УДК 517.2/.3
ББК 22.161.1
П 18

Паранук В.И.
Кандидат физико-математических наук, профессор кафедры алгебры и геометрии факультета математики и компьютерных наук Адыгейского государственного университета, тел. (8772) 59-38-04, e-mail: pkomagu@mail.ru

Функции Макдональда от двух переменных

(Рецензирована)

Аннотация

Строятся унитарные представления группы клеточно-треугольных матриц четвертого порядка, эквивалентные ранее рассмотренным представлениям той же группы [1]. Устанавливается вид оператора представления для некоторых подгрупп рассматриваемой группы. В частности, операторы представления являются интегральными преобразованиями с ядром. Вводятся в рассмотрение обобщенные функции Макдональда от двух переменных, выражаются ядра операторов представлений через эти функции. Устанавливаются некоторые функциональные соотношения для обобщенных функций Макдональда.

Ключевые слова: *унитарное представление группы, преобразование Фурье, интегральный оператор с ядром.*

Paranuk V.I.
Candidate of Physics and Mathematics, Professor of Algebra and Geometry Department of Mathematics and Computer Science Faculty, Adyghe State University, ph. (8772) 59-38-04, e-mail: pkomagu@mail.ru

Macdonald functions from two variables

Abstract

Unitary representations of group of cellular and triangular matrices of order 4, equivalent to earlier considered representations of the same group [1] are under construction. The type of the operator of representation for some subgroups of the considered group is established. In particular, operators of representation are integral transformations with a kernel. Macdonald generalized functions from two variables are entered into consideration, kernels of operators of representations are expressed through these functions. Some functional ratios for Macdonald generalized functions are established.

Keywords: *unitary representation of group, Fourier's transformation, the integrated operator with a kernel.*

В работе [1] были построены унитарные представления группы G матриц вида

$$g(\omega_1, \omega_2; r) = \begin{pmatrix} \omega_1 & \omega_2 r \\ 0 & \omega_2 \end{pmatrix},$$

где

$$\omega_1 = \begin{pmatrix} \tilde{n}h\alpha & sh\alpha \\ sh\alpha & ch\alpha \end{pmatrix}, \qquad \omega_2 = \begin{pmatrix} \tilde{n}h\varphi & sh\varphi \\ sh\varphi & ch\varphi \end{pmatrix},$$

r – вещественная матрица второго порядка.

Представления $T_\lambda(g)$ были реализованы в пространстве функций $\hat{f}(\Theta,\Psi)$ финитных и бесконечно дифференцируемых

$$T_\lambda(g)\,\hat{f}(\Theta,\Psi)=e^{-\lambda\left(r_{11}ch\Theta ch\Psi+r_{22}sh\Theta sh\Psi+r_{12}ch\Theta sh\Psi+r_{21}sh\Theta ch\Psi\right)}\cdot\hat{f}(\Theta+\alpha,\Psi+\varphi), \tag{1}$$

где

$$r=\begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{pmatrix}.$$

Каждой функции $\hat{f}(\Theta,\Psi)$ из пространства представления поставим в соответствие ее преобразование Фурье $F(u,v)$:

$$F(u,v)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\Theta,\Psi)e^{u\Theta+v\Psi}d\Theta d\Psi. \tag{2}$$

Интеграл (2) сходится при всех комплексных значениях u,v, поскольку функции $\hat{f}(\Theta,\Psi)$ по условию финитны и бесконечно дифференцируемы.

Формула обращения имеет вид

$$\hat{f}(\Theta,\Psi)=\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{b-i\infty}^{b+i\infty}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}F(u,v)e^{-u\Theta-v\Psi}dudv. \tag{3}$$

Обозначим через $\Theta_\lambda(g)$ оператор в пространстве функций $F(u,v)$, соответствующий оператору $T_\lambda(g)$ в пространстве функций $\hat{f}(\Theta,\Psi)$. Операторы $\Theta_\lambda(g)$ задают другую реализацию представлений $T_\lambda(g)$. При этом представление $\Theta_\lambda(g)$ эквивалентно представлению $T_\lambda(g)$, так как $\Theta_\lambda(g)=F\,T_\lambda(g)F^{-1}$, где F – оператор преобразования Фурье.

