МАТЕМАТИКА

MATHEMATICS

УДК 517.21.3
ББК 22.161.1
С 78

Сташ А.Х.
Ассистент кафедры математического анализа и методики преподавания математики факультета математики и компьютерных наук Адыгейского государственного университета, Майкоп, тел. (8772) 59-39-05, e-mail: aidamir.stash@gmail.com

О существенных значениях характеристик колеблемости решений линейных дифференциальных уравнений третьего порядка

(Рецензирована)

Аннотация
Приводится линейное дифференциальное уравнение третьего порядка с непрерывными ограниченными коэффициентами со счетным множеством существенных точных полных (векторных) частот ненулевых решений.
Ключевые слова: *линейное дифференциальное уравнение, колеблемость решений, число нулей функции, полная (векторная) частота решения.*

Stash A.Kh.
Assistant Lecturer of Department of Mathematical Analysis and Methodology of Teaching Mathematics, Mathematics and Computer Science Faculty, Adyghe State University, Maikop, ph. (8772) 59-39-05, e-mail: aidamir.stash@gmail.com

On essential values of variability characteristics for the solutions of third order linear differential equations

Abstract
In this paper we present a third order linear differential equation with continuous, bounded variable coefficients with countable set of essential exact complete (vector) frequencies of nonzero solutions.
Keywords: *linear differential equation, variability of solutions, number of zeros of function, complete (vector) frequencies of solutions.*

Через $\mathcal{E}^n$ обозначим множество линейных однородных уравнений n-го порядка

$$y^n + a_1(t)y^{n+1} + \ldots + a_{n-1}(t)\dot{y} + a_n(t)y = 0, \quad t \in \mathrm{R}^+ \equiv [0;\infty),$$

с ограниченными непрерывными коэффициентами, образующими строку

$$a \equiv (a_1,\ \ldots,\ a_n) : \mathrm{R}^+ \to \mathrm{R}^n$$

(каждую такую строку будем отождествлять с соответствующим уравнением). Множество всех ненулевых решений уравнения $a \in \mathcal{E}^n$ обозначим через $S_*(a)$.

Определение 1 [1, 2]. Нижней (верхней) частотой нулей решения $y \in S_*(a)$ будем называть величину

$$\check{\nu}(y) \equiv \underline{\lim}_{t\to\infty} \frac{\pi}{t}\nu(y,t) \qquad \left(\hat{\nu}(y) \equiv \overline{\lim}_{t\to\infty} \frac{\pi}{t}\nu(y,t)\right),$$

где $\nu(y,t)$ – число нулей функции y на промежутке $[0;t)$. В случае совпадения нижней частоты решения y с верхней будем называть ее точной и обозначать просто $\nu(y)$.

Определение 1 [1, 2]. Нижней (верхней) частотой нулей решения $y \in \mathcal{S}_*(a)$ будем называть величину

$$\check{\nu}(y) \equiv \varliminf_{t\to\infty} \frac{\pi}{t}\nu(y,t) \quad \left(\hat{\nu}(y) \equiv \varlimsup_{t\to\infty} \frac{\pi}{t}\nu(y,t)\right),$$

где $\nu(y,t)$ — число нулей функции y на промежутке $(0;t]$. В случае совпадения нижней частоты решения y с верхней будем называть ее точной и обозначать просто $\nu(y)$.

Определение 2 [3]. Каждому решению $y \in \mathcal{S}_*(a)$ поставим в соответствие его нижнюю (верхнюю) полную частоту и нижнюю (верхнюю) векторную частоту

$$\check{\sigma}(y) \equiv \inf_{m\in\mathbb{R}^n} \varliminf_{t\to\infty} \frac{\pi}{t}\nu(y,m,t) \quad \left(\hat{\sigma}(y) \equiv \inf_{m\in\mathbb{R}^n} \varlimsup_{t\to\infty} \frac{\pi}{t}\nu(y,m,t)\right),$$
$$\check{\zeta}(y) \equiv \varliminf_{t\to\infty} \inf_{m\in\mathbb{R}^n} \frac{\pi}{t}\nu(y,m,t) \quad \left(\hat{\zeta}(y) \equiv \varliminf_{t\to\infty} \inf_{m\in\mathbb{R}^n} \frac{\pi}{t}\nu(y,m,t)\right),$$

где $\nu(y,m,t)$ — число нулей при $\tau \in (0;t]$ скалярного произведения $(\psi y(\tau), m)$, $\psi y \equiv \left(y, \dot{y}, \ldots, y^{(n-1)}\right)$. В случае совпадения нижней полной (векторной) частоты решения y с верхней будем называть ее точной и обозначать просто $\sigma(y)$ (соответственно, $\zeta(y)$).

