
УДК 517.2/3
ББК 22.161.1
П 18

Паранук В.И.

Кандидат физико-математических наук, профессор кафедры алгебры и геометрии факультета математики и компьютерных наук Адыгейского государственного университета, тел. (8772) 59-38-04, e-mail: pkomagu@mail.ru

Функции Макдональда от двух переменных (Рецензирована)

Аннотация

Строятся унитарные представления группы клеточно-треугольных матриц четвертого порядка, эквивалентные ранее рассмотренным представлениям той же группы [1]. Устанавливается вид оператора представления для некоторых подгрупп рассматриваемой группы. В частности, операторы представления являются интегральными преобразованиями с ядром. Вводятся в рассмотрение обобщенные функции Макдональда от двух переменных, выражаются ядра операторов представлений через эти функции. Устанавливаются некоторые функциональные соотношения для обобщенных функций Макдональда.

Ключевые слова: унитарное представление группы, преобразование Фурье, интегральный оператор с ядром.

Paranuk V.I.

Candidate of Physics and Mathematics, Professor of Algebra and Geometry Department of Mathematics and Computer Science Faculty, Adyghe State University, ph. (8772) 59-38-04, e-mail: pkomagu@mail.ru

Macdonald functions from two variables

Abstract

Unitary representations of group of cellular and triangular matrices of order 4, equivalent to earlier considered representations of the same group [1] are under construction. The type of the operator of representation for some subgroups of the considered group is established. In particular, operators of representation are integral transformations with a kernel. Macdonald generalized functions from two variables are entered into consideration, kernels of operators of representations are expressed through these functions. Some functional ratios for Macdonald generalized functions are established.

Keywords: unitary representation of group, Fourier's transformation, the integrated operator with a kernel.

В работе [1] были построены унитарные представления группы G матриц вида

$$g(\omega_1, \omega_2; r) = \begin{pmatrix} \omega_1 & \omega_2 r \\ 0 & \omega_2 \end{pmatrix},$$

где

$$\omega_1 = \begin{pmatrix} \tilde{n}h\alpha & sh\alpha \\ sh\alpha & ch\alpha \end{pmatrix}, \quad \omega_2 = \begin{pmatrix} \tilde{n}h\varphi & sh\varphi \\ sh\varphi & ch\varphi \end{pmatrix},$$

r – вещественная матрица второго порядка.

Представления $T_\lambda(g)$ были реализованы в пространстве функций $\hat{f}(\Theta, \Psi)$ финитных и бесконечно дифференцируемых

$$T_\lambda(g)\hat{f}(\Theta, \Psi) = e^{-\lambda(r_{11}ch\Theta ch\Psi + r_{22}sh\Theta sh\Psi + r_{12}ch\Theta sh\Psi + r_{21}sh\Theta ch\Psi)} \cdot \hat{f}(\Theta + \alpha, \Psi + \varphi), \quad (1)$$

где

$$r = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{pmatrix}.$$

Каждой функции $\hat{f}(\Theta, \Psi)$ из пространства представления поставим в соответствие ее преобразование Фурье $F(u, v)$:

$$F(u, v) = \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \hat{f}(\Theta, \Psi) e^{u\Theta + v\Psi} d\Theta d\Psi. \quad (2)$$

Интеграл (2) сходится при всех комплексных значениях u, v , поскольку функции $\hat{f}(\Theta, \Psi)$ по условию финитны и бесконечно дифференцируемы.

Формула обращения имеет вид

$$\hat{f}(\Theta, \Psi) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(u, v) e^{-u\Theta - v\Psi} dudv. \quad (3)$$

Обозначим через $\Theta_\lambda(g)$ оператор в пространстве функций $F(u, v)$, соответствующий оператору $T_\lambda(g)$ в пространстве функций $\hat{f}(\Theta, \Psi)$. Операторы $\Theta_\lambda(g)$ задают другую реализацию представлений $T_\lambda(g)$. При этом представление $\Theta_\lambda(g)$ эквивалентно представлению $T_\lambda(g)$, так как $\Theta_\lambda(g) = F T_\lambda(g) F^{-1}$, где F – оператор преобразования Фурье.