Найдем вид оператора $\Theta_\lambda(g)$ для элементов вида $g(\omega_1,\omega_2;0)$. По формуле (1) оператор $T_\lambda[g(\omega_1,\omega_2;0)]$ переводит $\hat{f}(\Theta,\Psi)$ в $\hat{f}(\Theta+\alpha,\Psi+\varphi)$. Тогда при $g=g(\omega_\alpha,\omega_\varphi;0)$

$$\Theta_\lambda(g)F(u,v)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\Theta+\alpha,\Psi+\varphi)e^{u\Theta+v\Psi}d\Theta d\Psi=$$

$$=e^{-u\alpha-v\varphi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\Theta,\Psi)e^{u\Theta+v\Psi}d\Theta d\Psi=e^{-u\alpha-v\varphi}\cdot F(u,v). \tag{4}$$

Значит, гиперболическим вращениям из подгруппы Ω соответствуют операторы умножения на $e^{-u\alpha-v\varphi}$. Используем разложение

$$g(\omega_1,\omega_2;r)=g(\omega_1,\omega_2;\tilde{\omega}_1\Delta\tilde{\omega}_2)=g(\tilde{\omega}_1,\tilde{\omega}_2^{-1};0)\cdot g(E_2,E_2;\Delta)\cdot g(\tilde{\omega}_1^{-1}\omega_1,\tilde{\omega}_2\omega_2;0),$$

где матрица Δ одного из видов, установленных в [1].

Найдем операторы $\Theta_\lambda(g)$, соответствующие элементам вида $g = g(E_2, E_2; \Delta)$. Условимся писать $g = g(E_2, E_2; \Delta_i) = g(\Delta_i)$, где символом Δ_i, $i = (1, ..., 32)$, обозначены матрицы Δ соответствующего вида.

Пусть $g = g(\Delta_1)$. Тогда по формуле (1)

$$T_\lambda(g)\hat{f}(\Theta,\Psi) = e^{-\lambda((a+b)ch\Theta ch\Psi + (a-b)sh\Theta sh\Psi)}\hat{f}(\Theta,\Psi).$$

Условимся ограничиться унитарными представлениями, положив $\lambda = i\rho, \quad \rho > 0$. Тогда

$$\Theta_{i\rho}(g)F(u,v) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\rho(a\,ch(\Theta+\Psi)+b\,ch(\Theta-\Psi))}\cdot e^{u\Theta+v\Psi}\cdot \hat{f}(\Theta,\Psi)d\Theta d\Psi.$$

В силу формулы обращения (3) имеем

$$\hat{f}(\Theta,\Psi) = \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{b-i\infty}^{b+i\infty}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(p,q)e^{-p\Theta-q\Psi}dpdq,$$

и поэтому

$$\Theta_{i\rho}(g)F(u,v) = \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\rho(a\,ch(\Theta+\Psi)+b\,ch(\Theta-\Psi))}\cdot d\Theta d\Psi \times$$

$$\times \int_{b-i\infty}^{b+i\infty}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(p,q)e^{(u-p)\Theta+(v-q)\Psi}dpdq. \qquad (5)$$

Если $-1 < \mathrm{Re}(u-p) < 1$ и $-1 < \mathrm{Re}(v-q) < 1$, то интеграл (5) абсолютно сходится при всех u, v. Поэтому мы можем изменить порядок интегрирования. Следовательно,

$$\Theta_{i\rho}(g)F(u,v) = \int_{b-i\infty}^{b+i\infty}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} K(a,b;p,q;u,v;i\rho)F(p,q)dpdq,$$

где

$$K(a,b;p,q;u,v;i\rho) = \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\rho(a\,ch(\Theta+\Psi)+b\,ch(\Theta-\Psi))+(u-p)\Theta+(v-q)\Psi}\cdot d\Theta d\Psi. \qquad (6)$$

Итак, при $g = g(\Delta_1)$ оператор $\Theta_{i\rho}(g)$ является интегральным преобразованием с ядром. Дальше это ядро будет выражено через так называемую функцию Макдональда обобщенного вида. Аналогичный вид имеет ядро оператора $\Theta_{i\rho}(g)$ и в случае (6). Именно, при $g = g(\Delta_6)$ – $K(-a,-b;p,q;u,v;i\rho)$.

