tag{P_ε}$$

где ε – параметр такой, что на прямой $x + \varepsilon = 0$ данная система не имеет особых точек.

В ограниченной части фазовой плоскости система (P_ε) имеет две особые точки $M(1{,}0)$ и $N(-2{,}0)$.

Для установления типа особой точки $M(1{,}0)$ перенесем начало координат в эту точку:

$$
\begin{cases}
\dfrac{dx}{dt} = (1+\varepsilon)y + xy \equiv P(x,y), \\
\dfrac{dy}{dt} = -6x - \varepsilon y - 2x^2 + 2xy + 3y^2 \equiv Q(x,y).
\end{cases}
\qquad (\overline{P}_\varepsilon)
$$

Особая точка (0,0) системы ($\overline{P}_\varepsilon$) при $\varepsilon = 0$ (будем обозначать ($\overline{P}_0$)) имеет чисто мнимые корни характеристического уравнения, то есть точка (0,0) – центр или фокус [4]. Так как система ($\overline{P}_\varepsilon$) имеет инвариантную прямую $x+\varepsilon+1=0$, то в силу работы [5] данная система не имеет предельных циклов. Для решения проблемы центра-фокуса вычисляем третью фокусную величину: $\alpha_3 = \dfrac{4\pi}{3\sqrt{6}} > 0$. Согласно [4] точка (0,0) – сложный неустойчивый однократный фокус.

Применив к системе ($\overline{P}_\varepsilon$) преобразование Пуанкаре [4] $x = 1/z, \quad y = u/z$, получим систему

$$
\begin{cases}
\dfrac{du}{dt} = -2 + 2u - 6z + 2u^2 - \varepsilon uz - (\varepsilon+1)u^2 z, \\
\dfrac{dz}{dt} = -uz - (\varepsilon+1)uz^2.
\end{cases}
\qquad (\overline{\overline{P}}_\varepsilon)
$$

Система ($\overline{\overline{P}}_\varepsilon$) имеет два простых седла $A\left(u = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}, z=0\right)$ и $B\left(u = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}, z=0\right)$.

В то же время преобразование Пуанкаре, взятое в виде $x = 1/z, \quad y = u/z$, приводит систему ($\overline{P}_\varepsilon$) к виду

$$
\begin{cases}
\dfrac{d\upsilon}{dt} = -2\upsilon + P_3(\upsilon, z), \\
\dfrac{dz}{dt} = -3z + Q_3(\upsilon, z),
\end{cases}
\qquad (\tilde{P}_\varepsilon)
$$

где $P_3(\upsilon, z)$ и $Q_3(\upsilon, z)$ – многочлены третьей степени, не содержащие линейных и свободных членов.

У системы ($\tilde{P}_\varepsilon$) особая точка (0,0) является простым устойчивым узлом.

Таким образом, система ($\overline{P}_\varepsilon$) при $\varepsilon = 0$ имеет на бесконечности устойчивый узел $D(\upsilon = z = 0)$ и простые седла $A\left(u = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}, z=0\right)$ и $B\left(u = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}, z=0\right)$. Фазовый портрет системы ($\overline{P}_\varepsilon$) при $\varepsilon = 0$ в круге Пуанкаре изображен на рисунке 1.

При переходе от системы ($\overline{P}_0$) к ($\overline{P}_\varepsilon$), где ε – сколь угодно малое положительное число, как следует из вида правых частей уравнений системы ($\overline{P}_\varepsilon$), точка (0,0) превращается в простой устойчивый фокус. Следовательно, согласно теории бифуркаций [4], устойчивый фокус в точке $M(1,0)$ системы (P_ε) окружает хотя бы один неустойчивый предельный цикл.

Можно показать, что точка $N(-2{,}0)$ является простым устойчивым фокусом для всех $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$. Здесь ε_0 – достаточно малое положительное число.

Заметим, что особая точка $N(-2{,}0)$ системы (P_ε) перешла в особую точку $\overline{N}(-3{,}0)$ системы ($\overline{P_\varepsilon}$).

