МАТЕМАТИКА
MATHEMATICS

УДК 517.956
ББК 22.161.616
С 92

Схаляхо Ч.А.
Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики и физики Краснодарского высшего военного училища (военный институт) имени С.М. Штеменко, Краснодар, e-mail: scha1@mail.ru
Тугуз Н.С.
Кандидат педагогических наук, доцент кафедры общих математических и естественно-научных дисциплин филиала Майкопского государственного технологического университета в п. Яблоновском, тел. (8771) 98-1-63, e-mail: tuguzns@mail.ru

О существовании нулей решений линейной дифференциальной системы на конечном промежутке
(Рецензирована)

Аннотация
Рассматриваются колеблющиеся решения системы двух линейных дифференциальных уравнений, коэффициенты которых являются знакопеременными функциями. При этом вопросы колеблемости изучаются по компанентам. Приводятся достаточные условия существования одной из компонент систем дифференциальных уравнений на заданном конечном промежутке. Рассмотрены нетривиальные решения данной системы.
Ключевые слова: *колеблемость, система двух линейных дифференциальных уравнений, знакопеременные коэффициенты, достаточные условия существования нуля.*

Skhalyakho Ch.A.
Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of Mathematics and Physics Department, Krasnodar Military Higher Institution (Military Institute) named after S.M. Shtemenko, Krasnodar, e-mail: scha1@mail.ru
Tuguz N.S.
Candidate of Pedagogy, Associate Professor of Department of General Mathematics and Natural Science Disciplines, Branch of Maikop State University of Technology in the settlement of Yablonovsky, ph. (8771) 98-1-63, e-mail: tuguzns@mail.ru

On existence of zeroes to solutions of the linear differential system in a final interval

Abstract
The paper sheds light on fluctuating solutions of system of two linear differential equations the factors of which are sign-variable functions. Questions related to fluctuation are studied by components. The authors show the sufficient conditions for existence of one of the system components of the differential equations in the set final interval. Uncommon solutions of this system are considered.
Keywords: *fluctuation, system of two linear differential equations, sign-variable factors, sufficient conditions for zero existence.*

Рассмотрим систему двух линейных дифференциальных уравнений

$$u_1' = a_1(t)\,u_2, \quad u_2' = a_2(t)\,u_1, \tag{1}$$

где функции $a_i : [\ 0,\ +\infty) \to R \quad (i = 1,2)$ суммируемы на каждом конечном отрезке промежутка $[0, +\infty)$.

Непрерывную функцию u, определенную на $[0,+\infty)$ и тождественно не равную нулю при больших значениях t, назовем колеблющейся, если она имеет последовательность нулей, стремящуюся к $+\infty$.

Легко убедиться, что в случае, когда $a_1(t) \geq 0$ при $t \geq 0$, из колеблемости компоненты u_1 некоторого нетривиального решения (u_1, u_2) системы (1) следует колеблемость и компоненты u_2. Поэтому в случае знакопостоянства функции a_1, ненулевое решение (u_1, u_2) системы (1) естественно назвать колеблющимся, если каждая компонента этого решения является колеблющейся функцией.

Если же функции a_i $(i = 1, 2)$ являются знакопеременными, то система (1) может иметь решение, для которого компонента u_1 колеблется, а u_2 не колеблется. Например, система

$$u_1' = \cos t \cdot u_2, \quad u_2' = -\cos t \cdot u_1$$

имеет именно такое решение

$$u_1(t) = \sin(\sin t), \quad u_2(t) = \cos(\sin t).$$

Поэтому вопросы колеблемости для систем со знакопеременными коэффициентами, на наш взгляд, целесообразно изучать покомпонентно.

В данной статье приводятся достаточные условия существования нуля компоненты u_1 на заданном конечном промежутке. Аналогичные вопросы для нелинейных систем изучаются в [1].