Найдем вид оператора $\Theta_\lambda(g)$ для элементов вида $g(\omega_1, \omega_2; 0)$. По формуле (1) оператор $T_\lambda[g(\omega_1, \omega_2; 0)]$ переводит $\hat{f}(\Theta, \Psi)$ в $\hat{f}(\Theta + \alpha, \Psi + \varphi)$. Тогда при $g = g(\omega_\alpha, \omega_\varphi; 0)$

$$\begin{aligned} \Theta_\lambda(g)F(u, v) &= \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \hat{f}(\Theta + \alpha, \Psi + \varphi) e^{u\Theta + v\Psi} d\Theta d\Psi = \\ &= e^{-u\alpha - v\varphi} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \hat{f}(\Theta, \Psi) e^{u\Theta + v\Psi} d\Theta d\Psi = e^{-u\alpha - v\varphi} \cdot F(u, v). \end{aligned} \quad (4)$$

Значит, гиперболическим вращениям из подгруппы Ω соответствуют операторы умножения на $e^{-u\alpha - v\varphi}$. Используем разложение

$$g(\omega_1, \omega_2; r) = g(\omega_1, \omega_2; \tilde{\omega}_1 \Delta \tilde{\omega}_2) = g(\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2^{-1}; 0) \cdot g(E_2, E_2; \Delta) \cdot g(\tilde{\omega}_1^{-1} \omega_1, \tilde{\omega}_2 \omega_2; 0),$$

где матрица Δ одного из видов, установленных в [1].

Найдем операторы $\Theta_\lambda(g)$, соответствующие элементам вида $g = g(E_2, E_2; \Delta)$. Условимся писать $g = g(E_2, E_2; \Delta_i) = g(\Delta_i)$, где символом Δ_i , $i = (1, \dots, 32)$, обозначены матрицы Δ соответствующего вида.

Пусть $g = g(\Delta_1)$. Тогда по формуле (1)

$$T_\lambda(g)\hat{f}(\Theta, \Psi) = e^{-\lambda((a+b)ch\Theta ch\Psi + (a-b)sh\Theta sh\Psi)} \hat{f}(\Theta, \Psi).$$

Условимся ограничиться унитарными представлениями, положив $\lambda = i\rho$, $\rho > 0$. Тогда

$$\Theta_{i\rho}(g)F(u, v) = \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} e^{-i\rho(ach(\Theta+\Psi)+bch(\Theta-\Psi))} \cdot e^{u\Theta+v\Psi} \cdot \hat{f}(\Theta, \Psi) d\Theta d\Psi.$$

В силу формулы обращения (3) имеем

$$\hat{f}(\Theta, \Psi) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(p, q) e^{-p\Theta - q\Psi} dp dq,$$

и поэтому

$$\begin{aligned} \Theta_{i\rho}(g)F(u, v) &= \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} e^{-i\rho(ach(\Theta+\Psi)+bch(\Theta-\Psi))} \cdot d\Theta d\Psi \times \\ &\times \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(p, q) e^{(u-p)\Theta + (v-q)\Psi} dp dq. \end{aligned} \quad (5)$$

Если $-1 < \operatorname{Re}(u-p) < 1$ и $-1 < \operatorname{Re}(v-q) < 1$, то интеграл (5) абсолютно сходится при всех u, v . Поэтому мы можем изменить порядок интегрирования. Следовательно,

$$\Theta_{i\rho}(g)F(u, v) = \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} K(a, b; p, q; u, v; i\rho) F(p, q) dp dq,$$

где

$$K(a, b; p, q; u, v; i\rho) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} e^{-i\rho(ach(\Theta+\Psi)+bch(\Theta-\Psi)) + (u-p)\Theta + (v-q)\Psi} \cdot d\Theta d\Psi. \quad (6)$$

Итак, при $g = g(\Delta_1)$ оператор $\Theta_{i\rho}(g)$ является интегральным преобразованием с ядром. Далее это ядро будет выражено через так называемую функцию Макдональда обобщенного вида. Аналогичный вид имеет ядро оператора $\Theta_{i\rho}(g)$ и в случае (6). Именно, при $g = g(\Delta_6) - K(-a, -b; p, q; u, v; i\rho)$.

Теперь получим выражение оператора $\Theta_{i\rho}(g)$ для любого элемента $g(\omega_\alpha, \omega_\varphi; r)$ такого, что имеет место одно из разложений $r = \omega_{\bar{\alpha}} \Delta_j \omega_{\bar{\varphi}}$, $j = 1, 6$.

