ФИЗИКА

PHYSICS

УДК 533.9
ББК 22.333
Б 72

Бобылев Ю.В.
Доктор физико-математических наук, профессор кафедры общей и теоретической физики факультета математики, физики и информатики Тульского государственного педагогического университета им. Л.Н. Толстого, Тула, тел. (4872) 35-59-06 (доб. 20-91), e-mail: bobylev.yu@mail.ru

Панин В.А.
Доктор физико-математических наук, профессор, ректор Тульского государственного педагогического университета им. Л.Н. Толстого, Тула, тел. (4872) 35-91-62, e-mail: panin@tspu.tula.ru

Аналитические методы в нелинейной электродинамике плазмы

(Рецензирована)

Аннотация
Рассматривается метод аналитического решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с кубическими нелинейностями. Проведено обобщение данного метода на подобные системы наиболее общего вида и получены критерии возможности существования у таких систем аналитического решения. Применение метода проиллюстрировано на конкретной задаче нелинейной электродинамики плазмы.
Ключевые слова: *аналитические методы, нелинейное взаимодействие волн в плазме.*

Bobylev Yu.V.
Doctor of Physics and Mathematics, Professor of General and Theoretical Physics Department, Faculty of Mathematics, Physics and Computer Science, Tula State Pedagogical University named after L.N. Tolstoy, Tula, ph. (4872) 35-59-06 (2091), e-mail: physics@tspu.tula.ru

Panin V.A.
Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Rector of the Tula State Pedagogical University named after L.N. Tolstoy, Tula, ph. (4872) 35-91-62, e-mail: panin@tspu.tula.ru

Analytical methods in nonlinear plasma electrodynamics

Abstract
The paper considers the method of analytical solution of systems of the first order ordinary differential equations with cubic nonlinearities. This method is generalized for such systems of the most common form. The criteria are found for the existence of an analytical solution at such systems. Application of the method is illustrated by the specific problem of nonlinear plasma electrodynamics.
Keywords: *analytical methods, nonlinear interaction of waves in plasma.*

В различных задачах нелинейной электродинамики приходится иметь дело с комплексными системами дифференциальных уравнений первого порядка, содержащими только алгебраические нелинейности, т.е. степени искомых комплекснозначных функций и различные комбинации произведений этих функций. Такими системами уравнений описываются, в частности, некоторые режимы процессов рассеяния [1], резонансного пучково-плазменного взаимодействия [2, 3], а также нелинейного взаимодействия волн в плазме [4, 5]. Общим для данных систем является то, что если они содержат нелинейности максимум до третьего порядка включительно (поскольку именно кубические нелинейности определяют насыщение развивающихся в рассматриваемых режимах неустойчивостей), то эти системы допускают аналитическое решение. Отличие же их заключается в том, что как количество нелинейных слагаемых, так и их структура в различных случаях оказываются различными (например, учет релятивизма пучка приводит к появлению дополнительных кубических нелинейностей), и поэтому применяемые для решения данных дифференциальных уравнений методы обладают определенной спецификой.

Выработке единого подхода к решению комплексных систем дифференциальных уравнений первого порядка наиболее общего вида, содержащих кубические нелинейности, определению критериев, при которых эти системы допускают аналитические решения, и посвящена настоящая статья. Авторы в течение продолжительного времени работают в области нелинейной электродинамики плазмы, и представленный материал является обобщением как уже известных методов, так и их собственного опыта работы.