Пусть t^* произвольное положительное число. Положим

$$\sigma(a_1; t_-^*) = \begin{cases} -1, \text{ если для некоторого } \delta > 0 \;\; a_1(t) < 0 \text{ при } t^* - \delta \leq t < t^*, \\ +1, \text{ если для некоторого } \delta > 0 \;\; a_1(t) > 0 \text{ при } t^* - \delta \leq t < t^*, \end{cases} \tag{2}$$

$$\sigma(a_1; t_+^*) = \begin{cases} -1, \text{ если для некоторого } \delta > 0 \;\; a_1(t) < 0 \text{ при } t^* < t \leq t^* + \delta, \\ +1, \text{ если для некоторого } \delta > 0 \;\; a_1(t) > 0 \text{ при } t^* < t \leq t^* + \delta. \end{cases} \tag{3}$$

Для простоты изложения будем считать, что функция a_1 имеет только изолированные нули.

Пусть (u_1, u_2) решение системы (1), определенное на некотором отрезке $[t_1; t_2] \subset [0, +\infty)$.

Определение 1. Будем говорить, что $(u_1, u_2; [t_1, t_2])$ принадлежит множеству K, если $(u_1, u_2) : [t_1, t_2] \to R^2$ решение системы (1), для которого выполняются условия

$$u_1(t_1) = u_1(t_2) = 0, \quad u_1(t) \neq 0 \quad \text{при } t_1 < t < t_2,$$

$$arcctg\, v(t_{1+}) + arcctg\, v(t_{2-}) = \pi,$$

где

$$v(t) = \frac{u_2(t)}{u_1(t)}, \quad v(t_{1+}) = \lim_{t \to t_{1+}} v(t), \quad v(t_{2-}) = \lim_{t \to t_{2-}} v(t). \tag{4}$$

Определение 2. Будем говорить, что $(u_1,u_2;[t_1,t_2])$ принадлежит множеству K^*, если $(u_1,u_2):[t_1,t_2]\to R^2$ решение системы (1) для которого выполняются условия

$$u_1(t_1)=u_1(t_2)=0,\quad u_1(t)\neq 0 \quad \text{при} \quad t_1<t<t_2,$$

$$arcctg\, v(t_{1+})=arcctg\, v(t_{2-}),$$

где v, $v(t_{1+})$ и $v(t_{2-})$ заданы равенствами (4).

Имеет место

Лемма 1. Пусть $(u_1,u_2):[t_1,t_2]\to R^2$ решение системы (1), для которого

$$u_1(t_1)=0,\quad u_1(t_2)=0,\quad u_1(t)\neq 0 \quad \text{при} \quad t_1<t<t_2.$$

Тогда для того, чтобы $(u_1,u_2;[t_1,t_2])$ принадлежало множеству K (множеству K^*), необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\sigma(a_1;t_{1+})\cdot\sigma(a_1;t_{2-})=+1,\quad (\sigma(a_1;t_{1+})\cdot\sigma(a_1;t_{2-})=-1),$$

где $\sigma(a_1;t_{1+})$ и $\sigma(a_1;t_{2-})$ определены равенствами (2) и (3).

Отметим, что в случае, когда $a_1(t)\geq 0$ при $t\geq 0$, множество K^* является пустым.

Лемма 2. Если для некоторого решения $(u_1,u_2;[a,b])\in K$, то первая компонента любого нетривиального решения системы (1) имеет хотя бы один нуль на отрезке $[a,b]$.

Доказательство. Допустим противное. Пусть $(\bar{u}_1,\bar{u}_2):[a,b]\to R^2$ такое решение системы (1), что $\bar{u}_1(t)\neq 0$ при $a\leq t\leq b$. Тогда найдется точка $t_0\in(a,b)$, для которой

$$\frac{u_2(t_0)}{u_1(t_0)}=\frac{\bar{u}_2(t_0)}{\bar{u}_1(t_0)}.$$

Отсюда следует [2] линейная зависимость решений (u_1,u_2) и $(\bar{u}_1,\bar{u}_2)$, что невозможно. Лемма доказана.