Заметим [3, 4], что частоты ненулевых решений автономного уравнения совпадают с модулями мнимых частей корней его характеристического многочлена.

Определение 3 [5]. Множество всех значений показателя $\varkappa\colon \mathcal{S}_*(a) \to \mathbb{R}$ назовем спектром этого показателя уравнения $a \in \mathcal{E}^n$.

Определение 4 [5]. Значение показателя, принадлежащее спектру системы, назовем существенным, если оно принимается на решениях, начальные значения которых содержат множество положительной меры в $\mathbb{R}^n$.

Теорема. Существует уравнение $a \in \mathcal{E}^3$, имеющее последовательность решений $y_1, y_2, \ldots$ с точными частотами, удовлетворяющими условиям

$$\sigma(y_i) = \zeta(y_i) = \nu(y_i) = 2^{-i}, \quad i \in \mathbb{N},$$

причем все эти значения частот являются существенными.

Теорема, частично анонсированная в докладе [6] и развивающая результаты доклада [7], обобщает теорему 3 [1] на случай уравнения третьего порядка с переменными коэффициентами.

Доказательству сформулированной теоремы предпошлем ряд лемм.

Лемма 1. Пусть последовательность положительных чисел $t_1 < t_2 < \ldots$ удовлетворяет условиям

$$\lim_{k\to\infty} t_k = \infty, \qquad \lim_{k\to\infty} \frac{t_{k+1}}{t_k} = 1. \tag{1}$$

Тогда для любого решения $y \in \mathcal{S}_*(a)$ любого уравнения $a \in \mathcal{E}^n$:

1) справедливы равенства

$$\check{\nu}(y) = \varliminf_{k\to\infty} \frac{\pi}{t_k}\nu(y,t_k) \quad \left(\hat{\nu}(y) = \varlimsup_{k\to\infty} \frac{\pi}{t_k}\nu(y,t_k)\right), \tag{2}$$

$$\check{\sigma}(y) = \inf_{m\in\mathbb{R}^n} \varliminf_{k\to\infty} \frac{\pi}{t_k}\nu(y,m,t_k) \quad \left(\hat{\sigma}(y) = \inf_{m\in\mathbb{R}^n} \varlimsup_{k\to\infty} \frac{\pi}{t_k}\nu(y,m,t_k)\right), \tag{3}$$

$$\check{\zeta}(y) = \varliminf_{k\to\infty} \inf_{m\in\mathbb{R}^n} \frac{\pi}{t_k}\nu(y,m,t_k) \quad \left(\hat{\zeta}(y) = \varlimsup_{k\to\infty} \inf_{m\in\mathbb{R}^n} \frac{\pi}{t_k}\nu(y,m,t_k)\right); \tag{4}$$

2) если последовательности $T_1, T_2, \ldots \geqslant 0$ и $\nu_1, \nu_2, \ldots \geqslant 0$ удовлетворяют условиям

$$\lim_{k\to\infty} \frac{T_k}{t_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{\nu_k}{t_k} = 0, \tag{5}$$

то после уменьшения в правых частях формул (2)–(4) каждого из чисел t_k в знаменателе дроби — на T_k, а каждого из чисел $\nu(y,m,t_k)$ — на ν_k значение этих правых частей не изменятся.

Доказательство (см. лемму 6 [1]).

1. Условия (1) позволяют заключить каждое значение $t>t_1$ в свои границы $t_k<t\leqslant t_{k+1}$ и записать цепочку соотношений

$$\check\nu(y)=\varliminf_{t\to\infty}\frac{\pi}{t}\nu(y,t)\geqslant\varliminf_{k\to\infty}\frac{\pi}{t_{k+1}}\nu(y,t_k)=\varliminf_{k\to\infty}\frac{\pi}{t_{k+1}}\nu(y,t_k)\cdot\lim_{k\to\infty}\frac{t_{k+1}}{t_k}=$$
$$=\varliminf_{k\to\infty}\frac{\pi}{t_k}\nu(y,t_k)=\varliminf_{k\to\infty}\frac{\pi}{t_{k+1}}\nu(y,t_{k+1})=\varliminf_{k\to\infty}\frac{\pi}{t_{k+1}}\nu(y,t_{k+1})\cdot\lim_{k\to\infty}\frac{t_{k+1}}{t_k}=$$
$$=\varliminf_{k\to\infty}\frac{\pi}{t_k}\nu(y,t_{k+1})\geqslant\varliminf_{t\to\infty}\frac{\pi}{t}\nu(y,t)=\check\nu(y),$$