Рассмотрим следующую систему двух обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$
\begin{aligned}
i\frac{df_1}{dt} &= k_{11}f_1 + k_{12}f_2 + \left(k_{13}f_1 + k_{14}f_2\right)\left|f_1\right|^2 + \left(k_{15}f_1 + k_{16}f_2\right)\left|f_2\right|^2 + k_{17}f_1^2f_2^* + k_{18}f_2^2f_1^*,\\
i\frac{df_2}{dt} &= k_{21}f_1 + k_{22}f_2 + \left(k_{23}f_1 + k_{24}f_2\right)\left|f_1\right|^2 + \left(k_{25}f_1 + k_{26}f_2\right)\left|f_2\right|^2 + k_{27}f_1^2f_2^* + k_{28}f_2^2f_1^*.
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Здесь k_{ij} – вещественные постоянные (как эти коэффициенты должны быть связаны друг с другом, чтобы система (1) допускала аналитическое решение, будет установлено в дальнейшем); f_1 и f_2 – неизвестные комплекснозначные функции. Заметим, что в правых частях уравнений (1) содержатся все нелинейности, возникающие при преобразовании системы уравнений Максвелла-Власова, являющейся исходной во многих задачах нелинейной электродинамики плазмы [6].

Введем действительные амплитуды и фазы неизвестных функций f_1 и f_2 [7]:

$$f_1 = a_1\exp\left(i\varphi_1\right),\quad f_2 = a_2\exp\left(i\varphi_2\right),\quad \Phi = \varphi_2 - \varphi_1\,. \tag{2}$$

Подставляя (2) в (1) и разделяя действительные и мнимые части, имеем:

$$
\begin{aligned}
&\frac{da_1}{dt} = \left(k_{12}a_2 + \left(k_{14} - k_{17}\right)a_1^2a_2 + k_{16}a_2^3\right)\sin\Phi + k_{18}a_1a_2^2\sin 2\Phi,\\
&-a_1\frac{d\varphi_1}{dt} = k_{11}a_1 + k_{13}a_1^3 + k_{15}a_1a_2^2 + \left(k_{12}a_2 + \left(k_{14} + k_{17}\right)a_1^2a_2 + k_{162}^{3}\right)\cos\Phi + k_{18}a_1a_2^2\cos 2\Phi,\\
&\frac{da_2}{dt} = -\left(k_{21}a_1 + \left(k_{25} - k_{28}\right)a_2^2a_1 + k_{23}a_1^3\right)\sin\Phi - k_{27}a_2a_1^2\sin 2\Phi,\\
&-a_2\frac{d\varphi_2}{dt} = k_{22}a_2 + k_{26}a_2^3 + k_{24}a_2a_1^2 + \left(k_{21}a_1 + \left(k_{25} + k_{28}\right)a_2^2a_1 + k_{23}a_1^3\right)\cos\Phi + k_{27}a_2a_1^2\cos 2\Phi.
\end{aligned}
\tag{3}
$$

Домножим первое уравнение на a_1, третье на $\beta\cdot a_2$, где $\beta = const$ – некоторый коэффициент пропорциональности, и сложим. При этом, если выполняются условия

$$k_{12} = \beta\,k_{21},\quad k_{16} = \beta\left(k_{25} - k_{28}\right),\quad k_{14} - k_{17} = \beta\,k_{23},\quad k_{18} = \beta\,k_{27}\,, \tag{4}$$

то мы получаем следующий интеграл для амплитуд:

$$a_1^2 + \beta a_2^2 = a_{10}^2 + \beta a_{20}^2\,, \tag{5}$$

где a_{10} и a_{20} – начальные значения амплитуд a_1 и a_2 (см. ниже формулу (7)).

Чтобы получить интеграл для разности фаз Φ домножим первое уравнение в (3) на $a_1 \dfrac{d\varphi_1}{dt}$, второе на $\dfrac{da_1}{dt}$, третье на $\beta a_2 \dfrac{d\varphi_2}{dt}$, четвертое на $\beta \dfrac{da_2}{dt}$ и сложим друг с другом. При этом оказывается, что интеграл для Φ существует, если коэффициенты системы (1) помимо (4) удовлетворяют еще условиям

$$k_{14} = 2k_{17}, \quad k_{25} = 2k_{28}. \tag{6}$$

При выполнении (6), принимая для краткости последующих записей начальные условия

$$a_1\big|_{t=0} = a_0, \quad a_2\big|_{t=0} = 0, \quad \varphi_1\big|_{t=0} = 0, \quad \varphi_2\big|_{t=0} = 0, \tag{7}$$