Замечание. Система (1) может иметь два решения (u_1,u_2) и $(\bar{u}_1,\bar{u}_2)$ такие, что

$$(u_1,u_2:[a,b])\in K^*,\quad \bar{u}_1(t)\neq 0 \quad \text{при} \quad a\leq t\leq b.$$

Например, система

$$u_1'=\frac{\pi}{4}\sin t\cdot u_2,\quad u_2'=-\frac{\pi}{4}\sin t\cdot u_1$$

имеет решения:

$$u_1=\cos\left(\tfrac{\pi}{2}+\tfrac{\pi}{4}\cos t\right),\quad u_2=\sin\left(\tfrac{\pi}{2}+\tfrac{\pi}{4}\cos t\right) \quad \text{и} \quad \bar{u}_1=\cos\left(\tfrac{\pi}{4}\cos t\right),\quad \bar{u}_2=\sin\left(\tfrac{\pi}{4}\cos t\right).$$

Легко видеть, что $(u_1,u_2;\ [\tfrac{\pi}{2},\tfrac{3}{2}\pi])\in K^*$ при этом $\bar{u}_1(t)\neq 0$ для всех $t\geq 0$.

Теорема 1. Пусть g некоторая положительная функция, для которой $g'(t)=a_1(t)$

при $a \le t \le b$. Пусть (u_1, u_2) нетривиальное решение системы (1) и $t^* = \min\{b, \tau\}$, где τ – наименьший нуль функции u_1 из промежутка $(a, +\infty)$. Тогда при любом $\varepsilon > 0$ справедливо неравенство

$$\begin{aligned} & arcctg\,\frac{z(a_+)}{\sqrt{\varepsilon}} + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\int_a^t G_*(s;\varepsilon)ds \le arcctg\,\frac{z(t)}{\sqrt{\varepsilon}} \le \\ & \le arcctg\,\frac{z(a_+)}{\sqrt{\varepsilon}} + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\int_a^t G^*(s;\varepsilon)ds \quad \text{при} \ a < t < t^*, \end{aligned} \tag{5}$$

где

$$z(t) = \frac{g(t)\cdot u_2(t)}{u_1(t)} - \frac{1}{2}, \quad z(a_+) = \lim_{t \to a_+} z(t),.$$

а функции G_* и G^* заданы соответственно равенствами

$$G_*(t;\varepsilon) = \min\left\{ \varepsilon a_1(t) g^{-1}(t); -g\ (t)\ a_2(t) - \tfrac{1}{4} a_1(t) g^{-1}(t) \right\},$$

$$G^*(t;\varepsilon) = \max\left\{ \varepsilon a_1(t) g^{-1}(t); -g\ (t)\ a_2(t) - \tfrac{1}{4} a_1(t) g^{-1}(t) \right\}.$$

Доказательство. Непосредственной подстановкой можно убедиться в том, что

$$z'(t) = g(t)\ a_2(t) - a_1(t) g^{-1}(t)\left(z^2(t) - \tfrac{1}{4}\right) \quad \text{при} \ a < t < t^*.$$

Откуда имеем

$$\frac{z'(t)}{z^2(t)+\varepsilon} = \frac{g(t)a_2(t) + \left(\frac{1}{4}+\varepsilon\right)\frac{a_1(t)}{g(t)}}{z^2(t)+\varepsilon} - \frac{a_1(t)}{g(t)}$$

при $a < t < t^*$.

