

---

УДК 533  
ББК 22.253  
Щ 95

**Шукин Е.Р.**

*Доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник объединенного института высоких температур РАН, тел. (495) 977-51-07, e-mail: evgrom@yandex.ru*

**Малай Н.В.**

*Доктор физико-математических наук, профессор кафедры теоретической и математической физики Белгородского государственного национального исследовательского университета (НИУ «БелГУ»), тел. (4722) 31-50-20, e-mail: malay@bsu.edu.ru*

**Шулиманова З.Л.**

*Доктор физико-математических наук, профессор, зав. кафедрой физики и химии Российской открытой академии транспорта Московского государственного университета путей сообщения (МИИТ), тел. (495) 799-95-32, e-mail: zinaida110@yandex.ru*

**Об одномерном движении сферических аэрозольных частиц  
при их торможении при больших числах Рейнольдса  
(Рецензирована)**

**Аннотация**

На основе экспериментальных данных найдено аналитическое выражение, которое в интервале чисел Рейнольдса  $0 < Re < 10^3$  с точностью до 5% описывает зависимость от числа Рейнольдса коэффициента сопротивления  $C_D$  газообразной среды движению сферической аэрозольной частицы. С помощью этого выражения было проведено интегрирование в явном виде одномерного нелинейного уравнения движения сферической частицы с учетом инерции частицы и силы сопротивления. При этом были получены формулы, позволяющие непосредственно оценивать время перехода частицы из состояния с начальным числом Рейнольдса  $Re_i$  в состояние с конечным числом Рейнольдса  $Re_f$ , а также расстояние, преодолеваемое при этом частицей. Проведен анализ полученных результатов.

**Ключевые слова:** сферическая аэрозольная частица, одномерное нелинейное уравнение, инерция, сопротивление, время перехода.

**Shchukin E.R.**

*Doctor of Physics and Mathematics, Professor, the Leading Scientist of Joint Institute for High Temperatures of the Russian Academy of Science, ph. (495) 977-51-07, e-mail: evgrom@yandex.ru*

**Malay N.V.**

*Doctor of Physics and Mathematics, Professor of Theoretical and Mathematical Physics Department, Belgorod State National Research University, ph. (4722) 31-50-20, e-mail: malay@bsu.edu.ru*

**Shulimanova Z.L.**

*Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Head of Physics and Chemistry Department, Russian Open Academy of Transport, Moscow State University of Ways of Communication, ph. (495) 799-95-32, e-mail: zinaida110@yandex.ru*

**On one-dimensional movement of spherical aerosol particles  
at their braking at Reynolds large numbers**

**Abstract**

The analytical expression is found on the basis of experimental data. This expression describes, in the interval of Reynolds numbers  $0 < Re < 10^3$  with accuracy up to 5%, the dependence of the coefficient of resistance  $C_D$  of gaseous environment to the motion of a spherical aerosol particle upon the Reynolds number. The analytical expression is used to carry out the integration in the explicit form of the one-dimensional nonlinear equation of motion of a spherical particle taking into account the inertia of the particle and the force of resistance. The formula to directly assess the time of transition of a particle from the state with the initial Reynolds number  $Re_i$  into the state with finite Reynolds number  $Re_f$  as well as the distance, travelled by the particle were obtained.

---

The analysis of the obtained results is carried out.

**Keywords:** spherical aerosol particle, one-dimensional nonlinear equation, inertia, resistance, transition time.

Движущиеся в газообразной среде аэрозольные частицы могут иметь большие начальные скорости и числа Рейнольдса. Большие начальные скорости и числа Рейнольдса могут иметь, например, частицы дробы и частицы, вылетающие с поверхности шлифовального круга и из двигателей реактивного самолета.

На аэрозольные частицы при их движении со стороны газообразной среды действует сила сопротивления, которая замедляет их движение. Действие силы сопротивления прекращается, когда частица останавливается. Расстояние, которое преодолевает частица до полной остановки, называется расстоянием торможения [1]. Его длина сильно зависит от начального значения числа Рейнольдса  $Re_i$ .