имеем такой интеграл

$$\begin{gathered} a_1^2\left(k_{11}a_1 + k_{13}\frac{a_1^2}{2} + k_{15}a_2^2\right) + \beta a_2^2\left(k_{22} + k_{26}\frac{a_2^2}{2} + k_{24}a_1^2\right) + \\ + 2a_1a_2\left(k_{12} + \beta k_{23}a_1^2 + k_{16}a_2^2\right)\cos\Phi + k_{18}a_1^2a_2^2\cos 2\Phi = a_0^2\left(k_{11} + k_{13}\frac{a_0^2}{2}\right) \end{gathered} \tag{8}$$

Получим теперь дифференциальное уравнение для амплитуды a_1, для чего домножим первое уравнение в (3) на a_1:

$$\frac{1}{2}\frac{da_1^2}{dt} = a_1a_2\left(k_{12} + \beta k_{23}a_1^2 + k_{16}a_2^2\right)\sin\Phi + k_{18}a_1^2a_2^2\sin 2\Phi, \tag{9}$$

и исключим из него с помощью интегралов (5) и (8) амплитуду a_2 и разность фаз Φ.

Однако из структуры интеграла (8) и уравнения (9) видно, что это возможно сделать при наличии в правой части (9) только одного слагаемого. При этом получаемое из (9) уравнение будет содержать только алгебраические нелинейности (см. (13)), сохраняя тем самым возможность получения его аналитического решения. Чтобы удовлетворить этому, положим

$$k_{18} = 0. \tag{10}$$

Возводя далее в квадрат (9), используя (5) и (8), с учетом (10), для величины $x = a^2$ ($x_0 = a_0^2$) получаем уравнение

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{4}{\beta}x(x_0 - x)(A_1 + A_2x)^2 - \left(A_3 + A_4x + A_5x^2\right)^2, \tag{11}$$

где обозначено

$$\begin{gathered} A_1 = k_{12} + \frac{k_{16}}{\beta}x_0, \quad A_2 = \beta k_{23} - \frac{k_{16}}{\beta}, \quad A_3 = x_0\left(k_{11} - k_{22} + \frac{x_0}{2}\left(k_{13} - \frac{k_{26}}{\beta}\right)\right), \\ A_4 = k_{22} - k_{11} + \frac{x_0}{\beta}(k_{26} - k_{15}), \quad A_5 = k_{24} - \frac{1}{2}\left(k_{13} + \frac{k_{26}}{\beta}\right) + \frac{k_{15}}{\beta}. \end{gathered} \tag{12}$$

После возведения в квадрат и группировки слагаемых с одинаковыми степенями x окончательно имеем следующее уравнение для x:

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{B_4x^4 + B_3x^3 + B_2x^2 + B_1x + B_0}, \tag{13}$$

коэффициенты в котором определяются выражениями

$$B_0=-A_3^2,\quad B_1=\frac{4}{\beta}x_0A_1^2-2A_3A_4,\quad B_2=\frac{4}{\beta}\left(2x_0A_1A_2-A_1^2\right)-\left(A_4^2+2A_3A_5\right),$$
$$B_3=\frac{4}{\beta}\left(x_0A_2^2-2A_1A_2\right)-2A_4A_5,\quad B_4=-\left(A_5^2+\frac{4}{\beta}A_2^2\right). \tag{14}$$

Дальнейшее решение уравнения (13) проводится по стандартной схеме [7]. После разделения переменных в (13) имеем интеграл по x, значение которого определяется нулями многочлена, стоящего под радикалом

$$B_4x^4+B_3x^3+B_2x^2+B_1x+B_0=0\,. \tag{15}$$

Для определения корней уравнения четвертой степени (15) зачастую используют приближенную процедуру, поскольку формулы, дающие точные значения этих корней (формулы Кардана), весьма громоздки и поэтому мало информативны. Расположим корни уравнения (15) в порядке их возрастания и зададим область изменения величины x следующим образом:

$$x_1<x_2<x_3\le x\le x_4\,. \tag{16}$$

При этом мы предполагаем, что $x_3\approx x_0$, и x растет до максимального значения $x_{\max}=x_4$. Такой выбор области изменения x определяет в соответствие с интегралом (5), в котором $a_{10}^2=x_0, a_{20}^2=0$, знак параметра β: должно быть $\beta<0$.