Следовательно,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\left(-\left[g(t)a_2(t) + \left(\tfrac{1}{4}+\varepsilon\right)a_1(t)\cdot g^{-1}(t)\right]_+ + \varepsilon a_1(t) g^{-1}(t)\right) \le \\ & \le -\left(\frac{z(t)}{\sqrt{\varepsilon}}\right)' \cdot \left[\left(\frac{z(t)}{\sqrt{\varepsilon}}\right)^2 + 1\right]^{-1} \le \\ & \le \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\left(\left[g(t)a_2(t) + \left(\tfrac{1}{4}+\varepsilon\right)a_1(t)\cdot g^{-1}(t)\right]_- + \varepsilon a_1(t) g^{-1}(t)\right)^* \end{aligned}$$

при $a < t < t^*$. Из последнего неравенства, учитывая, что выражение, стоящее в скобках в левой части (в правой части), равно $G_*(t;\varepsilon)$ $\left(G^*(t;\varepsilon)\right)$, получим неравенство (5). Теорема 1 доказана.

Аналогично может быть доказана и

---

* $[x(t)]_+ = \max\{0, x(t)\}, \quad [x(t)]_- = \max\{0, -x(t)\}.$

Теорема 2. Пусть h некоторая положительная функция, для которой $h'(t) = -a_1(t)$ при $a \le t \le b$. Пусть (u_1, u_2) нетривиальное решение системы (1), а $t^* = \min\{b, \tau\}$, где τ – наименьший нуль функции u_1 из промежутка $(a, +\infty)$.

Тогда при любом $\varepsilon > 0$ справедливо неравенство

$$\begin{gathered}arcctg\,\frac{w(a_+)}{\sqrt{\varepsilon}} + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\int_a^t H_*(s;\varepsilon)ds \le arcctg\,\frac{w(t)}{\sqrt{\varepsilon}} \le \\ \le arcctg\,\frac{w(a_+)}{\sqrt{\varepsilon}} + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\int_a^t H^*(s;\varepsilon)ds \quad \text{при} \;\; a < t < t^*,\end{gathered} \tag{6}$$

где

$$w(t) = \frac{h(t)\cdot u_2(t)}{u_1(t)} + \frac{1}{2}, \quad w(a_+) = \lim_{t \to a_+} w(t),$$

а функции H_* и H^* заданы соответственно равенствами

$$H_*(t;\varepsilon) = \min\left\{\varepsilon a_1(t)\, h^{-1}(t); -h\;\,(t)\, a_2(t) - \tfrac{1}{4}a_1(t)\, h^{-1}(t)\right\},$$

$$H^*(t;\varepsilon) = \max\left\{\varepsilon a_1(t)\, h^{-1}(t); -h\;\,(t)\, a_2(t) - \tfrac{1}{4}a_1(t)\, h^{-1}(t)\right\}.$$

Теорема 3. Пусть (u_1, u_2) нетривиальное решение системы (1), $t^* = \min\{b, \tau\}$, где τ – наименьший нуль функции u_1 из промежутка $(a, +\infty)$. Тогда при любом $c > 0$ справедливо неравенство

$$\begin{gathered}arcctg\,\frac{v(a_+)}{c} + \int_a^t A_*(s;c)ds \le arcctg\,\frac{v(t)}{c} \le \\ \le arcctg\,\frac{v(a_+)}{c} + \int_a^t A^*(s;c)ds \quad \text{при} \;\; a < t < t^*,\end{gathered} \tag{7}$$

где

$$v(t) = \frac{u_2(t)}{u_1(t)}, \quad v(a_+) = \lim_{t \to a_+} v(t),$$

а функции A_* и A^* заданы равенствами

$$A_*(t;c) = \min\left\{c\, a_1(t); -c^{-1}a_2(t)\right\}, \qquad A^*(t;c) = \max\left\{c\, a_1(t); -c^{-1}a_2(t)\right\}.$$

Доказательство. Нетрудно проверить, что

$$v'(t) = a_2(t) - a_1(t)\cdot v^2(t) \quad \text{при} \quad a < t < t^*.$$

Отсюда имеем

$$\frac{v'(t)}{v^2(t) + c} = \frac{a_2(t) + c^2 a_1(t)}{v^2(t) + c^2} - a_1(t), \tag{8}$$

где $c = \text{const} > 0$.