Теперь получим выражение оператора $\Theta_{i\rho}(g)$ для любого элемента $g(\omega_\alpha, \omega_\varphi; r)$ такого, что имеет место одно из разложений $r = \omega_{\tilde{\alpha}}\Delta_j\omega_{\tilde{\varphi}}$, $j = 1,6$.

Воспользуемся разложением

$$g(\omega_\alpha,\omega_\varphi;\omega_{\tilde\alpha}\Delta_j\omega_{\tilde\varphi})=g(\omega_{\tilde\alpha},\omega_{-\tilde\varphi};0)\cdot g(E_2,E_2;\Delta_j)\cdot g(\omega_{\alpha-\tilde\alpha},\omega_{\varphi+\tilde\varphi};0).$$

Элементу $g(E_2,E_2;\Delta_j)$ соответствует интегральный оператор с ядром $K_j(\Delta_j)$ (так обозначено сокращенно ядро оператора $\Theta_{i\rho}(\Delta_j)$), а элементам $g(\omega_{\tilde\alpha},\omega_{-\tilde\varphi};0)$ и $g(\omega_{\alpha-\tilde\alpha},\omega_{\varphi+\tilde\varphi};0)$ – операторы умножения на $e^{-u\tilde\alpha+v\tilde\varphi}$ и $e^{-p(\alpha-\tilde\alpha)-q(\varphi+\tilde\varphi)}$ соответственно.

Поэтому

$$\Theta_{i\rho}(g)F(u,v)=\int\limits_{b-i\infty}^{b+i\infty}\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty}K_j^{(1)}(g)F(p,q)dpdq,$$

где

$$K_j^{(1)}(g)=e^{-p\alpha-q\varphi+(p-u)\tilde\alpha+(v-q)\tilde\varphi}\cdot K_j(\Delta_j),$$

$$-1<\mathrm{Re}(p-u)<1,\quad -1<\mathrm{Re}(v-q)<1,\quad j=\overline{1,6}.$$

При $g=g(\Delta_5)$ оператор $\Theta_{i\rho}(g)$ – интегральный оператор с ядром

$$K_5(a,b;p,q;u,v;i\rho)=\frac{1}{(2\pi i)^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-i\rho(a\,sh(\Theta+\Psi)+b\,sh(\Theta-\Psi))+(u-p)\Theta+(v-q)\Psi}\cdot d\Theta d\Psi,\tag{7}$$

$$-1<\mathrm{Re}(u-p)<1,\quad -1<\mathrm{Re}(v-q)<1.$$

Преобразуем этот интеграл. Сделаем замену переменной $\Theta=s+\frac{\pi}{2}i$. Так как $sh(s+\frac{\pi}{2}i)=i\,chs$, то получим

$$K_5=\frac{e^{\frac{(u-p)\pi i}{2}}}{(2\pi i)^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty-\frac{\pi}{2}i}^{\infty-\frac{\pi}{2}i}e^{\rho(a\,ch(\Theta+\Psi)+b\,ch(\Theta-\Psi))+(u-p)\Theta+(v-q)\Psi}\cdot d\Theta d\Psi.$$

Сдвинем контур интегрирования на $\frac{\pi}{2}i$ и используем формулу (6). Получим

$$K_5(a,b;p,q;u,v;i\rho)=e^{\frac{(u-p)\pi i}{2}}K(a,b;p,q;u,v;-\rho).\tag{8}$$

Сделав же в формуле (7) замену переменной $\Psi=s+\frac{\pi}{2}i$, получим

$$K_5(a,b;p,q;u,v;i\rho)=e^{\frac{(v-q)\pi i}{2}}K(a,-b;p,q;u,v;-\rho).\tag{9}$$

Отметим, что попутно мы получили соотношение

$$K(a,-b;p,q;u,v;i\rho)=e^{\frac{(u+q-p-v)\pi i}{2}}K(a,b;p,q;u,v;i\rho).$$

Аналогично устанавливается вид ядра оператора $\Theta_{i\rho}$ в случае (2). Именно, при $g=g(\Delta_2)$ – $K_5(-a,-b;p,q;u,v;i\rho)$.

