УДК 517.2
ББК 22.161
Л 50

Лесев В.Н.
Кандидат физико-математических наук, доцент, зав. кафедрой дифференциальных уравнений Кабардино-Балкарского государственного университета им. Х.М. Бербекова, тел. (8662) 77-01-08, e-mail: diff@kbsu.ru
Желдашева А.О.
Старший преподаватель кафедры дифференциальных уравнений Кабардино-Балкарского государственного университета им. Х.М. Бербекова, тел. (8662) 77-01-08, e-mail: 70231125@mail.ru

Нелокальная краевая задача для уравнения смешанного типа второго порядка в характеристической области

(Рецензирована)

Аннотация
Исследуется однозначная разрешимость краевой задачи со смещением для параболо-гиперболического уравнения второго порядка. Вопрос существования решения задачи эквивалентно редуцирован к вопросу разрешимости интегрального уравнения Фредгольма, а единственность решения установлена на основе метода интегралов энергии.
Ключевые слова: *краевая задача, уравнение смешанного типа, интегральное уравнение.*

Lesev V.N.
Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Head of the Department of Differential Equations, Kabardino-Balkar State University named after Kh.M. Berbekov, ph. (8662) 77-01-08, e-mail: diff@kbsu.ru
Zheldasheva A.O.
Senior Lecturer, Department of Differential Equations, Kabardino-Balkar State University named after Kh.M. Berbekov, ph. (8662) 77-01-08, e-mail: 70231125@mail.ru

The nonlocal boundary value problem for second order equations of the mixed type in the characteristic region

Abstract
The work studies the unique solvability of boundary value problem with the shift to parabolic-hyperbolic equation of the second order. A question of existence of the problem solution is reduced to the equivalent of the Fredholm integral equation solvability and uniqueness of the solution is established on the basis of the energy integrals method.
Keywords: *boundary value problem, the equation of the mixed type, the integral equation.*

Теория краевых задач для уравнений смешанного типа является одним из важнейших разделов современной теории дифференциальных уравнений с частными производными. Это обусловлено как непосредственными связями уравнений смешанного типа с проблемами теории сингулярных интегральных уравнений, теорией интегральных преобразований и специальных функций, так и прикладными задачами механики и математической физики, сводящимися к таким уравнениям (например [1-3]).

Анализируя публикации последних лет, можно выделить еще одно приложение, связанное с теорией капиллярности. В самом деле, рассматривая уравнение профиля свободной капиллярной поверхности [4-6], можно отметить, что при переходе к полярным координатам кривизна профиля свисающей или лежащей капли будет напрямую влиять на тип уравнения.

Помимо прикладной значимости исследований смешанных уравнений большой интерес вызывают и фундаментальные аспекты данного раздела теории дифференци-

альных уравнений. В частности, весьма актуальными остаются проблемы, связанные с развитием теории нелокальных операторов, разработка методов редукции краевых задач для смешанных уравнений с разрывными условиями сопряжения к вопросам разрешимости соответствующих интегральных уравнений и выявлением условий, допускающих возможность получения явных решений исследуемых задач.

В рамках настоящей работы указанные проблемы исследованы для смешанного гиперболо-параболического уравнения второго порядка.

Рассмотрим уравнение

$$0 = \begin{cases} u_{xx} - u_y, & y > 0, \\ u_{xx} - u_{yy} + \lambda u, & y < 0 \end{cases} \tag{1}$$

в конечной односвязной области $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup J$, где Ω_1 – область ограниченная отрезками *AB*, *BC*, *CO* и *OA* прямых $x = 1,\ y = T,\ x = 0,\ y = 0$ соответственно; Ω_2 – характеристический треугольник, ограниченный отрезком $OA = J\ \{y = 0,\ 0 < x < 1\}$ оси абсцисс и двумя характеристиками $AD: x - y = 1,\ OD: x + y = 0$ уравнения (1), выходящими из точек *A, O* и пересекающимися в точке $D\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$, $\lambda = const$.