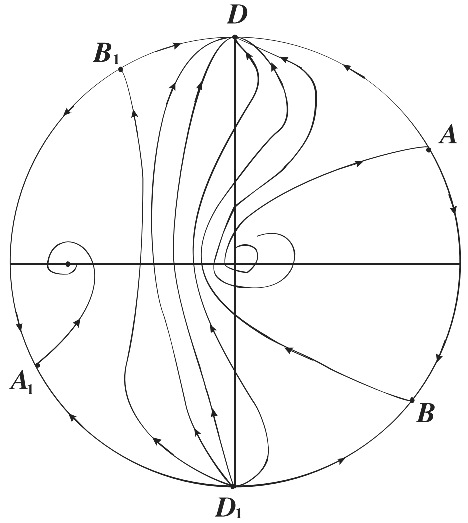

Рис. 1. Фазовый портрет системы ($\overline{P_\varepsilon}$) при $\varepsilon = 0$ в круге Пуанкаре

Покажем, что при переходе к достаточно малым положительным значениям параметра ε особую точку $\overline{N}(-3{,}0)$ не окружают предельные циклы системы ($\overline{P_\varepsilon}$). Для этого воспользуемся результатами работы [6], рассмотрев функцию

$$\Delta(x, y) = \frac{Q(x, y)}{P(x, y)} + \frac{Q(x, -y)}{P(x, -y)} \equiv \frac{4(x - \varepsilon/2)}{x + \varepsilon + 1}.$$

Так как особая точка $\overline{N}(-3{,}0)$ системы ($\overline{P_\varepsilon}$) расположена левее инвариантной прямой $x = -\varepsilon - 1$ и при $x < -\varepsilon - 1$ $\Delta(x, y) > 0$, то согласно работе [6] особую точку $\overline{N}(-3{,}0)$ не окружают замкнутые траектории.

На рисунке 2 изображен фазовый портрет системы ($\overline{P_\varepsilon}$) при очень близких к нулю положительных значениях параметра ε.

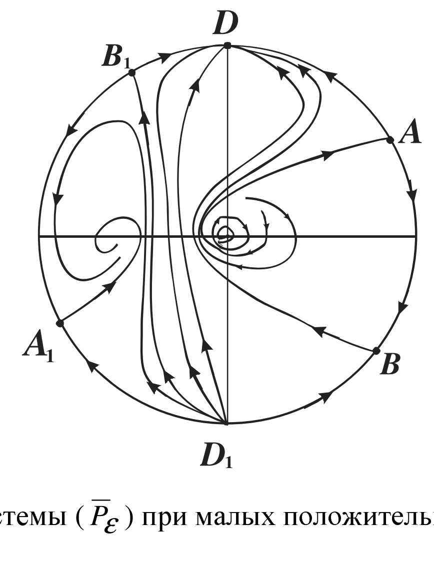

Рис. 2. Фазовый портрет системы ($\overline{P_\varepsilon}$) при малых положительных значениях параметра ε

Таким образом, существуют значения параметра ε, при которых система (P_ε) имеет инвариантную прямую $x+\varepsilon=0$ и хотя бы один предельный цикл.

В связи с этим примером естественно возникает вопрос о достаточных условиях отсутствия предельных циклов у квадратичной системы, имеющей одну инвариантную прямую.

Основной результат

В работах [7, 8] построена теория осей симметрии S- и N-типов полиномиальных векторных полей, которая позволяет провести доказательство отсутствия предельных циклов у квадратичной системы, имеющей ось симметрии. Заметим при этом, что ось симметрии S-типа является инвариантной прямой системы [7].

Напомним некоторые результаты, касающиеся вопросов существования, единственности и отсутствия предельных циклов системы (1). На наш взгляд, они являются важными для теории дифференциальных систем вида (1) и последующих в данной работе рассуждений.