Итак, после разделения переменных в уравнении (13), с учетом (16), имеем:

$$\int\limits_{x_3}^{x}\frac{dx}{\sqrt{B_4x^4+B_3x^3+B_2x^2+B_1x+B_0}}=\int\limits_{x_3}^{x}\frac{dx}{\sqrt{|B_4|(x_4-x)(x-x_3)(x-x_2)(x-x_1)}}=\int\limits_0^t dt=t\,. \tag{17}$$

Интеграл в (17) может быть выражен через эллиптический интеграл 1-го рода [8]

$$\int\limits_{x_3}^{x}\frac{dx}{\sqrt{B_4x^4+B_3x^3+B_2x^2+B_1x+B_0}}=\frac{2}{\sqrt{|B_4|(x_4-x_2)(x_3-x_1)}}F(\lambda,r), \tag{18}$$

где

$$F(\lambda,r)=\int\limits_0^{\lambda}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-r^2\sin^2\varphi}}=\int\limits_0^{\sin\lambda}\frac{dx}{\sqrt{\left(1-x^2\right)\left(1-r^2x^2\right)}} \tag{19}$$

– нормальные тригонометрическая и лежандрова формы эллиптического интеграла 1-го рода,

$$\lambda=\arcsin\sqrt{\frac{(x_4-x_2)(x-x_3)}{(x_4-x_3)(x-x_2)}},\quad r=\sqrt{\frac{(x_4-x_3)(x_2-x_1)}{(x_4-x_2)(x_3-x_1)}}\,. \tag{20}$$

Из (17) и (18) имеем

$$F(\lambda,r)=\frac{1}{2}\sqrt{|B_4|(x_4-x_2)(x_3-x_1)}\cdot t\,. \tag{21}$$

Как видно из (20) искомая величина x содержится в аргументе эллиптического интеграла. Для ее выражения нужно использовать стандартную процедуру обращения эллиптического интеграла, что дает следующий результат:

$$x=\frac{x_2(x_4-x_3)\,sn^2y-(x_4-x_2)\,x_3}{(x_4-x_3)sn^2y-(x_4-x_2)}=\frac{x_2x_4\;sn^2y+x_2x_3\;cn^2y-x_4x_3}{x_2-x_3\;sn^2y-x_4\;cn^2y}\,, \tag{22}$$

где

$$y = \frac{1}{2}\sqrt{|B_4|(x_4 - x_2)(x_3 - x_1)} \cdot t\,, \tag{23}$$

а $sn\,y$ и $cn\,y$ – эллиптические синус и косинус соответственно. Таким образом, формула (22) определяет квадрат модуля $|a_1|^2 = x$ как функцию переменной t. Квадрат модуля второй функции $|a_2|^2$ может быть найден с помощью интеграла (5).

Важной характеристикой является значение переменной t, которое обозначим через τ, при котором функции $a_1(t)$ и $a_2(t)$ достигают своих максимумов. Следовательно $x|_{t=\tau} = x_{\max} = x_4$. Как видно из (21) в данном случае $\lambda = \arcsin 1 = \pi/2$, и из (21) имеем

$$\tau = \frac{2}{\sqrt{|B_4|(x_4 - x_2)(x_3 - x_1)}} K(r), \tag{24}$$

где $K(r) = F(\pi/2, r)$ – полный эллиптический интеграл 1-го рода [8].

