УДК 517.977.1
ББК 22.19
Ш 96

Шумафов М.М.
Кандидат физико-математических наук, профессор, зав. кафедрой математического анализа и методики преподавания математики факультета математики и компьютерных наук Адыгейского государственного университета, тел. (8772) 59-39-05

Об условиях стабилизируемости трехмерных линейных систем

(Рецензирована)

Аннотация
Рассматривается задача о стабилизации по выходу трехмерных стационарных линейных управляемых систем обратной связью с запаздыванием. Даны достаточные/необходимые условия стабилизируемости трехмерных линейных систем. Показаны возможности стабилизации систем обратной связью с запаздыванием. Полученные результаты в целом хорошо иллюстрируют эффективность введения запаздывания в обратной связи для стабилизации неустойчивых трехмерных линейных систем.
Ключевые слова: *линейная система, обратная связь с запаздыванием, стационарная стабилизация, проблема Брокетта, асимптотическая устойчивость.*

Shumafov M.M.
Candidate of Physics and Mathematics, Professor, Head of Department of Mathematical Analysis and Methodology of Teaching Mathematics of Mathematics and Computer Science Faculty, Adyghe State University, ph. (8772) 59-39-05

On the conditions of stabilizability of three-dimensional linear systems

Abstract
The problem of stabilization of three-dimensional linear time-invariant controllable systems by means of static time-invariant delayed output feedback is considered. Sufficient/necessary conditions for stabilizability of three-dimensional linear systems are given. The potential of delayed feedback is shown. The obtained results illustrate very well the efficiency of introduction of delayed feedback for stabilization of unstable three-dimensional linear systems.
Keywords: *linear system, delayed feedback, static time-invariant output feedback stabilization, Brockett's problem, asymptotical stability.*

Введение

Одной из проблем, стимулировавшей немало публикаций в последнее десятилетие, была сформулированная Р. Брокеттом проблема стабилизации линейной стационарной системы путем построения нестационарной обратной связи [1].

Первыми публикациями, где дано решение проблемы Брокетта, были работы Г.А. Леонова [2, 3] и Л. Моро и Д. Аэлса [4]. В этих работах построены алгоритмы соответственно низкочастотной и высокочастотной стабилизации линейных стационарных систем. Для двумерных и трехмерных систем было показано, как введение нестационарной обратной связи расширяет возможности стационарной стабилизации.

Возникает вопрос: существуют ли иные, кроме нестационарных, способы стабилизации линейных стационарных систем, позволяющие расширить возможности обычной стационарной стабилизации?

Задача: Может ли введение запаздывания расширить область устойчивости и стабилизировать неустойчивую динамическую систему? Каковы возможности линейной стационарной обратной связи с запаздыванием для стабилизации линейных стационарных систем?

Хорошо известно [5], что для достаточно малых и достаточно больших запаздываний такая стабилизация невозможна. Мотивацией к исследованию стабилизации путем введения запаздывания явились компьютерные эксперименты К. Пирагоса [6-10] по стабилизации хаоса-стабилизации неустойчивых периодических орбит, погруженных в странный аттрактор той или иной хаотической системы.

Вышесформулированная задача решена в [11, 12] для случая двумерных линейных управляемых систем. В настоящей работе эта задача решается для случая трехмерных линейных систем. Здесь получены достаточные (а в некоторых случаях и необходимые) условия стабилизируемости неустойчивых трехмерных стационарных систем путем введения обратной связи с запаздыванием. Рассматриваются два вида обратной связи: обычная и специальная – по Пирагосу [6]. Показано, что линейная система с обратной связью по Пирагосу в седловом случае не является стабилизируемой ни при каком времени запаздывания и никаком постоянном коэффициенте усиления в обратной связи.

Таким образом, для обеспечения эффекта Пирагоса необходимо изучить случай, когда коэффициент усиления k зависит от времени t: $k = k(t)$.

2. Постановка задачи

Рассматривается линейная стационарная система со скалярным входом и скалярным выходом

$$\frac{dx}{dt} = Ax(t) + bu(t), \qquad y(t) = c^* x(t), \tag{1}$$

где $x(t) \in R^n$ – вектор состояния, $u(t) \in R$ – управление (вход), $y(t) \in R$ – выход. Здесь $A \in R^{n\times n}$ – постоянная матрица размера $n \times n$, $b, c \in R^n$ – n-векторы.