В работе [9] приводится доказательство, принадлежащее китайскому математику Цинь Юань-сюнь, следующей теоремы: если дифференциальное уравнение траекторий системы (1) имеет в качестве предельного цикла алгебраическую кривую второго порядка, то других предельных циклов это уравнение не имеет. Авторы работы [10] установили достаточные признаки отсутствия и единственности предельных циклов дифференциального уравнения

$$\frac{du}{dx}=\frac{-x+ax^2+(bx+c)u+du^2}{(x+1)u}. \tag{3}$$

В работе [11] доказано, что дифференциальное уравнение $(b_{10}x+y)dy=\sum_{i+j=1}^{2}a_{ij}x^i y^j dx$ не может иметь более одного предельного цикла, и если есть предельный цикл, то он грубый. Достаточные условия единственности и отсутствия предельных циклов дифференциального уравнения $\frac{dy}{dx}=\frac{-x+ax^2+bxy+cy^2+\alpha y}{y+y^2}$ найдены в статье [12]. Согласно результатам заметки [13] дифференциальное уравнение (3) имеет не более одного предельного цикла. В работе [14] найдены достаточные условия отсутствия предельных циклов, а также существования вокруг фокуса системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=-my+y^2,\\ \dfrac{dy}{dt}=ax+by+cx^2+dxy+ey^2\end{cases}$$

хотя бы одного предельного цикла и петли сепаратрисы седла.

Докажем, что система (1) не имеет предельных циклов, если она обладает осью симметрии S-типа или N-типа.

Напомним некоторые сведения об осях симметрии S-типа [7].

Определение. Пусть преобразование $\bar{x}=x+ky$, $\bar{y}=-kx+y$ переводит систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \sum\limits_{i+j=1}^{n} a_{ij} x^i y^j \equiv P_n(x,y), \\ \dfrac{dy}{dt} = \sum\limits_{i+j=1}^{n} b_{ij} x^i y^j \equiv Q_n(x,y), \end{cases} \tag{4}$$

где $a_{ij}, b_{ij} \in R$, $(P_n, Q_n) = 1$, $n \geq 2$, в систему

$$\begin{cases} \dfrac{d\overline{x}}{dt} = \overline{P}_n(\overline{x}, \overline{y}), \\ \dfrac{d\overline{y}}{dt} = \overline{Q}_n(\overline{x}, \overline{y}), \end{cases} \tag{5}$$

Прямую $y = kx$ называют осью симметрии S-типа поля направлений системы (4), если $\overline{P}_n(\overline{x}, -\overline{y}) \equiv \overline{P}_n(\overline{x}, \overline{y})$, $\overline{Q}_n(\overline{x}, \overline{y}) \equiv \overline{y}\overline{Q}_{n-1}(\overline{x}, \overline{y})$, $\overline{Q}_{n-1}(\overline{x}, -\overline{y}) \equiv \overline{Q}_{n-1}(\overline{x}, \overline{y})$, где $\overline{Q}_i(\overline{x}, \overline{y})$ – многочлен степени $i (i = n, n-1)$, $\overline{P}_n(\overline{x}, \overline{y})$ – многочлен степени n.

Система (4) может иметь не более $n+1$ осей симметрии S-типа, а при $n = 2m$, $m \in N$ эта система не может иметь четного числа осей симметрии. Следовательно, система (1) может иметь либо одну, либо три оси симметрии S-типа.

Справедливо также утверждение [7] о том, что если система (4) имеет n^2 особых точек в ограниченной части фазовой плоскости и $n+1$ осей симметрии S-типа при отсутствии осей симметрии N-типа (по терминологии [8]), то все особые точки расположены на осях симметрии, причем начало координат является особой точкой этой системы.

Из данного утверждения и того факта, что любая ось симметрии S-типа системы (4) является ее инвариантной прямой [7], следует, что система (1), имеющая три оси симметрии S-типа, ациклична при наличии у нее четырех особых точек. Система (1), имеющая ось симметрии S-типа и одну особую точку, также является ацикличной, так как ее единственная особая точка расположена на оси симметрии S-типа.

Поэтому мы рассмотрим систему (1), имеющую одну ось симметрии S-типа и не менее двух особых точек.

Согласно [7] ось абсцисс является осью симметрии S-типа системы (1) тогда и только тогда, когда она имеет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a_{00} + a_{10}x + a_{20}x^2 + a_{02}y^2, \\ \dfrac{dy}{dt} = y(r_{00} + r_{10}x). \end{cases} \tag{6}$$

Так как систему (1), имеющую одну ось симметрии S-типа $y = kx$, можно привести к виду (6) совмещением прямой $y = kx$ с осью абсцисс, то, не уменьшая общности, будем рассматривать вопрос о предельных циклах системы (6).