В практических приложениях значительный интерес представляет знание достаточно простых инженерных формул, позволяющих при известных размерах и начальных значениях чисел Рейнольдса  $Re_i$  аэрозольных частиц непосредственно оценивать их движение при торможении как при малых, так и больших начальных числах Рейнольдса. Но до настоящего времени такие формулы получены не были.

Выводу формул, с помощью которых, при значениях чисел  $0 < Re < 1000$ , можно непосредственно оценивать в случае одномерного движения зависимость от времени  $t$  числа Рейнольдса и скорости твердых сферических частиц, а также расстояние торможения и посвящена настоящая статья.

При решении задачи предполагалось, что движение частицы с диаметром  $d$ , начальным значением числа Рейнольдса  $Re_i$  и скоростью  $\vec{V}_i = V_{ix} \vec{n}_x$  происходит в горизонтальном направлении вдоль оси  $Ox$ . Движению частицы препятствует сила сопротивления  $\vec{F}_D$  [1]:

$$\vec{F}_D = F_D \vec{n}_x, \quad F_D = -\pi C_D \rho_m d^2 V_x^2 / 8 = -\pi C_D \mu \nu Re^2 / 8, \quad (1)$$

где  $V_x$  – проекция вектора скорости частицы  $\vec{V}$  на ось  $Ox$ ,  $\vec{n}_x$  – единичный вектор в направлении оси  $Ox$ ;  $C_D$  – коэффициент сопротивления среды движению частицы, зависящий от числа Рейнольдса частицы  $Re = \frac{Vd}{\nu}$  [1];  $\nu = \mu / \rho_m$  – кинематическая вязкость среды;  $\mu$  – динамическая вязкость газа;  $\rho_m$  – плотность газа.

Уравнение движения частицы при учете (1) имеет следующий вид:

$$m \frac{dV_x}{dt} = F_D, \quad \frac{dV_x}{dt} = -\pi C_D \frac{\mu \nu Re^2}{8m}, \quad (2)$$

где  $t$  – время;  $m = \frac{\pi}{6} d^3 \rho_p$  – масса частицы;  $d$  – диаметр;  $\rho_p$  – плотность вещества частицы.

Введя в уравнения (2) число Рейнольдса, получаем:

$$\frac{dRe}{dt} = -\frac{C_D}{24\tau} Re^2, \quad (3)$$

где  $\tau = d^2 \rho_p / 18\mu$  – время релаксации сферической аэрозольной частицы при числах  $Re \ll 1$  [1].

Из (3) следует, что

$$dt = -\frac{24\tau}{C_D \text{Re}^2} d\text{Re}. \quad (4)$$

Интегрируя (4) от начального значения  $\text{Re}_i$  до конечного  $\text{Re}_f$ , получаем следующее выражение для времени перехода  $t$  частицы из состояния с  $\text{Re}_i$  в состояние с  $\text{Re}_f$ :

$$t = \tau\psi(\text{Re}_i, \text{Re}_f), \quad (5)$$

$$\psi(\text{Re}_i, \text{Re}_f) = -24 \int_{\text{Re}_i}^{\text{Re}_f} \frac{d\text{Re}}{C_D \text{Re}^2} = 24 \int_{\text{Re}_f}^{\text{Re}_i} \frac{d\text{Re}}{C_D \text{Re}^2}. \quad (6)$$

Дифференциал  $dS$  пройденного за время  $dt$  пути  $S$  равен:

$$dS = V_x dt. \quad (7)$$

Учитывая (4), приходим к

$$dS = -\frac{4d}{3C_D \text{Re}} \left( \frac{\rho_p}{\rho_m} \right) d\text{Re}, \quad (8)$$

где  $d\text{Re}$  – дифференциал  $\text{Re}$ .