Из (8) следует, что

$$-\left[\frac{a_2(t)}{c}+ca_1(t)\right]_+ + ca_1(t) \le \frac{\left(v(t)/c\right)'}{\left(v(t)/c\right)^2+1} \le$$
$$\le \left[\frac{a_2(t)}{c}+ca_1(t)\right]_- + ca_1(t) \quad \text{при} \quad a<t<t^*. \tag{9}$$

Учитывая, что

$$-\left[\frac{a_2(t)}{c}+ca_1(t)\right]_+ + ca_1(t) = A_*(t;c), \quad \left[\frac{a_2(t)}{c}+ca_1(t)\right]_- + ca_1(t) = A^*(t;c),$$

после интегрирования (9) от a до t, получим неравенство (7). Теорема 3 доказана.

Теорема 4. Пусть для некоторого $\varepsilon>0$

$$\int_a^b G_*(t;\varepsilon)\,dt \ge \sqrt{\varepsilon}\pi \cdot \tag{10}$$

Тогда найдется отрезок $[t_1,t_2]\subset[a,b]$ и решение $(u_1,u_2):[t_1,t_2]\to R^2$ системы (1) такие, что $(u_1,u_2;[t_1,t_2])\in K$.

Доказательство. В силу (10), найдется число $t_1\in[a,b)$, для которого

$$\int_a^{t_1} G_*(s;\varepsilon)\,ds=0, \int_a^{t} G_*(s;\varepsilon)\,ds>0 \quad \text{при} \quad t_1<t\le b, \sigma(a_1;t_{1+})=+1. \tag{11}$$

Рассмотрим решение (u_1,u_2) системы (1), удовлетворяющее начальным условиям

$$u_1(t_1)=0, \quad u_2(t_1)\ne 0. \tag{12}$$

Учитывая, что $a_1(t)\ge 0$ в некоторой правой полуокрестности точки t_1, имеем, что

$$\lim_{t\to t_{1+}} \frac{u_2(t)}{u_1(t)}=+\infty \cdot \tag{13}$$

Покажем теперь, что для некоторой точки $t_2\in(t_1,b]$

$$u_1(t)\ne 0 \quad \text{при} \quad t_1<t<t_2, \quad u_1(t_2)=0, \tag{14}$$

причем

$$\lim_{t\to t_{2-}} \frac{u_2(t)}{u_1(t)}=-\infty \cdot \tag{15}$$

Допустим противное. Тогда либо

$$u_1(t)\ne 0 \quad \text{при} \quad t_1<t\le b, \tag{16}$$

либо для некоторой точки $t_2\in(t_1,b)$ соблюдаются условия (14), но

$$\lim_{t\to t_{2-}} \frac{u_2(t)}{u_1(t)}=+\infty \cdot \tag{17}$$

В случае (16) из теоремы 1 с учетом (11) и (13) будем иметь

$$0<\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\int_a^t G_*(s;\varepsilon)\,ds=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\int_{t_1}^t G_*(s;\varepsilon)\,ds\le arcctg\frac{z(t)}{\sqrt{\varepsilon}}\le\pi \quad \text{при} \quad t_1<t<b,$$

где

$$z(t)=g(t)\,u_2(t)/u_1(t)-\frac{1}{2}\cdot \tag{18}$$

Последнее неравенство, очевидно, противоречит условию (10).