Рассматривается два способа введения *обратной связи с запаздыванием*: обычная

$$u(t) = ky(t-\tau) \tag{2}$$

и по Пирагосу

$$u(t) = k\left[y(t-\tau) - y(t)\right], \tag{3}$$

где $k \neq 0$ и $\tau > 0$ – параметры.

Система (1), замкнутая обратными связями (2) и (3), представляет собой дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом

$$\frac{dx}{dt} = Ax(t) + bkc^* x(t-\tau) \tag{4}$$

и

$$\frac{dx}{dt} = Ax(t) + bkc^*\left[x(t-\tau) - x(t)\right] \tag{5}$$

соответственно.

Основная задача: Требуется найти значения параметров $k \neq 0$ и $\tau > 0$ такие, чтобы замкнутая система (4)/(5) оказалась асимптотически устойчивой.

Ниже основная задача решается для трехмерных систем.

3. Формулировка результатов

3.1. Сначала сформулируем результат, касающийся одномерного случая

$$\frac{dx}{dt} = ax + bu, \qquad y = cx. \tag{6}$$

Без ограничения общности можно считать $b = 1$, $c = 1$. Замкнутые системы (6), (2) и (6), (3) имеют соответственно вид

$$\frac{dx}{dt} = ax + kx(t - \tau), \tag{7}$$

$$\frac{dx}{dt} = ax + k[(t - \tau) - x(t)]. \tag{8}$$

Справедливо следующее

Утверждение 1. Одномерную систему (6) невозможно стабилизировать обратной связью Пирагоса ни при каких значениях параметров $k \neq 0$ и $\tau > 0$.

3.2. Для двумерных систем с неполными обратными связями вида (2) и (3) соответствующие результаты приведены в [11, 12]. Рассмотрим теперь вопрос о стабилизации двумерной системы

$$\frac{dx}{dt} = Ax + u, \tag{9}$$

где $x \in R^2$, $u \in R^2$, $A \in R^{2\times2}$, посредством *полной* обратной связи по Пирагосу

$$u = C[x(t - \tau) - x(t)]. \tag{10}$$

Здесь $C \in R^{2\times2}$ – варьируемая матрица, а $\tau > 0$ – скалярный параметр (запаздывание).

Замкнутая система (9), (10) имеет вид

$$\frac{dx}{dt} = Ax + C[x(t - \tau) - x(t)]. \tag{11}$$

Пусть

$$\det(\lambda E - A) = \lambda^2 + a_2\lambda + a_1 \quad (a_1,\ a_2 \in R)$$

характеристический полином разомкнутой $(u = 0)$ системы (9).

Справедливы следующие утверждения.

Теорема 1. Для стабилизируемости системы (9) обратной связью вида (10) необходимо и достаточно, чтобы $a_1 > 0$.

Следствие 1. Пусть состояние равновесия разомкнутой системы (9) $(u = 0)$ есть неустойчивый узел или фокус. Тогда существуют матрица C и число $\tau > 0$ такие, что состояние равновесия замкнутой системы (11) асимптотически устойчиво.

Следствие 2. Пусть состояние равновесия разомкнутой системы (9) $(u = 0)$ есть седло, или характеристический полином разомкнутой системы имеет нулевой корень. Тогда стабилизация системы (9) с помощью обратной связи (10) невозможна ни при каких значениях матрицы C и запаздывания $\tau > 0$.

3.3. Рассмотрим трехмерную линейную управляемую систему, записанную в канонической форме

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = x_2(t), \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} = x_3(t), \\ \dfrac{dx_3(t)}{dt} = -a_1x_1(t) - a_2x_2(t) - a_3x_3(t) - u(t), \\ y(t) = c_1x_1(t) + c_2x_2(t) + c_3x_3(t), \end{cases} \tag{12}$$

где $a_i,\ c_i\ \ (i = 1, 2, 3)$ – вещественные параметры.

Будем различать три случая:

1) $c_1 \neq 0,\ c_2 = c_3 = 0$;

2) $c_2 \neq 0,\ c_1 = c_3 = 0$;

3) $c_3 \neq 0,\ c_1 = c_3 = 0$.

Имеют место следующие теоремы.

Случай 1) $c_1 \neq 0,\ c_2 = c_3 = 0$. Без умаления общности можно считать $c_1 = 1$. *Стационарная стабилизация* $u(t) = ky(t)$ без запаздывания системы (12) возможна тогда и только тогда, когда $a_2 > 0$, $a_3 > 0$.