Пусть $\tau(x) = \lim_{y\to 0\pm} u(x,y)$, $\quad v(x) = \lim_{y\to 0\pm} u_y(x,y)$, $\quad \theta(x) = \frac{x}{2} - i\frac{x}{2}$.

Для уравнения (1) исследована следующая

Задача А. Найти регулярное решение $u(x,y)$ уравнения (1) из класса $C(\overline{\Omega}) \cap C^1(\Omega_2 \cup \bar{J})$, удовлетворяющее граничным условиям

$$u(0,y) = \varphi_0(y),\ \ u(1,y) = \varphi_1(y),\ \ 0 \le y \le T \tag{2}$$

и нелокальному условию

$$u[\theta(x)] + \alpha u_y(x,0) + \beta u(x,T) = f(x), \quad 0 \le x \le 1, \tag{3}$$

где $\varphi_0(y), \varphi_1(y), \alpha(x), \beta(x), f(x)$ – заданные достаточно гладкие в областях своего определения функции, причем $\alpha(x) \neq 0$.

Докажем существование решения задачи А.

Пусть $u(x,y)$ – решение задачи (1) – (3). Тогда, переходя к пределу при $y \to 0+$ в уравнении (1), находим

$$\tau''(x) = v(x). \tag{4}$$

Решение первой краевой задачи для уравнения (1) в области Ω_1 допускает интегральное представление [7]:

$$u(x,y) = \int_0^y \varphi_0(\eta) G_\xi(x,y;0,\eta)\, d\eta -$$

$$- \int_0^y \varphi_1(\eta) G_\xi(x,y;1,\eta)\, d\eta + \int_0^1 \tau(\xi) G(x,y;\xi,0)\, d\xi, \tag{5}$$

где

$$G(x,y;\xi,\eta) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}(y-\eta)^{-\frac{1}{2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ exp\left[\frac{(x-\xi+2n)^2}{4(\eta-y)}\right] - exp\left[\frac{(x+\xi+2n)^2}{4(\eta-y)}\right]\right\}$$

функция Грина первой краевой задачи для уравнения теплопроводности.

Полагая в (5) $y = T$, находим

$$u(x,T) = \int_0^T \varphi_0(\eta) G_\xi(x,T;0,\eta)\, d\eta -$$

$$- \int_0^T \varphi_1(\eta) G_\xi(x,T;1,\eta)\, d\eta + \int_0^1 \tau(\xi) G(x,T;\xi,0)\, d\xi. \qquad (6)$$

В области Ω_2, используя решение задачи Коши [8] для уравнения (1), можем записать

$$u(x,y) = \frac{\tau(x-y)+\tau(x+y)}{2} + \frac{1}{2}\int_{x-y}^{x+y} J_0\left(\sqrt{\lambda}\sqrt{(x-\xi)^2-y^2}\right) v(\xi) d\xi -$$

$$-\frac{1}{2}\sqrt{\lambda} y \int_{x-y}^{x+y} \frac{J_2\left(\sqrt{\lambda}\sqrt{(x-\xi)^2-y^2}\right)}{\sqrt{(x-\xi)^2-y^2}} \tau(\xi) d\xi.$$

Отсюда, используя обозначения

$$A_1(x,\xi) = -\frac{1}{2} J_0\left(\sqrt{\lambda\xi(\xi-x)}\right), \quad A_2(x,\xi) = \frac{x}{2\xi\sqrt{\lambda}} \frac{\partial}{\partial x} J_0\left(\sqrt{\lambda\xi(\xi-x)}\right),$$

получим:

$$u\left(\frac{x}{2}; -\frac{x}{2}\right) = \frac{\tau(x)+\tau(0)}{2} + \int_0^x A_1(x,\xi) v(\xi) d\xi + \int_0^x A_2(x,\xi) \tau(\xi) d\xi. \qquad (7)$$