Если соблюдаются (14) и (17), то, в силу теоремы 1, получим

$$\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\int_a^t G_*(s;\varepsilon)\,ds=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\int_{t_1}^t G_*(s;\varepsilon)\,ds\le arcctg\frac{z(t)}{\sqrt{\varepsilon}} \quad \text{при} \quad t_1<t<t_2,$$

где z – функция, заданная равенством (18). Отсюда, с учетом (11), находим

$$arcctg\frac{z(t_{2-})}{\sqrt{\varepsilon}}>0,$$

где $z(t_{2-})=\lim\limits_{t\to t_{2-}} z(t)\cdot$

С другой стороны из (17) вытекает, что

$$arcctg\frac{z(t_{2-})}{\sqrt{\varepsilon}}=0\cdot$$

Получили противоречие. Следовательно, существует точка $t_2\in(t_1,b]$, для которой соблюдаются условия (14) и (15). Тогда с учетом (12) и (13) легко видеть, что

$$(u_1,u_2;[t_1,t_2])\in K\cdot$$

Теорема 4 доказана.

Аналогично, используя теоремы 2 и 3, можно доказать следующие теоремы 5 и 6.

Теорема 5. Пусть для некоторого $\varepsilon>0$

$$\int_a^b H_*(s;\varepsilon)\,ds\ge\sqrt{\varepsilon}\pi\cdot$$

Тогда найдутся отрезок $[t_1,t_2]\subset[a,b]$ и решение $(u_1,u_2):[t_1,t_2]\to R^2$ системы (1) такие, что

$$(u_1,u_2;[t_1,t_2])\in K\cdot$$

Теорема 6. Пусть для некоторого $c>0$

$$\int_a^b A_*(s;c)\,ds\ge\pi\cdot$$

Тогда найдутся отрезок $[t_1,t_2]\subset[a,b]$ и решение $(u_1,u_2):[t_1,t_2]\to R^2$ системы (1) такие, что

$$\left(u_1,u_2;[t_1,t_2]\right)\in K\cdot$$

Из теорем 4, 5, 6 и леммы 2 следует справедливость теорем 7 и 8.

Теорема 7. Пусть для некоторого $\varepsilon>0$ либо

$$\int_a^b G_*(s;\varepsilon)\,ds\ge\sqrt{\varepsilon}\pi,$$

либо

$$\int_a^b H_*(s;\varepsilon)\,ds\ge\sqrt{\varepsilon}\pi\cdot$$

Тогда первая компонента любого нетривиального решения системы (1) имеет нуль на $[a,b]$.

Теорема 8. Пусть для некоторого $c>0$

$$\int_a^b A_*(s;c)\,ds\ge\pi\cdot$$

Тогда первая компонента любого нетривиального решения системы (1) имеет нуль на $[a,b]$.

Следствие 1. Пусть для некоторого $\varepsilon>0$

$$-a_2(t)\ge\left(\tfrac{1}{4}+\varepsilon\right)a_1(t)g^{-2}(t)\quad\text{при}\quad a\le t\le b$$

и

$$g(b)\ge g(a)\exp\left(\tfrac{\pi}{\sqrt{\varepsilon}}\right),$$

где $g:[a,b]\to(0,+\infty)$ и $g'(t)=a_1(t)$ при $a\le t\le b$. Тогда первая компонента любого нетривиального решения системы (1) имеет нуль на $[a,b]$.

Следствие 2. Пусть для некоторого $\varepsilon>0$

$$-a_2(t)\ge\left(\tfrac{1}{4}+\varepsilon\right)a_1(t)h^{-2}(t)\quad\text{при}\quad a\le t\le b$$

и

$$h(a)\ge h(b)\exp\left(\tfrac{\pi}{\sqrt{\varepsilon}}\right),$$

где $h:[a,b]\to(0,+\infty)$ и $h'(t)=-a_1(t)$ при $a\le t\le b$. Тогда первая компонента любого нетривиального решения системы (1) имеет нуль на $[a,b]$.

Следствие 3. Пусть для некоторого $c>0$

$$-a_2(t)\ge c\,a_1(t)\quad\text{при}\quad a\le t\le b$$

и

$$\int_a^b a_1(t)\,dt\ge\frac{\pi}{\sqrt{\varepsilon}}\cdot$$

Тогда первая компонента любого нетривиального решения системы (1) имеет нуль на $[a,b]$.