При $g=g(\Delta_3)$ оператор $\Theta_{i\rho}$ – интегральный оператор с ядром

$$K_3(a,b;p,q;u,v;i\rho)=\frac{1}{(2\pi i)^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-i\rho(a\,ch(\Theta+\Psi)+b\,sh(\Theta-\Psi))+(u-p)\Theta+(v-q)\Psi}\cdot d\Theta d\Psi, \qquad (10)$$

$$-1<\mathrm{Re}(u-p),\quad \mathrm{Re}(v-q)<1.$$

Преобразуем этот интеграл, сделав замену переменных:

$$\Theta=\Theta'+\frac{\pi}{4}i,\quad \Psi=\Psi'+\frac{\pi}{4}i.$$

Так как $ch(s+\frac{\pi}{2}i)=i\,shs$, то получаем

$$K_3=\frac{e^{\frac{(u+v-p-q)}{4}\pi i}}{(2\pi i)^2}\int\limits_{-\infty-\frac{\pi}{4}i}^{\infty-\frac{\pi}{4}i}\int\limits_{-\infty-\frac{\pi}{4}i}^{\infty-\frac{\pi}{4}i}e^{-i\rho(ia\,sh(\Theta+\Psi)+b\,sh(\Theta-\Psi))+(u-p)\Theta+(v-q)\Psi}\cdot d\Theta d\Psi.$$

Сдвинем оба контура интегрирования на $\frac{\pi}{4}i$ и используем формулу (7). Получим

$$K_3(a,b;p,q;u,v;i\rho)=e^{\frac{u+v-p-q}{4}\pi i}K_5(ia,b;p,q;u,v;i\rho). \qquad (11)$$

Подобным образом устанавливаем, что ядром оператора $\Theta_{i\rho}(g)$ является:

при $g=g(\Delta_8)$ – $K_3(-a,-b;p,q;u,v;i\rho)$;

при $g=g(\Delta_{11})$ – $K_3(a,-b;p,q;u,v;i\rho)$;

при $g=g(\Delta_{16})$ – $K_3(-a,b;p,q;u,v;i\rho)$.

Эти ядра с помощью формулы (11) можно выразить через ядра K_5, а если воспользоваться затем формулами (8), (9), выразим рассматриваемые ядра через ядра K. При $g=g(\Delta_4)$ оператор $\Theta_{i\rho}$ – интегральный оператор с ядром

$$K_4(a,b;p,q;u,v;i\rho)=\frac{1}{(2\pi i)^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{i\rho(b\,ch(\Theta-\Psi)+a\,sh(\Theta+\Psi))+(u-p)\Theta+(v-q)\Psi}\cdot d\Theta d\Psi, \qquad (12)$$

$$1<\mathrm{Re}(u-p),\quad \mathrm{Re}(v-q)<1.$$

Выполняя аналогичные действия (как для элемента $g = g(\Delta_3)$), получаем, что

$$K_4(a,b;p,q;u,v;i\rho) = e^{\frac{u+v-p-q}{4}\pi i} \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\rho(-ia\,ch(\Theta+\Psi)-b\,ch(\Theta-\Psi))+(u-p)\Theta+(v-q)\Psi} \cdot d\Theta d\Psi.$$

Сравнивая полученнное с формулой (6), имеем

$$K_4(a,b;p,q;u,v;i\rho) = e^{\frac{u+v-p-q}{4}\pi i} K(-ia,-b;p,q;u,v;i\rho). \tag{13}$$

Подобным образом устанавливаем, что ядром оператора $\Theta_{i\rho}(g)$ является:

при $g = g(\Delta_7)$ – $K_4(-a,-b;p,q;u,v;i\rho)$;

при $g = g(\Delta_{12})$ – $K_4(-a,b;p,q;u,v;i\rho)$;

при $g = g(\Delta_{15})$ – $K_4(a,-b;p,q;u,v;i\rho)$;

для всех ядер $-1<\mathrm{Re}(u-p)$, $\mathrm{Re}(v-q)<1$.

Эти ядра с помощью формулы (13) можно выразить через ядра $K(a,b;p,q;u,v;i\rho)$.