Рассмотрим еще случай решения системы уравнений (1) в так называемом адиабатическом приближении, когда начальные значения функций a_1 и a_2 принимаются равными нулю при $t \to -\infty$. Это приближение часто используется при описании нелинейной динамики различных неустойчивостей, поскольку оно позволяет достаточно просто, в сравнении с только что описанной процедурой, получить выражения для максимальных значений функций a_1 и a_2. Данное упрощение обусловлено тем, что при $x_0 = 0$, как это видно из (12) и (14), $B_0 = B_1 = 0$, и один кратный корень уравнения (16) равен нулю. Тогда вместо (18) получаем соотношение, интеграл в котором легко может быть выражен через элементарные функции

$$\int_0^x \frac{dx}{x\sqrt{B_4x^2 + B_3x + B_2}} = -\frac{1}{\sqrt{B_2}} \ln \frac{2B_2 + B_3x + 2\sqrt{B_2(B_4x^2 + B_3x + B_2)}}{B_2x}\Bigg|_0^x = \int_{-\infty}^t dt\,. \tag{25}$$

Условием применимости формулы (25) является требование $B_2 > 0$, что имеет место при $\beta < 0$. Считая, что «бесконечности» в нижних подстановках левой и правой частей (25) компенсируют друг друга, получаем следующее выражение для x:

$$x = \frac{4B_2^2}{B_2^2 \exp\left(-\sqrt{B_2}t\right) + \left(B_3^2 - 4B_2B_4\right)\exp\left(\sqrt{B_2}t\right) - 2B_2B_3} = \frac{4B_2^2 \exp\left(-\sqrt{B_2}t\right)}{\left(B_2 \exp\left(-\sqrt{B_2}t\right) - B_3\right)^2 - 4B_2B_4}\,. \tag{26}$$

Данное решение также можно записать в более симметричном виде через гиперболические функции. Для этого нужно определить значение параметра $t_{\max}$, при котором x достигает максимума, и сделать соответствующую замену переменной. В результате вместо (26) будем иметь

$$x = \frac{2B_2}{\sqrt{B_3^2 - 4B_2B_4} \cdot ch\left(\sqrt{B_2}t'\right) - B_3}\,, \tag{27}$$

где

$$t' = t - t_{\max}\,, \quad t_{\max} = \frac{1}{\sqrt{B_2}} \ln \frac{B_2}{\sqrt{B_3^2 - 4B_2B_4}}\,. \tag{28}$$

В приложениях часто встречается случай, когда коэффициент $B_3 = 0$. Для получения решения в этом случае удобней исходить не из формулы (25), а воспользоваться формулой

$$\int_0^x \frac{dx}{x\sqrt{B_4x^2 + B_2}} = \frac{1}{2\sqrt{B_2}} \ln \frac{\sqrt{2B_2} - \sqrt{B_4x^2 + B_2}}{\sqrt{2B_2} + \sqrt{B_4x^2 + B_2}}\Bigg|_0^x = \int_{-\infty}^t dt\,. \tag{29}$$

Выражая из (30) x, получаем

$$x = \sqrt{\frac{B_2}{-B_4}} ch^{-1}\left(\sqrt{B_2}t\right). \tag{30}$$

Описанная в данной статье процедура аналитического решения системы двух нелинейных уравнений оказывается довольно громоздкой. В случае системы трех уравнений эта процедура еще более усложняется, но основные ее этапы остаются прежними.