Интегрируя (8) от  $\text{Re}_i$  до  $\text{Re}_f$ , получаем следующее выражение для пути  $S$ , пройденного частицей при переходе из состояния с  $\text{Re}_i$  в состояние с  $\text{Re}_f$ :

$$S = dL(\text{Re}_i, \text{Re}_f), \quad (9)$$

$$L(\text{Re}_i, \text{Re}_f) = \frac{4}{3} \frac{\rho_p}{\rho_m} \int_{\text{Re}_f}^{\text{Re}_i} \frac{d\text{Re}}{C_D \text{Re}}. \quad (10)$$

Следует отметить, что найденные выражения (5) и (9) не позволяют непосредственно оценивать величину  $t$  и  $S$ , так как в них входят определенные интегралы, содержащие коэффициент  $C_D$  сопротивления газообразной среды движению частицы [1].

Этот коэффициент сложным образом зависит от числа Рейнольдса. Экспериментально полученные значения коэффициента  $C_D$  [2] для сферических частиц в воздухе приведены в таблице 1.

Аналитический вывод выражений для  $C_D$  является сложной в математическом отношении задачей. Найденные в приближении Стокса и Озеена выражения для коэффициента  $C_D$  имеют следующий вид:

$$C_D = \frac{24}{\text{Re}}, \quad (11)$$

$$C_D = \frac{24}{\text{Re}} \left( 1 + \frac{3}{16} \text{Re} \right). \quad (12)$$

Значения  $C_D$ , вычисленные по формулам (11) и (12), приведены в таблице 1. Сравнение этих теоретических значений  $C_D$  с экспериментальными показывает, что при числе  $\text{Re} > 1$  формула Стокса (11) дает значения  $C_D$  заниженные больше, чем на 9%, а формула Озеена – завышенные больше, чем на 7,5%.

Из таблицы 1 видно, что при числах  $\text{Re} < 1000$  экспериментальные данные достаточно хорошо описывают эмпирические формулы (13), (14) [1]:

$$C_D = \frac{24}{\text{Re}} (1 + 0,15 \text{Re}^{0,687}), \quad (13)$$

$$C_D = \frac{24}{Re} + \frac{4}{Re^{0,33}}. \quad (14)$$

Но с помощью этих формул нельзя получить явные аналитические выражения (5) для времени  $t$  и (9) для пути  $S$ . Этому недостатка лишена полученная авторами на основании приведенных в таблице 1 экспериментальных данных следующая формула для зависимости коэффициента  $C_D$  от числа Рейнольдса:

$$C_D = \frac{24}{Re} \sqrt{1 + A Re + B Re^2}, \quad (15)$$

где  $A=0,1865$ ,  $B=1,52 \cdot 10^{-4}$ . Вычисленные по формуле (15) значения  $C_D$  приведены в таблице 1. Их отличие от экспериментальных не превышает 5%.

Таблица 1

Экспериментальные и вычисленные по формулам (11) – (15) значения  $C_D$  в зависимости от  $Re$

Re	Эксперимент	Формулы				
		(11)	(12)	(13)	(14)	(15)
0,1	240	240	244,5	247,4	248,6	242,22
0,2	120	120	124,5	126,0	126,8	122,22
0,3	80	80	84,5	85,3	86,0	82,21
0,5	49,5	48	52,5	52,5	53,0	50,19
0,7	36,5	34,28	38,76	38,3	38,8	36,45
1,0	26,5	24	28,50	27,6	28,0	26,14
2	14,6	12	16,50	14,9	15,2	14,06
3	10,4	8	12,50	10,6	10,8	9,99
5	6,9	4,80	9,30	7,0	7,14	6,68
7	5,3	3,43	7,93	5,4	5,52	5,21
10	4,1			4,2	4,26	4,07
20	2,55			2,61	2,67	2,63
30	2,00			2,04	2,09	2,08
50	1,50			1,54	1,57	1,57
70	1,27			1,30	1,31	1,32
100	1,07			1,09	1,10	1,10
200	0,77			0,81	0,80	0,80
300	0,65			0,68	0,68	0,67
500	0,55			0,56	0,55	0,55
700	0,50			0,50	0,48	0,49
1000	0,46			0,44	0,42	0,44