Теорема 2. Пусть в системе (12) $c_1 \neq 0\ (c_1 := 1), c_2 = c_3 = 0$. Тогда для стабилизируемости системы (12) обратной связью (2) необходимо и достаточно, чтобы

$$a_2 > 0, \quad a_3 > 0 \quad \text{или} \quad a_2 < 0,\ a_3 > 0,\ a_2^2 < 2a_1a_3.$$

Теорема 3. Пусть в системе (12) $c_1 \neq 0, (c_1 := 1), c_2 = c_3 = 0$. Тогда система (12) стабилизируема обратной связью (3) в том и только том случае, если

$$a_1 > 0, \quad a_3 > 0.$$

Следствие 1. Пусть состояние равновесия разомкнутой системы (12) $(u = 0)$ есть седловая точка типа $(-, +, +)$ с собственными числами $\lambda_1 < 0,\ \lambda_2 > 0,\ \lambda_3 > 0$. Тогда состояние равновесия замкнутой системы (12), (3), асимптотически устойчиво тогда и только тогда, когда

$$\lambda_2 + \lambda_3 < -\lambda_1.$$

Далее, если $a_2 < 0$, то область асимптотической устойчивости задается неравенствами

$$\lambda_2 + \lambda_3 < -\lambda_1, \quad \lambda_2\lambda_3 < \lambda_1^2/4.$$

Следствие 2. Пусть состояние равновесия разомкнутой системы (12) $(u = 0)$ есть седловая точка типа $(-, -, +)$ $(\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0, \lambda_3 > 0)$ или неустойчивый фокус с $\mathrm{Re}\,\lambda_{1,2} < 0,\ \lambda_3 > 0$, или характеристический полином разомкнутой системы имеет нулевой корень. Тогда систему (12) невозможно стабилизировать обратной связью (3) ни при каких значениях параметров k и $\tau > 0$.

Случай 2) $c_2 \neq 0,\ c_1 = c_3 = 0$. Не умаляя общности, можно считать, что $c_2 := 1$. *Стационарная стабилизация* $u(t) = ky(t)$ возможна тогда и только тогда, когда

$a_1 > 0,\ a_3 > 0$.

Теорема 4. Пусть в системе (12) $c_2 \neq 0\ (c_2 := 1),\ c_1 = c_3 = 0$. Тогда для стабилизируемости системы (12) обратной связью (2) необходимо и достаточно, чтобы

$$a_1 > 0, \quad a_3 > 0.$$

Теорема 5. Пусть в системе (12) $c_2 \neq 0\ (c_2 := 1),\ c_1 = c_3 = 0$. Тогда для стабилизируемости системы (12) обратной связью (3) достаточно, чтобы выполнялось хотя бы одно из условий:

а) $0 < a_1 < \dfrac{\pi^2}{\pi^2 - 8} a_2 a_3 + \dfrac{8\pi}{(\pi^2 - 8)\sqrt{\pi^2 - 8}} a_2 \sqrt{a_2}, \quad a_2 > 0, \quad a_3 > 0;$

б) $a_1 > \dfrac{\pi}{4 - \pi} a_3 (-a_2) + \dfrac{4\sqrt{\pi}}{(4 - \pi)\sqrt{4 - \pi}} (-a_2)\sqrt{-a_2}, \quad a_2 < 0, \quad a_3 > 0.$

Утверждение 2. Необходимым условием стабилизируемости системы (12) обратной связью (3) является неравенство $a_1 > 0$.

В силу утверждения 2 имеет место утверждение следствия 2 теоремы 3.

Случай 3) $c_3 \neq 0,\ c_1 = c_2 = 0$. Не умаляя общности, считаем $c_3 := 1$. *Стационарная стабилизация* $u(t) = ky(t)$ системы (13) возможна тогда и только тогда, когда $a_1 > 0,\ a_2 > 0$.

Теорема 6. Пусть в системе (12) $c_3 \neq 0\ (c_3 := 1),\ c_1 = c_2 = 0$.

