УДК 517.2
ББК 22.161
Л 50

Лесев В.Н.
Кандидат физико-математических наук, доцент, зав. кафедрой дифференциальных уравнений Кабардино-Балкарского государственного университета им. Х.М. Бербекова, тел. (8662) 77-01-08, e-mail: diff@kbsu.ru
Желдашева А.О.
Старший преподаватель кафедры дифференциальных уравнений Кабардино-Балкарского государственного университета им. Х.М. Бербекова, тел. (8662) 77-01-08, e-mail: 70231125@mail.ru

Нелокальная краевая задача для уравнения смешанного типа второго порядка в характеристической области

(Рецензирована)

Аннотация
Исследуется однозначная разрешимость краевой задачи со смещением для параболо-гиперболического уравнения второго порядка. Вопрос существования решения задачи эквивалентно редуцирован к вопросу разрешимости интегрального уравнения Фредгольма, а единственность решения установлена на основе метода интегралов энергии.
Ключевые слова: *краевая задача, уравнение смешанного типа, интегральное уравнение.*

Lesev V.N.
Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Head of the Department of Differential Equations, Kabardino-Balkar State University named after Kh.M. Berbekov, ph. (8662) 77-01-08, e-mail: diff@kbsu.ru
Zheldasheva A.O.
Senior Lecturer, Department of Differential Equations, Kabardino-Balkar State University named after Kh.M. Berbekov, ph. (8662) 77-01-08, e-mail: 70231125@mail.ru

The nonlocal boundary value problem for second order equations of the mixed type in the characteristic region

Abstract
The work studies the unique solvability of boundary value problem with the shift to parabolic-hyperbolic equation of the second order. A question of existence of the problem solution is reduced to the equivalent of the Fredholm integral equation solvability and uniqueness of the solution is established on the basis of the energy integrals method.
Keywords: *boundary value problem, the equation of the mixed type, the integral equation.*

Теория краевых задач для уравнений смешанного типа является одним из важнейших разделов современной теории дифференциальных уравнений с частными производными. Это обусловлено как непосредственными связями уравнений смешанного типа с проблемами теории сингулярных интегральных уравнений, теорией интегральных преобразований и специальных функций, так и прикладными задачами механики и математической физики, сводящимися к таким уравнениям (например [1-3]).

Анализируя публикации последних лет, можно выделить еще одно приложение, связанное с теорией капиллярности. В самом деле, рассматривая уравнение профиля свободной капиллярной поверхности [4-6], можно отметить, что при переходе к полярным координатам кривизна профиля свисающей или лежащей капли будет напрямую влиять на тип уравнения.

Помимо прикладной значимости исследований смешанных уравнений большой интерес вызывают и фундаментальные аспекты данного раздела теории дифференциальных уравнений. В частности, весьма актуальными остаются проблемы, связанные с развитием теории нелокальных операторов, разработка методов редукции краевых задач для смешанных уравнений с разрывными условиями сопряжения к вопросам разрешимости соответствующих интегральных уравнений и выявлением условий, допускающих возможность получения явных решений исследуемых задач.

В рамках настоящей работы указанные проблемы исследованы для смешанного гиперболо-параболического уравнения второго порядка.

Рассмотрим уравнение

$$0 = \begin{cases} u_{xx} - u_y, \ y > 0, \\ u_{xx} - u_{yy} + \lambda u, \ \ y < 0 \end{cases} \tag{1}$$

в конечной односвязной области $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \ J$, где Ω_1 – область ограниченная отрезками *AB*, *BC*, *CO* и *OA* прямых $x = 1, \ y = T, \ x = 0, \ y = 0$ соответственно; Ω_2 – характеристический треугольник, ограниченный отрезком $OA = J\ \{y = 0, \ 0 < x < 1\}$ оси абсцисс и двумя характеристиками $AD: x - y = 1, \ OD: x + y = 0$ уравнения (1), выходящими из точек *A*, *O* и пересекающимися в точке $D\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$, $\ \lambda = const$.

Пусть $\tau(x) = \lim_{y \to 0\pm} u(x,y), \quad \nu(x) = \lim_{y \to 0\pm} u_y(x,y), \quad \theta(x) = \frac{x}{2} - i\frac{x}{2}$.

Для уравнения (1) исследована следующая

Задача A. Найти регулярное решение $u(x,y)$ уравнения (1) из класса $C(\overline{\Omega}) \cap C^1(\Omega_2 \cup \bar{J})$, удовлетворяющее граничным условиям

$$u(0,y) = \varphi_0(y), \ \ u(1,y) = \varphi_1(y), \ \ 0 \le y \le T \tag{2}$$

и нелокальному условию

$$u[\theta(x)] + \alpha u_y(x,0) + \beta u(x,T) = f(x), \quad 0 \le x \le 1, \tag{3}$$

где $\varphi_0(y), \varphi_1(y), \alpha(x), \beta(x), f(x)$ – заданные достаточно гладкие в областях своего определения функции, причем $\alpha(x) \neq 0$.

Докажем существование решения задачи А.

Пусть $u(x,y)$ – решение задачи (1) – (3). Тогда, переходя к пределу при $y \to 0+$ в уравнении (1), находим

$$\tau''(x) = \nu(x). \tag{4}$$

Решение первой краевой задачи для уравнения (1) в области Ω_1 допускает интегральное представление [7]:

$$u(x,y) = \int_0^y \varphi_0(\eta) G_\xi(x,y;0,\eta)\, d\eta -$$

$$- \int_0^y \varphi_1(\eta) G_\xi(x,y;1,\eta)\, d\eta + \int_0^1 \tau(\xi) G(x,y;\xi,0)\, d\xi, \tag{5}$$

где

$$G(x,y;\xi,\eta) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}(y-\eta)^{-\frac{1}{2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ exp\left[\frac{(x-\xi+2n)^2}{4(\eta-y)}\right] - exp\left[\frac{(x+\xi+2n)^2}{4(\eta-y)}\right]\right\}$$

функция Грина первой краевой задачи для уравнения теплопроводности.