После подстановки формулы для  $C_D$  (15) в коэффициенты (6) и (10) получаем:

$$\psi(Re_i, Re_f) = \ln[\theta(Re_f)/\theta(Re_i)], \quad (16)$$

$$L(Re_i, Re_f) = \frac{1}{18} \frac{\rho_p}{\rho_m} \frac{1}{\sqrt{B}} \ln[H(Re_i)/H(Re_f)], \quad (17)$$

где

$$\theta(\text{Re}) = \left[ 2 \frac{\sqrt{1 + A \text{Re} + B \text{Re}^2}}{\text{Re}} + \frac{2}{\text{Re}} + A \right], \quad (18)$$

$$H(\text{Re}) = \left[ 2 \sqrt{B(1 + A \text{Re} + B \text{Re}^2)} + 2B \text{Re} + A \right]. \quad (19)$$

Формулы (5), (16) позволяют непосредственно находить при заданных диаметре, плотности и  $\text{Re}_i$  частицы время ее перехода в состояние с числом  $\text{Re}_f$ . В таблице 2 приведены полученные с помощью этих формул данные по зависимости от времени чисел  $\text{Re}_f$  и проекций скорости  $V_{fx}$  частиц стали с диаметрами  $d=0,4; 0,2; 0,1$  см,  $\text{Re}_i=1000$ , находящихся в воздухе с  $t^0=20^\circ\text{C}$  и давлением  $p=1$  атм.

Таблица 2

Зависимости от времени  $t$  чисел  $\text{Re}_f$  и проекций  $V_{fx}$  при  $\text{Re}_i=1000$

$\text{Re}_f$		800	200	25	5	1	0,1
$\psi(\text{Re}_i, \text{Re}_f)$		0,018	0,156	0,707	1,625	2,963	5,189
$d=0,4$ см, $V_{ix}=3,75$ м/с, $\tau=380$ с	$V_{fx}$ см/с	300	75	9,4	1,9	0,38	0,038
	$t$ , с	6,84	59,28	268,7	617,5	1126	1972
$d=0,2$ см, $V_{ix}=7,5$ м/с, $\tau=95$ с	$V_{fx}$ см/с	600	150	18,4	3,8	0,76	0,076
	$t$ , с	1,71	14,82	67,18	154,4	281,5	493
$d=0,1$ см, $V_{ix}=15$ м/с, $\tau=23,75$ с	$V_{fx}$ см/с	1200	300	36,8	7,6	1,52	0,152
	$t$ , с	0,4275	3,705	16,79	38,59	70,38	123,3

Данные таблицы 2 показывают, что и при больших числах Рейнольдса  $\text{Re}_i$ , как и в случае малых [1], характерное время торможения частицы близко к  $7\tau$ .

Формулы (9), (17) позволяют при известном диаметре частицы  $d$ , ее плотности  $\rho_p$  и  $\text{Re}_i$  находить проходимый частицей путь при переходе из начального состояния с  $\text{Re}_i$  в конечное состояние с  $\text{Re}_f$ . Например, длину пути  $S_T$ , который частицы проходят до остановки, можно найти с помощью формул (9), (17) подставив в них  $\text{Re}_f=0$ . При этом формула для расстояния торможения  $S$  имеет следующий вид:

$$S_T = dL_T, \quad (20)$$

где

$$L_T = L(\text{Re}_i, \text{Re}_f) \Big|_{\text{Re}_f=0} = \frac{1}{18} \frac{\rho_p}{\rho_m} \frac{1}{\sqrt{B}} \ln \left[ \frac{H(\text{Re}_i)}{(2\sqrt{B} + A)} \right]. \quad (21)$$

Проведенный анализ формулы для расстояния  $S_T$  (20) показал, что при начальных числах Рейнольдса  $\text{Re}_i < 2$  зависимость расстояния торможения  $S_T$  от числа  $\text{Re}_i$  близка к линейной. При больших числах Рейнольдса зависимость расстояния торможения от числа  $\text{Re}_i$  носит уже более сложный характер. Характер зависимости расстояния торможения  $S_T$  от числа  $\text{Re}_i$  достаточно хорошо показывает ход кривой на рисунке 1. На рисунке 1 приведена найденная с помощью формулы (20) при температуре воздуха  $t^0 = 20^\circ\text{C}$  и давлении  $p=1$  атм для частицы гранита с  $\rho_p = 32$  г/см<sup>3</sup> кривая зависимости отношения  $L_T = S_T / d$  от числа  $\text{Re}_i$ , где  $d$  – диаметр частицы.