в которой все неравенства обращаются в равенства, откуда и следует справедливость первого утверждения настоящей леммы для нижней частоты, т. е. первой из формул (2).

2. Таким образом, на основании равенств (5), с учетом доказанной ранее формулы (2), установим справедливость второго утверждения настоящей леммы для нижней частоты:

$$\varliminf_{k\to\infty}\frac{\pi\left(\nu(y,t_k)-\nu_k\right)}{t_k-T_k}=\frac{\varliminf\limits_{k\to\infty}\dfrac{\pi}{t_k}\nu(y,t_k)-\pi\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{\nu_k}{t_k}}{1-\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{T_k}{t_k}}=\varliminf_{k\to\infty}\frac{\pi}{t_k}\nu(y,t_k)=\check\nu(y).$$

3. Далее, используя доказанные утверждения для частот нулей (заметим, что в качестве функции $\nu(y,t)$ в них могла бы фигурировать любая неотрицательная и нестрого возрастающая по t функция), получаем для нижних полной и векторной частот: во-первых,

$$\check\sigma(y)=\inf_{m\in\mathbb{R}^n}\check\nu((\psi y,m))=\inf_{m\in\mathbb{R}^n}\varliminf_{k\to\infty}\frac{\pi}{t_k}\nu((\psi y,m),t_k)=$$
$$=\inf_{m\in\mathbb{R}^n}\varliminf_{k\to\infty}\frac{\pi}{t_k}\nu(y,m,t_k),$$
$$\check\zeta(y)=\varliminf_{t\to\infty}\frac{\pi}{t}\inf_{m\in\mathbb{R}^n}\nu((\psi y,m),t)=\varliminf_{k\to\infty}\frac{\pi}{t_k}\inf_{m\in\mathbb{R}^n}\nu((\psi y,m),t_k)=$$
$$=\varliminf_{k\to\infty}\frac{\pi}{t_k}\inf_{m\in\mathbb{R}^n}\nu(y,m,t_k),$$

и, во-вторых,

$$\inf_{m\in\mathbb{R}^n}\varliminf_{k\to\infty}\frac{\pi\left(\nu(y,m,t_k)-\nu_k\right)}{t_k-T_k}=\inf_{m\in\mathbb{R}^n}\check\nu((\psi y,m))=\check\sigma(y),$$
$$\varliminf_{k\to\infty}\inf_{m\in\mathbb{R}^n}\frac{\pi\left(\nu(y,m,t_k)-\nu_k\right)}{t_k-T_k}=\varliminf_{k\to\infty}\frac{\pi\left(\inf\limits_{m\in\mathbb{R}^n}\nu(y,m,t_k)-\nu_k\right)}{t_k-T_k}=$$
$$=\varliminf_{k\to\infty}\frac{\pi\inf\limits_{m\in\mathbb{R}^n}\nu(y,m,t_k)}{t_k}=\check\zeta(y).$$

4. Для верхних частот все утверждения настоящей леммы доказываются аналогично.

Лемма 1 доказана.

К определениям 1 и 2 добавим обозначения

$$\nu(y,t,s)\equiv\nu(y,t)-\nu(y,s),\quad \nu(y,m,t,s)\equiv\nu(y,m,t)-\nu(y,m,s).$$

В работе [1] сформулированы и доказаны следующие две леммы.

Лемма 2. Для любых $n \in \mathbb{N}$ и $d \geqslant 0$ существует такое $l = l_n(d) > 0$, что для любого уравнения $a \in \mathcal{E}^n$, удовлетворяющего условию $\|a\| \leqslant d$, на любом отрезке полуоси $\mathbb{R}^+$, имеющем длину l, любое решение $y \in \mathcal{S}_*(a)$ имеет менее n нулей.