В качестве конкретного примера применения изложенного метода рассмотрим решение системы двух уравнений, подробный вывод которой приведен в работе [2]. В этой работе аналитическими и численными методами была исследована нелинейная динамика резонансного взаимодействия плотного электронного пучка с плазмой. При этом использовалась следующая модель пучково-плазменной системы: цилиндрический металлический волновод с произвольным односвязным поперечным сечением, в котором находятся бесконечно тонкие в поперечном сечении («игольчатые») нерелятивистский электронный пучок и плазма, помещен в продольное сильное внешнее магнитное поле, препятствующее поперечным движениям электронов пучка и плазмы (движение тяжелых ионов вообще не учитывается). И пучок и плазма являются холодными. Как показано в [2], в случае слабой связи пучковой и плазменной подсистем, неустойчивость развивается в режиме коллективного вынужденного эффекта Черенкова, а стабилизирующим ее фактором является нелинейный сдвиг частоты, обусловленный как торможением электронного пучка в среднем, так и генерацией высших гармоник плотности. Определяющую роль при этом играют нелинейности низших порядков и прежде всего кубическая нелинейность [2]. Именно в этом случае исходная система уравнений Максвелла-Власова сводится к следующей системе двух уравнений:

$$\begin{aligned}
-2i\sqrt{g_{p1}}\frac{db_{p1}}{dt} &= -g_{p1}\left(1 - \frac{3}{2}\frac{g_{p2} - g_{p1}}{g_{p2} - 4g_{p1}}\right)\left|b_{p1}\right|^2 b_{p1} - \tilde{\omega}_b^2 q_1 b_{b1}, \\
2i\sqrt{g_{b1}}\frac{db_{b1}}{dt} &= -g_{b1}\left(1 - \frac{3}{2}\frac{g_{b2} - g_{b1}}{g_{b2} - 4g_{b1}}\right)\left|b_{b1}\right|^2 b_{b1} - \tilde{\omega}_p^2 q_1 b_{p1} + g_{b1}a_0^2 b_{b1},
\end{aligned} \tag{31}$$

где $b_{\alpha 1}$ $(\alpha = p, b)$ – безразмерные комплексные амплитуды взаимодействующих первых гармоник плазменной и пучковой волн; τ – безразмерное время; $\tilde{\omega}_\alpha^2$ – величины, пропорциональные погонным плотностям электронов пучка и плазмы; величины $\sqrt{g_{\alpha n}}$ $(\alpha = p, b)$ являются частотами собственных колебаний в пучке и в плазме на длине волны $\lambda_n = L/n$ (L – характерный продольный размер (период) начального возмущения в рассматриваемой системе). Они не сводятся просто к соответствующим плазменным частотам, а зависят и от поперечной геометрии. Коэффициент q_1 описывает степень взаимодействия собственных колебаний пучка и плазмы на длине волны λ_1. Заметим, что $g_{\alpha n}$ и q_1 существенно определяют свойства рассматриваемой системы. Из (31) видно, что в данной системе учитывается нерезонансное возбуждение вторых гармоник возмущения плотности заряда в плазме и пучке (величины g_{p2} и g_{b2}, соответственно).

В [2] было получено решение системы (31) только для случая адиабатического включения поля в бесконечно прошлом, когда $\left|b_{b1,p1}\right| \xrightarrow{\tau\to-\infty} 0$ (т.е. использована процедура, приводящая к формуле (30)). Это решение имеет вид

$$\left|b_{b1}\right|^2 = \frac{4q_1\tilde{\omega}_p^2}{\tilde{\alpha}_b\tilde{\omega}_p^2 + \tilde{\alpha}_p\tilde{\omega}_b^2}\left(\frac{\tilde{\omega}_p^2\tilde{\omega}_b^2}{g_{b1}\sqrt{g_{p1}g_{b1}}}\right)^{\frac{1}{2}} ch^{-1}\left(q_1\frac{\tilde{\omega}_p\tilde{\omega}_b}{\left(g_{p1}g_{b1}\right)^{\frac{1}{4}}}t\right),$$
$$\left|b_{p1}\right|^2 = \frac{4q_1\tilde{\omega}_b^2}{\tilde{\alpha}_b\tilde{\omega}_p^2 + \tilde{\alpha}_p\tilde{\omega}_b^2}\left(\frac{\tilde{\omega}_p^2\tilde{\omega}_b^2}{g_{p1}\sqrt{g_{p1}g_{b1}}}\right)^{\frac{1}{2}} ch^{-1}\left(q_1\frac{\tilde{\omega}_p\tilde{\omega}_b}{\left(g_{p1}g_{b1}\right)^{\frac{1}{4}}}t\right), \quad (32)$$