Расстояние торможения  $S_T$  может быть значительным. При числе  $Re_i=1000$  коэффициент  $L_T=16800$ . В этом случае длина торможения частиц гранита  $S_T = 16800d$  и при  $d=1$  см (начальной скорости  $V_{ix} = \frac{V}{d} Re_i = 1,5 м/с$ ) длина  $S_T = 168 м$ , при  $d=0,2$  см ( $V_{ix} = 7,5 м/с$ ) длина  $S_T = 33,6 м$ , при  $d=0,02$  см ( $V_{ix} = 75 м/с$ ) длина  $S_T=3,36 м$ .

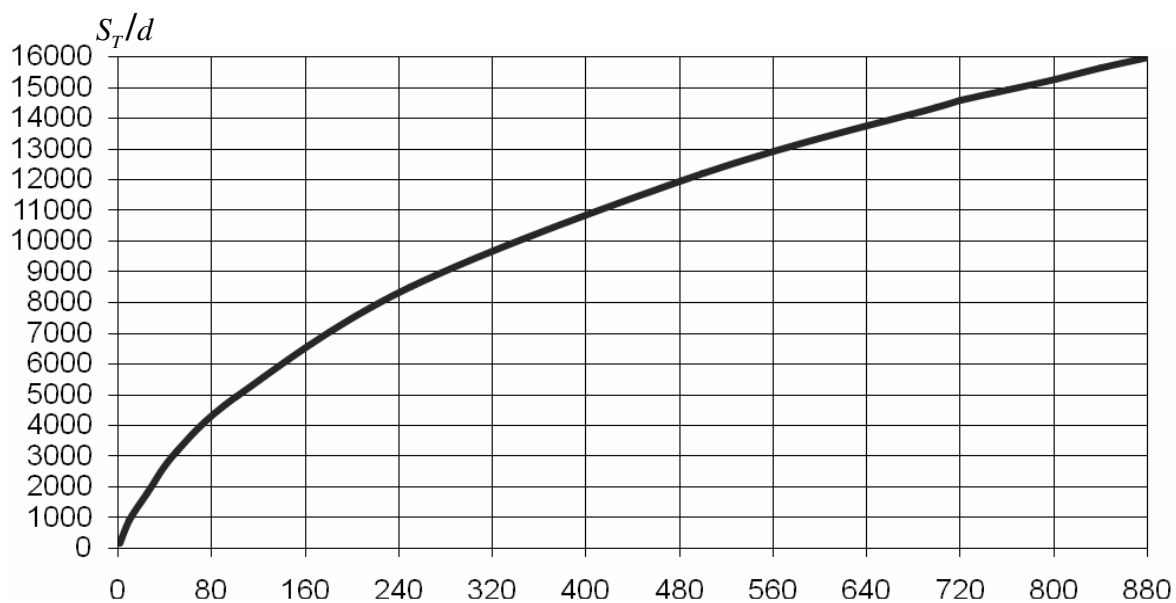


Рис. 1. Зависимость отношения  $L_T = S_T/d$  от начального числа  $Re_i$

**Примечания:**

1. Райст П. Аэрозоли. Введение в теорию. М.: Мир. 1987. 280 с.
2. Perry R.H., Chilton C.N. Chemical engineers handbook. 5-th Ed. New York: McGraw-Hill. 1973.

**References:**

1. Reist P. Introduction aerosol science. M.: Mir. 1987. 280 pp.
2. Perry R.H., Chilton C.N. Chemical engineers handbook. 5-th Ed. New York: McGraw-Hill. 1973.