При $g = g(\Delta_{29})$ оператор $\Theta_{i\rho}$ – интегральный оператор с ядром

$$L^{(1)}(a,b;p,q;u,v;i\rho) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\rho(2a\,ch(\theta+\varphi)+be^{\theta-\varphi})+(u-p)\theta+(v-q)\varphi} \cdot d\theta d\varphi, \tag{14}$$

$$-1 < \mathrm{Re}(u-p), \quad \mathrm{Re}(v-q)<1.$$

Точно так же $\Theta_{i\rho}(g)$ будет интегральным оператором с ядром, равным:

при $g = g(\Delta_{17})$ – $L^{(1)}(a,b;u,q;p,v;i\rho)$;

при $g = g(\Delta_{20})$ – $L^{(1)}(-a,b;u,q;p,v;i\rho)$;

при $g = g(\Delta_{21})$ – $L^{(1)}(a,b;u,v;p,q;i\rho)$;

при $g = g(\Delta_{24})$ – $L^{(1)}(-a,b;u,v;p,q;i\rho)$;

при $g = g(\Delta_{25})$ – $L^{(1)}(a,b;p,v;u,q;i\rho)$;

при $g = g(\Delta_{28})$ – $L^{(1)}(-a,b;p,v;u,q;i\rho)$;

при $g = g(\Delta_{32})$ – $L^{(1)}(-a,b;p,q;u,v;i\rho)$.

При $g = g(\Delta_{30})$ $\Theta_{i\rho}$ – интегральный оператор с ядром

$$L^{(2)}(a,b;p,q;u,v;i\rho) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\rho(2a\,sh(\theta+\varphi)+be^{\theta-\varphi})+(u-p)\theta+(v-q)\varphi} \cdot d\theta d\varphi, \tag{15}$$

$$1 < \mathrm{Re}(u-p), \quad \mathrm{Re}(v-q)<1.$$

Сделаем в этом интеграле замену переменной $\theta=\theta'+\frac{\pi}{2}i$ и затем используем формулу (14). Получаем

$$L^{(2)}(a,b;p,q;u,v;i\rho)=e^{\frac{u-p}{2}\pi i}L^{(1)}(a,b;p,q;u,v;-\rho).$$

Сделав же в интеграле (15) замену переменной $\varphi=\varphi'+\frac{\pi}{2}i$, получаем

$$L^{(2)}(a,b;p,q;u,v;i\rho)=e^{\frac{v-q}{2}\pi i}L^{(1)}(a,-b;p,q;u,v;-\rho).$$

Наконец, при замене $\theta=\theta'+\frac{\pi}{4}i$, $\varphi=\varphi'+\frac{\pi}{4}i$, получаем

$$L^{(2)}(a,b;p,q;u,v;i\rho)=e^{\frac{u+v-p-q}{4}\pi i}L^{(1)}(ia,b;p,q;u,v;i\rho).$$

По ходу получено соотношение

$$e^{\frac{u-p}{2}\pi i}L^{(1)}(a,b;p,q;u,v;-\rho)=e^{\frac{v-q}{2}\pi i}L^{(1)}(a,-b;p,q;u,v;-\rho)=$$
$$=e^{\frac{u+v-p-q}{4}\pi i}L^{(1)}(ia,b;p,q;u,v;i\rho). \qquad (16)$$

Аналогичным образом $\Theta_{i\rho}(g)$ будет интегральным оператором с ядром, равным:

при $g=g(\Delta_{18})$: $L^{(2)}(a,b;u,q;p,v;i\rho)$;

при $g=g(\Delta_{19})$: $L^{(2)}(-a,b;u,q;p,v;i\rho)$;

при $g=g(\Delta_{22})$: $L^{(2)}(a,b;u,v;p,q;i\rho)$;

при $g=g(\Delta_{23})$: $L^{(2)}(-a,b;u,v;p,q;i\rho)$;

при $g=g(\Delta_{26})$: $L^{(2)}(a,b;p,v;u,q;i\rho)$;

при $g=g(\Delta_{27})$: $L^{(2)}(-a,b;p,v;u,q;i\rho)$;

при $g=g(\Delta_{31})$: $L^{(2)}(-a,b;p,q;u,v;i\rho)$.