Теорема 1. Если система (6) имеет четыре особые точки, то у нее отсутствуют предельные циклы.

Доказательство. Система (6) имеет четыре особые точки в двух случаях:

$$a_{10}^2 - 4a_{00}a_{20} > 0, \quad -\frac{r_{00}}{r_{10}} \in (x_1, x_2), \quad a_{20}a_{02} > 0, \tag{7}$$

$$a_{10}^2 - 4a_{00}a_{20} > 0, \quad -\frac{r_{00}}{r_{10}} \in (-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty), \quad a_{20}a_{02} < 0, \tag{8}$$

где x_1 и x_2 – корни квадратного трехчлена $a_{00} + a_{10}x + a_{20}x^2$, причем $x_1 < x_2$.

Пусть выполняется (8). Воспользуемся критерием Дюлака [4], взяв в качестве функции Дюлака $D(x, y) = 1/y$:

$$\left(a_{02}y + \frac{a_{00} + a_{10}x + a_{20}x^2}{y}\right)'_x = \frac{a_{10} + 2a_{20}x}{y}. \tag{9}$$

Из (9) следует, что любая замкнутая траектория системы (6), если она существует, непременно пересекает прямую $x = -\dfrac{a_{10}}{2a_{20}}$. Найдем

$$\left.\frac{dx}{dt}\right|_{x=-\frac{a_{10}}{2a_{20}}} = \frac{-(a_{10}^2 - 4a_{00}a_{20})}{4a_{20}} + a_{02}y^2. \tag{10}$$

В силу условий (8) выражение (10) знакопостоянно, следовательно, прямую $x = -\dfrac{a_{10}}{2a_{20}}$ не может пересекать замкнутая траектория системы (6). Тем самым доказано отсутствие не только предельных циклов, но и любых замкнутых контуров, образованных траекториями системы (6) при выполнении (8). Впрочем, отсюда также следует, что система (6) в рассматриваемом случае не имеет особых точек типа «центр».

Пусть далее выполняется условия (7). Так как ось симметрии S-типа – $y = 0$ является инвариантной прямой системы (6), то, очевидно, предельные циклы системы (6), если они имеются, расположены в полуплоскостях $y > 0$ и $y < 0$.

Для краткости введем обозначения: $\alpha = -\dfrac{r_{00}}{r_{10}}$, $\beta = \sqrt{\dfrac{-a_{20}(\alpha - x_1)(\alpha - x_2)}{a_{02}}}$. В этих обозначениях особыми точками типа «фокус» могут быть точки $M(\alpha, \beta)$, $N(\alpha, -\beta)$. Так как точки M и N симметричны относительно прямой $y = 0$, то нет необходимости в доказательстве отсутствия предельных циклов в отдельности вокруг каждой из этих точек. Поэтому докажем отсутствие предельных циклов, окружающих точку M.

В результате переноса начала координат в точку M система (6) примет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = (a_{10} + 2a_{20}\alpha)x + 2a_{02}\beta y + a_{20}x^2 + a_{02}y^2 \equiv F(x, y), \\ \dfrac{dy}{dt} = r_{10}x(\beta + y) \equiv G(x, y). \end{cases} \tag{11}$$

Здесь мы оставили обозначения фазовых переменных x и y неизменными.

Рассмотрим функцию

$$\Delta(x, y) \equiv \frac{F(x, y)}{G(x, y)} + \frac{F(-x, y)}{G(-x, y)} = \frac{2(a_{10} + 2a_{20}\alpha)}{r_{10}(\beta + y)}, \quad x \neq 0. \tag{12}$$

Так как прямую $y + \beta = 0$ не пересекают замкнутые траектории системы (12), то выражение (12) знакопостоянно при $y + \beta \neq 0$ и $a_{10} + 2a_{20}\alpha \neq 0$. Поэтому согласно работе [4] не существует замкнутых траекторий, окружающих особую точку M. Если