Воспользуемся разложением

$$g(\omega_\alpha, \omega_\varphi; \omega_{\tilde{\alpha}\Delta_j} \omega_{\tilde{\varphi}}) = g(\omega_{\tilde{\alpha}}, \omega_{\tilde{\varphi}}; 0) \cdot g(E_2, E_2; \Delta_j) \cdot g(\omega_{\alpha-\tilde{\alpha}}, \omega_{\varphi+\tilde{\varphi}}; 0).$$

Элементу $g(E_2, E_2; \Delta_j)$ соответствует интегральный оператор с ядром $K_j(\Delta_j)$ (так обозначено сокращенно ядро оператора $\Theta_{i\rho}(\Delta_j)$), а элементам $g(\omega_{\tilde{\alpha}}, \omega_{\tilde{\varphi}}; 0)$ и $g(\omega_{\alpha-\tilde{\alpha}}, \omega_{\varphi+\tilde{\varphi}}; 0)$ – операторы умножения на $e^{-u\tilde{\alpha}+v\tilde{\varphi}}$ и $e^{-p(\alpha-\tilde{\alpha})-q(\varphi+\tilde{\varphi})}$ соответственно.

Поэтому

$$\Theta_{i\rho}(g)F(u, v) = \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} K_j^{(1)}(g)F(p, q)dpdq,$$

где

$$K_j^{(1)}(g) = e^{-p\alpha-q\varphi+(p-u)\tilde{\alpha}+(v-q)\tilde{\varphi}} \cdot K_j(\Delta_j),$$

$$-1 < \operatorname{Re}(p-u) < 1, \quad -1 < \operatorname{Re}(v-q) < 1, \quad j=1, 6.$$

При $g = g(\Delta_5)$ оператор $\Theta_{i\rho}(g)$ – интегральный оператор с ядром

$$K_5(a, b; p, q; u, v; i\rho) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{-\infty-i\infty}^{\infty-i\infty} \int_{-\infty-i\infty}^{\infty-i\infty} e^{-i\rho(a \operatorname{sh}(\Theta+\Psi)+b \operatorname{sh}(\Theta-\Psi))+(u-p)\Theta+(v-q)\Psi} \cdot d\Theta d\Psi, \quad (7)$$

$$-1 < \operatorname{Re}(u-p) < 1, \quad -1 < \operatorname{Re}(v-q) < 1.$$

Преобразуем этот интеграл. Сделаем замену переменной $\Theta = s + \frac{\pi}{2}i$. Так как $\operatorname{sh}(s + \frac{\pi}{2}i) = i \operatorname{chs}$, то получим

$$K_5 = \frac{e^{\frac{(u-p)\pi i}{2}}}{(2\pi i)^2} \int_{-\infty-i\frac{\pi}{2}}^{\infty-i\frac{\pi}{2}} \int_{-\infty-i\frac{\pi}{2}}^{\infty-i\frac{\pi}{2}} e^{\rho(a \operatorname{ch}(\Theta+\Psi)+b \operatorname{ch}(\Theta-\Psi))+(u-p)\Theta+(v-q)\Psi} \cdot d\Theta d\Psi.$$

Сдвинем контур интегрирования на $\frac{\pi}{2}i$ и используем формулу (6). Получим

$$K_5(a, b; p, q; u, v; i\rho) = e^{\frac{(u-p)\pi i}{2}} K(a, b; p, q; u, v; -\rho). \quad (8)$$

Сделаем же в формуле (7) замену переменной $\Psi = s + \frac{\pi}{2}i$, получим

$$K_5(a, b; p, q; u, v; i\rho) = e^{\frac{(v-q)\pi i}{2}} K(a, -b; p, q; u, v; -\rho). \quad (9)$$

Отметим, что попутно мы получили соотношение

$$K(a, -b; p, q; u, v; i\rho) = e^{\frac{(u+q-p-v)\pi i}{2}} K(a, b; p, q; u, v; i\rho).$$

Аналогично устанавливается вид ядра оператора $\Theta_{i\rho}$ в случае (2). Именно, при $g = g(\Delta_2) - K_5(-a, -b; p, q; u, v; i\rho)$.