Введем по определению функцию $K_{\nu,\mu}(z_1,z_2)$, положив при любых комплексных значениях ν и μ и $\operatorname{Re} z_1>0$, $\operatorname{Re} z_2>0$

$$K_{\nu,\mu}(z_1,z_2)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-z_1 ch(\varphi+\theta)-z_2 ch(\varphi-\theta)}\cdot ch(\nu\varphi+\mu\theta)d\varphi d\theta=$$
$$=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-z_1 ch(\varphi+\theta)-z_2 ch(\varphi-\theta)\pm(\nu\varphi+\mu\theta)}d\varphi d\theta. \qquad (17)$$

При $\operatorname{Re} z_1 \le 0$, $\operatorname{Re} z_2 \le 0$ определим $K_{\nu,\mu}(z_1, z_2)$ с помощью аналитического продолжения по z_1 и z_2. Тогда $K_{\nu,\mu}(z_1, z_2)$ будет однозначно определено в комплексной плоскости, разрезанной вдоль луча $-\infty < \operatorname{Re} z_1, \operatorname{Re} z_2 < 0$. Назовем функцию $K_{\nu,\mu}(z_1, z_2)$ функцией Макдональда обобщенного вида от z_1 и z_2 и с индексами ν, μ [2].

Из равенства (17) следует, что

$$K_{\nu,\mu}(z_1, z_2) = K_{-\nu,-\mu}(z_1, z_2) \quad \text{и} \quad K_{\nu,\mu}(z_1, z_2) = K_{\mu,\nu}(z_1, z_2).$$

Введем еще обобщенные функции Ганкеля первого и второго рода [2]:

$$H^{(1)}_{\nu,\mu}(x_1, x_2) = \frac{e^{-\frac{\nu+\mu}{2}\pi i}}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ix_1 ch(\varphi+\theta) + ix_2 ch(\varphi-\theta) - (\nu\varphi+\mu\theta)} \cdot d\varphi d\theta \tag{18}$$

и

$$H^{(2)}_{\nu,\mu}(x_1, x_2) = -\frac{e^{\frac{\nu+\mu}{2}\pi i}}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix_1 ch(\varphi+\theta) - ix_2 ch(\varphi-\theta) - (\nu\varphi+\mu\theta)} \cdot d\varphi d\theta \quad , \tag{18'}$$

где $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, $-1 < \operatorname{Re}\nu, \quad \operatorname{Re}\mu < 1$.

Сравнивая формулы (18) и (18') с формулой (17), устанавливаем, что

$$H^{(1)}_{\nu,\mu}(x_1, x_2) = \frac{2e^{-\frac{\nu+\mu}{2}\pi i}}{\pi i} \cdot K_{\nu,\mu}\left(e^{-\frac{\pi i}{2}} x_1, e^{-\frac{\pi i}{2}} x_2\right) \tag{19}$$

и

$$H^{(2)}_{\nu,\mu}(x_1, x_2) = -\frac{2e^{-\frac{\nu+\mu}{2}\pi i}}{\pi i} \cdot K_{\nu,\mu}\left(e^{\frac{\pi i}{2}} x_1, e^{\frac{\pi i}{2}} x_2\right). \tag{19'}$$

Отсюда видно, что обобщенные функции Ганкеля $H^{(1)}_{\nu,\mu}(x_1, x_2)$ и $H^{(2)}_{\nu,\mu}(x_1, x_2)$ с точностью до числового множителя совпадают со значениями обобщенных функций Макдональда на отрицательной и положительной мнимой полуоси. Пользуясь формулами (19) и (19'), можно продолжить обобщенные функции Ганкеля на всю комплексную плоскость. При этом для функции $H^{(1)}_{\nu,\mu}(z_1, z_2)$ плоскость надо разрезать вдоль луча $-\infty < Jm\, z_1, Jm\, z_2 < 0$, а для функции $H^{(2)}_{\nu,\mu}(z_1, z_2)$ – вдоль луча $0 < Jm\, z_1, Jm\, z_2 < \infty$.

Для последующего рассмотрим еще интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ix_1 sh(\varphi+\theta) + ix_2 sh(\varphi-\theta) - (\nu\varphi+\mu\theta)} \cdot d\varphi d\theta,$$

где $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, $-1 < \operatorname{Re}\nu, \quad \operatorname{Re}\mu < 1$.