где введены обозначения

$$\tilde{\alpha}_p = 1 - \frac{3}{2}\frac{g_{p2}-g_{p1}}{g_{p2}-4g_{p1}}, \qquad \tilde{\alpha}_b = 1 - \frac{3}{2}\frac{g_{b2}-g_{b1}}{g_{b2}-4g_{b1}}. \quad (33)$$

Формулы (32) (при $\tau = 0$) дают выражения только для максимальных амплитуд взаимодействующих первых гармоник пучковой и плазменной волн, достигаемые в рассматриваемом процессе – коэффициенты при гиперболических косинусах. Для определения же времени развития неустойчивости необходимо решать систему уравнений (31) с ненулевыми начальными условиями, используя процедуру, приводящую к формулам (22) – (24). После проведения соответствующих преобразований решение системы уравнений (31) записывается следующим образом:

$$\left|b_{b1}\right|^2 = \frac{2x_0\left(1+\frac{\tilde{\omega}_b^2}{\tilde{\omega}_p^2}\tilde{\alpha}_p\right)\left(x_0+\sqrt{x_0^2+\tilde{x}^2\left(1+\frac{\tilde{\omega}_b^2}{\tilde{\omega}_p^2}\tilde{\alpha}_p\right)^{-2}}\right)}{2\left(1+\frac{\tilde{\omega}_b^2}{\tilde{\omega}_p^2}\tilde{\alpha}_p\right)\left(x_0+\sqrt{x_0^2+\tilde{x}^2\left(1+\frac{\tilde{\omega}_b^2}{\tilde{\omega}_p^2}\tilde{\alpha}_p\right)^{-2}}\right)cn^2(y,r)+x_0 sn^2(y,r)},$$
$$\left|b_{p1}\right|^2 = \frac{\tilde{\omega}_b^2}{\tilde{\omega}_p^2}\sqrt{\frac{g_{b1}}{g_{p1}}}\left[\frac{2x_0\left(1+\frac{\tilde{\omega}_b^2}{\tilde{\omega}_p^2}\tilde{\alpha}_p\right)\left(x_0+\sqrt{x_0^2+\tilde{x}^2\left(1+\frac{\tilde{\omega}_b^2}{\tilde{\omega}_p^2}\tilde{\alpha}_p\right)^{-2}}\right)}{2\left(1+\frac{\tilde{\omega}_b^2}{\tilde{\omega}_p^2}\tilde{\alpha}_p\right)\left(x_0+\sqrt{x_0^2+\tilde{x}^2\left(1+\frac{\tilde{\omega}_b^2}{\tilde{\omega}_p^2}\tilde{\alpha}_p\right)^{-2}}\right)cn^2(y,r)+x_0 sn^2(y,r)} - x_0\right]. \quad (34)$$

Здесь $x_0 = a_0^2$ (a_0 – начальное условие для системы (31) – считаем, что в начальный момент времени электронный пучок был замодулирован по плотности на первой гармонике в невозмущенной плазме, при этом начальная модуляция пучка пропорциональна $a_0 << 1$); аргумент и модуль эллиптических функций определяются формулами

$$y = \frac{q_1}{2}\frac{\tilde{\omega}_p\tilde{\omega}_b}{\left(g_{p1}g_{b1}\right)^{\frac{1}{4}}}t; \qquad r = 1 - \frac{x_0}{2}\left(1+\frac{\tilde{\omega}_b^2}{\tilde{\omega}_p^2}\tilde{\alpha}_p\right)\tilde{x}^{-2}\sqrt{x_0^2+\tilde{x}^2\left(1+\frac{\tilde{\omega}_b^2}{\tilde{\omega}_p^2}\tilde{\alpha}_p\right)^{-2}}, \quad (35)$$