Тогда для стабилизируемости системы (12) обратной связью (2) достаточно, чтобы выполнялось хотя бы одно из условий:

а) $a_1 > 0, \quad a_2 > 0;$

б) $a_2 < 0, \quad a_3 > 0, \quad a_1 > \dfrac{\pi + 3\sqrt{3}}{\pi - 3\sqrt{3}} a_2 \left(a_3 + 6\sqrt{\dfrac{a_2}{\pi^2 - 27}} \right);$

в) $a_3 < 0, \quad a_2 < \dfrac{\pi^2 - 27}{\left(6 - \pi\sqrt{3}\right)^2} a_3^2, \quad a_1 > \dfrac{\pi + 3\sqrt{3}}{\pi - 3\sqrt{3}} a_2 \left(a_3 + 6\sqrt{\dfrac{a_2}{\pi^2 - 27}} \right).$

Теорема 7. Пусть в системе (12) $c_3 \neq 0\ (c_3 := 1),\ c_1 = c_2 = 0$ Тогда для того чтобы система (12) была стабилизируема обратной связью (3) достаточно выполнения хотя бы одного из следующих условий:

а) $a_2 > 0, \quad a_3 > 0, \quad 0 < a_1 < a_2 \left(a_3 + \dfrac{4}{(-\sigma_0)\pi} \sqrt{a_2} \right);$

б) $a_1 > 0, \quad a_3 > 0, \quad a_2 > \dfrac{\pi + 12\left(2 - \sqrt{3}\right)}{\pi} \cdot \dfrac{a_1}{a_3} - \dfrac{12\sqrt{a_1 a_3}}{\sqrt{\pi\left[\pi + 12\left(2 - \sqrt{3}\right)\right]}};$

в) $a_1 > \dfrac{\pi + 3\sqrt{3}}{\pi - 3\sqrt{3}} a_2 \left(a_3 - 6\sqrt{\dfrac{a_2}{\pi^2 - 27}} \right), \quad 0 > a_2 > \dfrac{\pi^2 - 27}{\left(6 + \pi\sqrt{3}\right)^2} a_3^2.$

Здесь в теореме 7 $\sigma_0 = \min\limits_{\alpha\in[0,2\pi]}(\cos\alpha + \sin\alpha/\alpha)$ $(\sigma_0 \approx -1{,}0419)$.

В силу утверждения 2 и здесь справедливо также утверждение следствия 2 теоремы 3.

3.4. Рассмотрим трехмерную линейную управляемую систему

$$\frac{dx}{dt} = Ax + u, \tag{13}$$

где управление формулируется по принципу полной обратной связи по Пирагосу

$$u(t) = C[x(t-\tau) - x(t)]. \tag{14}$$

Здесь $x \in R^3$, $A \in R^{3\times3}$, $u \in R^3$, матрица $C \in R^{3\times3}$ и $\tau > 0$ – варьируемые параметры.

Справедлива следующая

Теорема 8. Разомкнутая система (13) $(u = 0)$ с характеристическим полиномом

$$\det(\lambda E - A) = \lambda^3 + a_3\lambda^2 + a_2\lambda + a_1$$

стабилизируема обратной связью (14), если

$$a_1 > 0,\ \ a_3 > 0.$$

Замечание. Условия $a_1 > 0,\ a_3 > 0$ являются также и необходимыми для стабилизируемости системы (13) обратной связью (14).

Следствие 1. Пусть состояние равновесия разомкнутой системы (13) $(u = 0)$ есть седловая точка типа $(-, +, +)$ с собственными числами $\lambda_1 < 0,\ \lambda_2,\ \lambda_3 > 0$ или неустойчивый фокус с собственными числами $\lambda_1 < 0,\ \mathrm{Re}\,\lambda_{2,3} > 0$. Тогда для стабилизируемости системы (13) обратной связью (14) необходимо и достаточно, чтобы

$$\lambda_2 + \lambda_3 < -\lambda_1.$$

Следствие 2. Пусть состояние равновесия разомкнутой системы (13) $(u = 0)$ есть седловая точка типа $(-, -, +)$ $(\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0, \lambda_3 > 0)$ или неустойчивый фокус с $\mathrm{Re}\,\lambda_{1,2} < 0,\ \ \lambda_3 > 0,$ или характеристический полином разомкнутой системы имеет нулевой корень. Тогда систему (13) невозможно стабилизировать обратной связью (14) ни при каком выборе матрицы C и параметра $\tau > 0$.