При $g = g(\Delta_3)$ оператор $\Theta_{i\rho}$ – интегральный оператор с ядром

$$K_3(a, b; p, q; u, v; i\rho) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} e^{-i\rho(a \operatorname{ch}(\Theta+\Psi) + b \operatorname{sh}(\Theta-\Psi)) + (u-p)\Theta + (v-q)\Psi} \cdot d\Theta d\Psi, \quad (10)$$

$$-1 < \operatorname{Re}(u-p), \quad \operatorname{Re}(v-q) < 1.$$

Преобразуем этот интеграл, сделав замену переменных:

$$\Theta = \Theta' + \frac{\pi}{4}i, \quad \Psi = \Psi' + \frac{\pi}{4}i.$$

Так как $\operatorname{ch}(s + \frac{\pi}{2}i) = i \operatorname{sh} s$, то получаем

$$K_3 = \frac{e^{\frac{(u+v-p-q)\pi i}{4}}}{(2\pi i)^2} \int_{-\infty-\frac{\pi}{4}i}^{\infty-\frac{\pi}{4}i} \int_{-\infty-\frac{\pi}{4}i}^{\infty-\frac{\pi}{4}i} e^{-i\rho(ia \operatorname{sh}(\Theta+\Psi) + b \operatorname{sh}(\Theta-\Psi)) + (u-p)\Theta + (v-q)\Psi} \cdot d\Theta d\Psi.$$

Сдвинем оба контура интегрирования на $\frac{\pi}{4}i$ и используем формулу (7). Получим

$$K_3(a, b; p, q; u, v; i\rho) = e^{\frac{u+v-p-q}{4}\pi i} K_5(ia, b; p, q; u, v; i\rho). \quad (11)$$

Подобным образом устанавливаем, что ядром оператора $\Theta_{i\rho}(g)$ является:

при $g = g(\Delta_8) - K_3(-a, -b; p, q; u, v; i\rho)$;

при $g = g(\Delta_{11}) - K_3(a, -b; p, q; u, v; i\rho)$;

при $g = g(\Delta_{16}) - K_3(-a, b; p, q; u, v; i\rho)$.

Эти ядра с помощью формулы (11) можно выразить через ядра K_5 , а если воспользоваться затем формулами (8), (9), выразим рассматриваемые ядра через ядра K .

При $g = g(\Delta_4)$ оператор $\Theta_{i\rho}$ – интегральный оператор с ядром

$$K_4(a, b; p, q; u, v; i\rho) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} e^{i\rho(b \operatorname{ch}(\Theta-\Psi) + a \operatorname{sh}(\Theta+\Psi)) + (u-p)\Theta + (v-q)\Psi} \cdot d\Theta d\Psi, \quad (12)$$

$$1 < \operatorname{Re}(u-p), \quad \operatorname{Re}(v-q) < 1.$$

Выполняя аналогичные действия (как для элемента $g = g(\Delta_3)$), получаем, что

$$K_4(a, b; p, q; u, v; i\rho) = e^{\frac{u+v-p-q}{4}\pi} \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} e^{-i\rho(-iach(\Theta+\Psi)-bch(\Theta-\Psi)+(u-p)\Theta+(v-q)\Psi)} \cdot d\Theta d\Psi.$$

Сравнивая полученное с формулой (6), имеем

$$K_4(a, b; p, q; u, v; i\rho) = e^{\frac{u+v-p-q}{4}\pi} K(-ia, -b; p, q; u, v; i\rho). \quad (13)$$

Подобным образом устанавливаем, что ядром оператора $\Theta_{i\rho}(g)$ является:

при $g = g(\Delta_7) - K_4(-a, -b; p, q; u, v; i\rho)$;

при $g = g(\Delta_{12}) - K_4(-a, b; p, q; u, v; i\rho)$;

при $g = g(\Delta_{15}) - K_4(a, -b; p, q; u, v; i\rho)$;

для всех ядер $-1 < \text{Re}(u-p)$, $\text{Re}(v-q) < 1$.

Эти ядра с помощью формулы (13) можно выразить через ядра $K(a, b; p, q; u, v; i\rho)$.