Подставляя (6) и (7) в (3), будем иметь:

$$\tau(x) + \int_0^x B_1(x,\xi) v(\xi) d\xi + \int_0^x B_2(x,\xi) \tau(\xi) d\xi + 2\alpha(x) v(x) +$$

$$+ \int_0^1 B_3(x,\xi) \tau(\xi) d\xi = f_2(x), \qquad (8)$$

где

$$A_3 = \int_0^T \varphi_0(\eta) G_\xi(x,y;0,\eta)\, d\eta - \int_0^T \varphi_1(\eta) G_\xi(x,y;1,\eta)\, d\eta;$$

$$A_4(x,\xi) = \beta(x) G(x,T;\xi,0); \; B_1 = 2A_1; \; B_2 = 2A_2; B_3 = 2A_4;$$

$$f_2(x) = 2f_1(x) - \tau(0) - \beta(x) A_3.$$

С другой стороны, соотношение (4) может быть представлено в виде:

$$T_+ \tau(x) = v(x) \qquad (9)$$

Здесь $T_+ = \frac{d^2}{dt^2}$ – дифференциальный оператор.

Тогда

$$\tau(x) = \int_0^1 G_0(x,t) v(t) dt + [\varphi_1(0) - \varphi_0(0)]x + \varphi_0(0), \qquad (10)$$

где $G_0(x,t)$ – функция Грина задачи Коши для уравнения (9).

Подставляя (9) в (8), получим:

$$2\alpha(x)v(x)+\int_0^1 G_0(x,t)v(t)dt+\int_0^x B_1(x,\xi)v(\xi)d\xi+$$

$$+\int_0^x B_2(x,\xi)\left[\int_0^1 G_0(\xi,t)v(t)dt\right]d\xi+\int_0^1 B_3(x,\xi)\left[\int_0^1 G_0(\xi,t)v(t)dt\right]d\xi=f_3(x), \quad (11)$$

где

$$f_3(x)=\int_0^x B_2(x,\xi)\big([\varphi_1(0)-\varphi_0(0)]\xi+\varphi_0(0)\big)d\xi+$$

$$+\int_0^1 B_3(x,\xi)\big([\varphi_1(0)-\varphi_0(0)]\xi+\varphi_0(0)\big)d\xi-\big(f_2(x)-[\varphi_1(0)-\varphi_0(0)]x-\varphi_0(0)\big).$$

Вводя обозначения

$$C_1(x,t)=\int_0^x B_2(x,\xi)G_0(\xi,t)d\xi, \quad C_2(x,t)=\int_0^1 B_3(x,\xi)G_0(\xi,t)d\xi,$$

представим (11) в виде:

$$v(x)+\frac{1}{2\alpha(x)}\left[\int_0^1 G_0(x,t)v(t)dt+\int_0^x B_1(x,\xi)v(\xi)d\xi+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2\alpha(x)}\int_0^1 C_1(x,t)v(t)dt+\int_0^1 C_2(x,t)v(t)dt\right]=\frac{f_3(x)}{2\alpha(x)}. \quad (12)$$

Последнее равенство в результате элементарных преобразований принимает вид:

$$v(x)+\int_0^1 K(x,t)v(t)dt=\Phi(x), \quad (13)$$

где $K(x,t)$ и $\Phi(x)$ выражаются через заданные функции.

Таким образом, вопрос разрешимости задачи А эквивалентно редуцирован к вопросу разрешимости интегрального уравнения Фредгольма (13). Разрешая его, определяем функцию $v(x)$, а затем $\tau(x)$ из соотношения (10).

Перейдем к доказательству единственности решения задачи А. Покажем, что решение однородной задачи тривиально. Следуя [9], рассмотрим тождество

$$u[u_{xx}-u_y]=\frac{\partial}{\partial x}(uu_x)-u_x^2-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}(u^2)=0.$$

Проинтегрируем его по области Ω_0. Переходя от интеграла по области к интегралу по замкнутому контуру, согласно формуле Грина-Остроградского, будем иметь:

$$\frac{1}{2}\int_0^1 \tau^2(x)dx-\frac{1}{2}\int_0^1 u^2(x,T)dx-\iint_{\Omega_0} u_x^2 dxdy=0. \quad (14)$$

Из (14) следует, что при $u(x,0)=\tau(x)=0$ справедливо тождество $u(x,y)\equiv const$. Откуда в случае однородной задачи заключаем, что $u(x,y)\equiv 0$.