В заключение автор благодарит чл.-корр. РАН Леонова Г.А. за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

Примечания:

1. Brockett R.A Stabilization problem // Open Problems in Mathematical Systems and Control Theory. London: Springer, 1999. 288 pp.
2. Леонов Г.А. Стабилизационная проблема Брокетта // Авт. и Телем. 2001. № 5. С. 190-

References:

1. Brockett R.A Stabilization problem // Open Problems in Mathematical Systems and Control Theory. London: Springer, 1999. 288 pp.
2. Leonov G.A. Brockett's stabilization problem // Automatics and Telemechanics. 2001.

193.

3. Леонов Г.А. Проблема Брокетта в теории устойчивости линейных дифференциальных уравнений // Алгебра и анализ. 2001. Т. 13, вып. 4. С. 134-155.
4. Moreau L., Aeyels D. Periodic output feedback stabilization of single-input single-output continuous-time systems with odd relative degree // Syst. & Contr. Lett. 2004. Vol. 51, No. 5. P. 395-406.
5. Эльсгольц Л.Э., Норкин С.Б. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. М.: Наука, 1971. 296 с.
6. Pyragas K. Continuous control of chaos by self-controlling feedback // Phys. Lett. A. 1992. Vol. 170. P. 421-428.
7. Pyragas K. Control of chaos via extended delay feedback // Phys. Lett. A. 1995. Vol. 206. P. 323-330.
8. Namajūnas A., Pyragas K., Tamaševičius A. Stabilization of an unstable steady state in a Mackey-Class system // Phys. Lett. A. 1995. Vol. 204. P. 255-262.
9. Pyragas V., Pyragas K. Delayed feedback control of the Lorenz system: An analytical treatment at a subcritical Hopf bifurcation // Phys. Rev. E. 2006. Vol. 73. 036215. P. 1-10.
10. Delayed feedback control of periodic orbits without torsion in nonautonomous systems: Theory and experiment / A. Tamaševičius, G. Mykolaitis, V. Pyragas, K. Pyragas // Phys. Rev. E. 2007. Vol. 76. 026203. P. 1-6.
11. Шумафов М.М. О стабилизации двумерных линейных управляемых систем обратной связью с запаздыванием // Вестник Адыгейского государственного университета. Сер. Естественно-математические и технические науки. 2010. Вып. 2 (61). С. 40-52. URL: http://vestnik.adygnet.ru
12. Шумафов М.М. Стабилизация линейных стационарных управляемых систем второго порядка обратной связью с запаздыванием // Изв. вузов. Математика. 2010. № 12. С. 87-90.

No. 5. P. 190-193.

3. Leonov G.A. Brockett's problem in the theory of stability of linear differential equations // Algebra and analysis. 2001. Vol. 13, Iss. 4. P. 134-155.
4. Moreau L., Aeyels D. Periodic output feedback stabilization of single-input single-output continuous-time systems with odd relative degree // Syst. & Contr. Lett. 2004. Vol. 51, No. 5. P. 395-406.
5. Elsgolts L.E., Norkin S.B. Introduction to the theory of differential equations with divergent argument. M.: Nauka, 1971. 296 pp.
6. Pyragas K. Continuous control of chaos by self-controlling feedback // Phys. Lett. A. 1992. Vol. 170. P. 421-428.
7. Pyragas K. Control of chaos via extended delay feedback // Phys. Lett. A. 1995. Vol. 206. P. 323-330.
8. Namajūnas A., Pyragas K., Tamaševičius A. Stabilization of an unstable steady state in a Mackey-Class system // Phys. Lett. A. 1995. Vol. 204. P. 255-262.
9. Pyragas V., Pyragas K. Delayed feedback control of the Lorenz system: An analytical treatment at a subcritical Hopf bifurcation // Phys. Rev. E. 2006. Vol. 73. 036215. P. 1-10.
10. Delayed feedback control of periodic orbits without torsion in nonautonomous systems: Theory and experiment / A. Tamaševičius, G. Mykolaitis, V. Pyragas, K. Pyragas // Phys. Rev. E. 2007. Vol. 76. 026203. P. 1-6.
11. Shumafov M.M. On stabilization of two-dimensional linear controllable systems by delayed feedback // The Bulletin of the Adyghe State University. Series Natural-Mathematical and Technical Sciences. 2010. Iss. 2 (61). P. 40-52. URL: http://vestnik.adygnet.ru
12. Shumafov M.M. Stabilization of the second-order linear controllable systems by delayed feedback // News of higher schools. Mathematics. 2010. No. 12. P. 87-90.