При $g = g(\Delta_{29})$ оператор $\Theta_{i\rho}$ – интегральный оператор с ядром

$$L^{(1)}(a, b; p, q; u, v; i\rho) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} e^{-i\rho(2ach(\theta+\varphi)+be^{\theta-\varphi})+(u-p)\theta+(v-q)\varphi} \cdot d\theta d\varphi, \quad (14)$$

$$-1 < \text{Re}(u-p), \quad \text{Re}(v-q) < 1.$$

Точно так же $\Theta_{i\rho}(g)$ будет интегральным оператором с ядром, равным:

при $g = g(\Delta_{17}) - L^{(1)}(a, b; u, q; p, v; i\rho)$;

при $g = g(\Delta_{20}) - L^{(1)}(-a, b; u, q; p, v; i\rho)$;

при $g = g(\Delta_{21}) - L^{(1)}(a, b; u, v; p, q; i\rho)$;

при $g = g(\Delta_{24}) - L^{(1)}(-a, b; u, v; p, q; i\rho)$;

при $g = g(\Delta_{25}) - L^{(1)}(a, b; p, v; u, q; i\rho)$;

при $g = g(\Delta_{28}) - L^{(1)}(-a, b; p, v; u, q; i\rho)$;

при $g = g(\Delta_{32}) - L^{(1)}(-a, b; p, q; u, v; i\rho)$.

При $g = g(\Delta_{30})$ $\Theta_{i\rho}$ – интегральный оператор с ядром

$$L^{(2)}(a, b; p, q; u, v; i\rho) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} e^{-i\rho(2ash(\theta+\varphi)+be^{\theta-\varphi})+(u-p)\theta+(v-q)\varphi} \cdot d\theta d\varphi, \quad (15)$$

$$1 < \text{Re}(u-p), \quad \text{Re}(v-q) < 1.$$

Сделаем в этом интеграле замену переменной $\theta = \theta' + \frac{\pi}{2}i$ и затем используем формулу (14). Получаем

$$L^{(2)}(a, b; p, q; u, v; i\rho) = e^{\frac{u-p}{2}\pi i} L^{(1)}(a, b; p, q; u, v; -\rho).$$

Сделаем же в интеграле (15) замену переменной $\varphi = \varphi' + \frac{\pi}{2}i$, получаем

$$L^{(2)}(a, b; p, q; u, v; i\rho) = e^{\frac{v-q}{2}\pi i} L^{(1)}(a, -b; p, q; u, v; -\rho).$$

Наконец, при замене $\theta = \theta' + \frac{\pi}{4}i$, $\varphi = \varphi' + \frac{\pi}{4}i$, получаем

$$L^{(2)}(a, b; p, q; u, v; i\rho) = e^{\frac{u+v-p-q}{4}\pi i} L^{(1)}(ia, b; p, q; u, v; i\rho).$$

По ходу получено соотношение

$$\begin{aligned} e^{\frac{u-p}{2}\pi i} L^{(1)}(a, b; p, q; u, v; -\rho) &= e^{\frac{v-q}{2}\pi i} L^{(1)}(a, -b; p, q; u, v; -\rho) = \\ &= e^{\frac{u+v-p-q}{4}\pi i} L^{(1)}(ia, b; p, q; u, v; i\rho). \end{aligned} \quad (16)$$

Аналогичным образом $\Theta_{i\rho}(g)$ будет интегральным оператором с ядром, равным:

при $g = g(\Delta_{18})$: $L^{(2)}(a, b; u, q; p, v; i\rho)$;

при $g = g(\Delta_{19})$: $L^{(2)}(-a, b; u, q; p, v; i\rho)$;

при $g = g(\Delta_{22})$: $L^{(2)}(a, b; u, v; p, q; i\rho)$;

при $g = g(\Delta_{23})$: $L^{(2)}(-a, b; u, v; p, q; i\rho)$;

при $g = g(\Delta_{26})$: $L^{(2)}(a, b; p, v; u, q; i\rho)$;

при $g = g(\Delta_{27})$: $L^{(2)}(-a, b; p, v; u, q; i\rho)$;

при $g = g(\Delta_{31})$: $L^{(2)}(-a, b; p, q; u, v; i\rho)$.