Следствия 1, 2, 3 вытекают из теорем 7, 8 и леммы 2.

Теорема 9. Пусть $\sigma(a_1;a_+)=+1$ и для некоторого $\varepsilon>0$

$$\int_a^t G^*(s;\varepsilon)\,ds<\sqrt{\varepsilon}\pi \quad \text{при} \quad a<t<b, \qquad \int_a^b G^*(s;\varepsilon)\,ds\le 0. \tag{19}$$

Пусть, далее, (u_1,u_2) решение системы (1), удовлетворяющее условиям

$$u_1(a)=0, \quad u_2(a)\ne 0. \tag{20}$$

Тогда найдется точка $t^*\in(a,b)$ такая, что

$$\left(u_1,u_2;\left[a,t^*\right]\right)\in K^*.$$

Доказательство. Сначала докажем, что u_1 имеет нуль на $(a,b]$. Допустим противное, что

$$u_1(t)\ne 0 \quad \text{при} \quad a<t\le b.$$

Тогда в силу теоремы 1 будем иметь

$$0<arcctg\,\tfrac{z(b_-)}{\sqrt{\varepsilon}}\le\tfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\int_a^b G^*(s;\varepsilon)ds\le 0,$$

где $z(b_-)=\lim\limits_{t\to b_-}z(t)$. Получили противоречие. Следовательно, найдется точка $t^*\in(a,b]$, для которой

$$u_1(t)\ne 0 \quad \text{при} \quad a<t<t^*, \quad u_1\left(t^*\right)=0.$$

Теперь докажем, что

$$arcctg\,v\left(t_-^*\right)=0,$$

где $\quad v(t)=u_2(t)\big/u_1(t), \quad v\left(t_-^*\right)=\lim\limits_{t\to t_-^*}v(t).$

Если допустить противное, то есть что $arcctg\,v\left(t_-^*\right)=\pi$, то в силу теоремы (1) получим противоречие с первым неравенством в (19). Следовательно,

$$\left(u_1,u_2;\left[a,t^*\right]\right)\in K^*.$$

Теорема 9 доказана.
Имеют место следующие две теоремы.

Теорема 10. Пусть $\sigma(a_1;\,a_+)=+1$ и для некоторого $\varepsilon>0$ справедливы неравенства

$$\int_a^t H^*(s;\varepsilon)\,ds<\sqrt{\varepsilon}\pi \quad \text{при} \quad a<t<b, \qquad \int_a^b H^*(s;\varepsilon)\,ds\le 0. \tag{21}$$

Пусть, далее (u_1,u_2) решение системы (1), удовлетворяющее условиям (20). Тогда найдется точка $t^* \in (a,b]$ такая, что

$$\left(u_1,u_2;\left[a,t^*\right]\right)\in K^*.$$

Теорема 11. Пусть $\sigma(a_1;\, a_+)=+1$ и для некоторого $c>0$

$$\int_a^t A^*(s;c)\, ds<\pi \quad \text{при} \quad a<t<b, \quad \int_a^b A^*(s;c)\, ds\le 0. \tag{22}$$

Пусть, далее (u_1,u_2) решение системы (1), удовлетворяющее условиям (20). Тогда найдется точка $t^* \in (a,b]$ такая, что

$$\left(u_1,u_2;\left[a,t^*\right]\right)\in K^*.$$

Теорема 12. Пусть для некоторых $\varepsilon>0$ и $\lambda\in(0,\pi)$

$$0<\lambda+\tfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\int_a^t G_*(s;\varepsilon)ds\le\lambda+\tfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\int_a^t G^*(s;\varepsilon)ds\le\pi \tag{23}$$

при $a\le t\le b$. Тогда первая компонента решения системы (1), для которого

$$\frac{u_2(a)}{u_1(a)}=g^{-1}(a)\left(\sqrt{\varepsilon}ctg\lambda+\tfrac{1}{2}\right), \tag{24}$$

не обращается в нуль на отрезке $[a,b]$.