Докажем, что в случае однородной задачи функция $\tau(x)$ обращается в ноль.

Действительно, принимая во внимание, что в случае однородной задачи $\Phi(x)=0$, уравнение (13) принимает вид:

$$v(x)+\int_0^1 K(x,t)v(t)dt=0.$$

Хорошо известно [10], что решение последнего тривиально, т.е. $v(x)=0$.

Таким образом, с учетом (12) заключаем, что в случае однородной задачи $\tau(x) = 0$, а значит функция $u(x, y) \equiv 0$ в области Ω_0 как решение однородной краевой задачи для уравнения теплопроводности, а в области Ω_1 – как решение задачи Коши с однородными данными. Таким образом убеждаемся в единственности решения задачи А.

Примечания:

1. Векуа И.Н. Некоторые общие методы построения различных вариантов теории оболочек. М.: Наука, 1982. 288 с.
2. Седов Л.И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. М.: Наука, 1966. 448 с.
3. Франкль Ф.И. О задачах Чаплыгина для смешанных до- и сверхзвуковых течениях // Изв. АН СССР, серия матем. 1945. Т. 9, № 2. С. 121-142.
4. Hoorfar M., Neumann A.W. Recent progress in Axisymmetric Drop Shape Analysis (ADSA) // Advances in Colloid and Interface Science. 2006. Vol. 121. P. 25-49.
5. Лесев В.Н. Моделирование кинетики профиля поверхности малой капли расплава Pb-Li в различных температурных режимах // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2008, № 3. С. 70-73.
6. Канчукоев В.З., Лесев В.Н., Созаев В.А. Оценка возможных погрешностей при анализе профилей поверхности малых капель металлов // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. 2009, № 4. С. 44-48.
7. Елеев В.А. Аналог задачи Трикоми для смешанных параболо-гиперболических с не характеристической линией изменения типа // Дифференциальные уравнения. 1977. Т. 13. № 1. С. 56-63.
8. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977. 735 с.
9. Елеев В.А., Лесев В.Н. О двух краевых задачах для смешанных уравнений с перпендикулярными линиями изменения типа // Владикавказский мат. журнал. 2001. Т. 3. Вып. 4. С. 9-22.
10. Краснов М.Л. Интегральные уравнения. М.: Наука 1975, 304 с.

References:

1. Vekua I.N. Some general methods of constructing various versions of the theory of shells. M.: Nauka, 1982. 288 pp.
2. Sedov L.I. Plane problems of hydrodynamics and aerodynamics. M.: Nauka, 1966. 448 pp.
3. Frankl F.I. On Chaplygin's problems for mixed subsonic and supersonic flows // News of the USSR AS, Ser. of Math. 1945. Vol. 9, No. 2. P. 121-142.
4. Hoorfar M., Neumann A.W. Recent progress in Axisymmetric Drop Shape Analysis (ADSA) // Advances in Colloid and Interface Science. 2006. Vol. 121. P. 25-49.
5. Lesev V.N. Modeling of the kinetics of the profile of the surface of a small drop of Pb-Li melt at various temperature regimes // Ecological Bulletin of scientific centers of the Black Sea Economic Cooperation. 2008, No. 3. P .70-73.
6. Kanchukoev V.Z., Lesev V.N., Sozaev V.A. Estimate of possible errors in the analysis of profiles of the surface of small drops of metals // News of higher schools. The North-Caucasian region. Natural Sciences. 2009. No. 4. P. 44-48.
7. Eleev V.A. Analog of the Tricomi problem for mixed parabolic-hyperbolic with non-characteristic line of the type change // Differential equations, 1977. Vol. 13. No. 1. P. 56-63.
8. Tikhonov A.N., Samarskiy A.A. Equations of Mathematical Physics. M.: Nauka, 1977. 735 pp.
9. Eleev V.A., Lesev V.N. On two boundary value problems for mixed equations with perpendicular lines of the type change // Vladikavkaz Math. journal. 2001. Vol. 3. Iss. 4. P. 9-22.
10. Krasnov M.L. The integral equations. M.: Nauka, 1975. 304 pp.