Введем по определению функцию $K_{\nu, \mu}(z_1, z_2)$, положив при любых комплексных значениях ν и μ и $\operatorname{Re} z_1 > 0$, $\operatorname{Re} z_2 > 0$

$$\begin{aligned} K_{\nu, \mu}(z_1, z_2) &= \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} e^{-z_1 \operatorname{ch}(\varphi+\theta) - z_2 \operatorname{ch}(\varphi-\theta)} \cdot \operatorname{ch}(\nu\varphi + \mu\theta) d\varphi d\theta = \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} e^{-z_1 \operatorname{ch}(\varphi+\theta) - z_2 \operatorname{ch}(\varphi-\theta) \pm (\nu\varphi + \mu\theta)} d\varphi d\theta. \end{aligned} \quad (17)$$

При $\operatorname{Re} z_1 \leq 0$, $\operatorname{Re} z_2 \leq 0$ определим $K_{\nu, \mu}(z_1, z_2)$ с помощью аналитического продолжения по z_1 и z_2 . Тогда $K_{\nu, \mu}(z_1, z_2)$ будет однозначно определено в комплексной плоскости, разрезанной вдоль луча $-\infty < \operatorname{Re} z_1, \operatorname{Re} z_2 < 0$. Назовем функцию $K_{\nu, \mu}(z_1, z_2)$ функцией Макдональда обобщенного вида от z_1 и z_2 и с индексами ν, μ [2].

Из равенства (17) следует, что

$$K_{\nu, \mu}(z_1, z_2) = K_{-\nu, -\mu}(z_1, z_2) \quad \text{и} \quad K_{\nu, \mu}(z_1, z_2) = K_{\mu, \nu}(z_1, z_2).$$

Введем еще обобщенные функции Ганкеля первого и второго рода [2]:

$$H_{\nu, \mu}^{(1)}(x_1, x_2) = \frac{e^{-\frac{\nu+\mu}{2}\pi i}}{\pi i} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} e^{ix_1 \operatorname{ch}(\varphi+\theta) + ix_2 \operatorname{ch}(\varphi-\theta) - (\nu\varphi+\mu\theta)} \cdot d\varphi d\theta \quad (18)$$

и

$$H_{\nu, \mu}^{(2)}(x_1, x_2) = -\frac{e^{\frac{\nu+\mu}{2}\pi i}}{\pi i} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} e^{-ix_1 \operatorname{ch}(\varphi+\theta) - ix_2 \operatorname{ch}(\varphi-\theta) - (\nu\varphi+\mu\theta)} \cdot d\varphi d\theta, \quad (18')$$

где $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, $-1 < \operatorname{Re} \nu$, $\operatorname{Re} \mu < 1$.

Сравнивая формулы (18) и (18') с формулой (17), устанавливаем, что

$$H_{\nu, \mu}^{(1)}(x_1, x_2) = \frac{2e^{-\frac{\nu+\mu}{2}\pi i}}{\pi i} \cdot K_{\nu, \mu} \left(e^{\frac{\pi}{2} x_1}, e^{\frac{\pi}{2} x_2} \right) \quad (19)$$

и

$$H_{\nu, \mu}^{(2)}(x_1, x_2) = -\frac{2e^{\frac{\nu+\mu}{2}\pi i}}{\pi i} \cdot K_{\nu, \mu} \left(e^{\frac{\pi}{2} x_1}, e^{\frac{\pi}{2} x_2} \right). \quad (19')$$

Отсюда видно, что обобщенные функции Ганкеля $H_{\nu, \mu}^{(1)}(x_1, x_2)$ и $H_{\nu, \mu}^{(2)}(x_1, x_2)$ с точностью до числового множителя совпадают со значениями обобщенных функций Макдональда на отрицательной и положительной мнимой полуоси. Пользуясь формулами (19) и (19'), можно продолжить обобщенные функции Ганкеля на всю комплексную плоскость. При этом для функции $H_{\nu, \mu}^{(1)}(z_1, z_2)$ плоскость надо разрезать вдоль луча $-\infty < \operatorname{Im} z_1, \operatorname{Im} z_2 < 0$, а для функции $H_{\nu, \mu}^{(2)}(z_1, z_2)$ – вдоль луча $0 < \operatorname{Im} z_1, \operatorname{Im} z_2 < \infty$.

Для последующего рассмотрим еще интеграл

$$\int_{-\infty-\infty}^{\infty} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} e^{ix_1 \operatorname{sh}(\varphi+\theta) + ix_2 \operatorname{sh}(\varphi-\theta) - (\nu\varphi+\mu\theta)} \cdot d\varphi d\theta,$$

где $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, $-1 < \operatorname{Re} \nu$, $\operatorname{Re} \mu < 1$.