Доказательство. Пусть (u_1,u_2) решение системы (1), удовлетворяющее условию (24). Тогда с учетом (23), в силу теоремы 1, будем иметь

$$0<arcctg\,\tfrac{z(t)}{\sqrt{\varepsilon}}<\pi \quad \text{при} \quad a\le t\le b,$$

где $z(t)=g(t)u_2(t)/u_1(t)-\dfrac{1}{2}$. Отсюда и следует, что $u_1(t)\ne 0$ при $a\le t\le b$. Теорема 12 доказана.

Теорема 13. Пусть для некоторых $\varepsilon>0$ и $\lambda\in(0,\pi)$

$$0<\lambda+\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\int_a^t H_*(s;\varepsilon)ds\le\lambda+\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\int_a^t H^*(s;\varepsilon)ds<\pi \quad \text{при} \quad a\le t\le b. \tag{25}$$

Тогда первая компонента решения (u_1,u_2) системы (1), для которого

$$\frac{u_2(a)}{u_1(a)}=h^{-1}(a)\left(\sqrt{\varepsilon}ctg\lambda+\tfrac{1}{2}\right)$$

не обращается в нуль на $[a,b]$.

Теорема 14. Пусть для некоторых чисел $c>0$ и $\lambda\in(0,\pi)$ выполняются неравенства

$$0<\lambda+\int_a^t A_*(s;c)ds \le \lambda+\int_a^t A^*(s;c)ds<\pi \quad \text{при} \quad a \le t \le b. \tag{26}$$

Тогда первая компонента решения (u_1,u_2) системы (1), для которого

$$\frac{u_2(a)}{u_1(a)}=c\cdot ctg\,\alpha$$

не обращается в нуль на $[a,b]$.

Теоремы 13 и 14 вытекают из теорем 2 и 3.

Теорема 15. Пусть $\sigma(a_1;a_+)=+1$ и для некоторого $\varepsilon>0$ и $\lambda\in(0,\pi)$ выполняются либо условия (19) и (23), либо условия (21) и (25). Тогда система (1) имеет два нетривиальных решения (u_1,u_2) и $(\overline{u}_1,\overline{u}_2)$ такие, что u_1 имеет два нуля на $[a,b]$, а $\overline{u}_1(t)\ne 0$ для всех $t\in[a,b]$.

Теорема 16. Пусть $\sigma(a_1;a_+)=+1$ и для некоторых $c>0$ и $\lambda\in(0,\pi)$ выполняются условия (22) и (26). Тогда система (1) имеет два нетривиальных решения (u_1,u_2) и $(\overline{u}_1,\overline{u}_2)$ такие, что u_1 имеет два нуля на $[a,b]$, а $\overline{u}_1(t)\ne 0$ для всех $t\in[a,b]$.

Отметим, что аналоги приведенных выше теорем можно сформулировать и для компоненты u_2. Для этого достаточно везде в условиях теорем поменять местами a_1 и a_2.

Примечания:

1. Схаляхо Ч.А. О нулях решений одной двумерной дифференциальной системы на конечном промежутке // Дифференциальные уравнения. 1988. Т. 24, № 6. С. 1080-1083.
2. Векторные поля на плоскости / М.А. Красносельский, А.И. Перов, А.И. Поволоцкий, П.П. Забрейко. М.: Физматгиз, 1963. 248 с.

References:

1. Skhalyakho Ch.A. On zeros of solutions of one two-dimensional differential system on a finite interval // Differential equations. 1988. Vol. 24, No. 6. P. 1080-1083.
2. Vector fields on a plane / M.A. Krasnoselskiy, A.I. Perov, A.I. Povolotskiy, P.P. Zabreyko. M.: Fizmatgiz, 1963. 248 pp.