Лемма 3. Для любого решения $y \in \mathcal{S}_*(a)$ любого уравнения $a \in \mathcal{E}^n$ при любом $T > 0$ справедлива оценка

$$\nu(y, s+T, s) \leqslant (n-1)\left(1 + \frac{T}{l_n(\|a\|)}\right). \tag{6}$$

Доказательство теоремы.

1. По выбранному $T_0 \geqslant 1$ и каждом $k \in \mathbb{N}$ обозначим через

$$\Delta_k \equiv 2kT_0 + 2^{k+1}\pi \tag{7}$$

и возьмем любую последовательность $\{\epsilon_k\}$ положительных чисел, стремящуюся к нулю.

Зададим последовательность

$$t_0 \equiv 0, \quad t_{k+1} \equiv t_k + \Delta_1, \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Начиная с некоторого номера k_1, всегда можно добиться, чтобы выполнялось неравенство $\frac{\Delta_1}{t_k} < \epsilon_1$. Меняем элементы этой последовательности, начиная с некоторого номераk_2 так

$$t_{k+1} \equiv t_k + \Delta_2, \quad k \geqslant k_2,$$

чтобы выполнялось

$$\frac{t_{k+1}}{t_k} = 1 + \frac{\Delta_2}{t_k} < 1 + \epsilon_2, \quad k \geqslant k_2.$$

Далее, по индукции продолжаем менять полученную последовательность. Если для любого $i \in \mathbb{N}$ построена последовательность $t_1, t_2, \ldots, t_k, \ldots$, удовлетворяющая условиям

$$t_{k+1} \equiv t_k + \Delta_i, \quad k \geqslant k_i,$$

$$\frac{t_{k+1}}{t_k} = 1 + \frac{\Delta_i}{t_k} < 1 + \epsilon_i, \quad k \geqslant k_i,$$

то выбираем k_{i+1}, так чтобы при любом $k \geqslant k_{i+1}$ были выполнены условия

$$t_{k+1} \equiv t_k + \Delta_{i+1},$$

$$\frac{t_{k+1}}{t_k} = 1 + \frac{\Delta_{i+1}}{t_k} < 1 + \epsilon_{i+1}.$$

В результате получим последовательность $\{t_k\}$, обладающую свойством

$$\lim_{k\to\infty} t_k = \infty, \quad \lim_{k\to\infty} \frac{t_{k+1}}{t_k} = 1.$$

2. Первые два элемента построенной в п. 1 последовательности соответственно равны

$$t_0 \equiv 0, \quad t_1 \equiv \Delta_1.$$

Разобьем промежуток $(0, t_1]$ точками T_0, $t_0^1 \equiv T_0 + 2\pi$, $t_0^1 + T_0$, $t_1 \equiv t_0^1 + T_0 + 2\pi$ на промежутки

$$(0; T_0], \quad (T_0; t_0^1], \quad (t_0^1; t_0^1 + T_0], \quad (t_0^1 + T_0; t_1].$$

Остальные промежутки $(t_k, t_{k+1}]$, образуемые соседними элементами этой последовательности с шагом Δ_1, также разбиваем на промежутки

$$(t_k; t_k + T_0], \quad (t_k + T_0; t_k^1], \quad (t_k^1; t_k^1 + T_0], \quad (t_k^1 + T_0; t_{k+1}],$$

где $t_k^1 \equiv T_0 + 2\pi, \quad t_{k+1} \equiv t_k^1 + T_0 + 2\pi.$

Промежутки $(t_k, t_{k+1}]$, образованные соседними элементами с шагом Δ_2 построенной последовательности, начиная с номера k_2 до $k_3 - 1$, разбиваем точками

$$\begin{gathered} t_k + T_0, \quad t_k^1 \equiv t_k + T_0 + 2^2\pi, \quad t_k^1 + T_0, \quad t_k^2 \equiv t_k^1 + T_0 + \pi, \\ t_k^2 + T_0, \quad t_k^3 \equiv t_k^2 + T_0 + 2\pi, \quad t_k^3 + T_0, \quad t_{k+1} \equiv t_k^3 + T_0 + \pi \end{gathered}$$

на промежутки

$$\begin{gathered} (t_k; t_k + T_0], \quad (t_k + T_0; t_k^1], \quad (t_k^1; t_k^1 + T_0], \quad (t_k^1 + T_0; t_k^2], \\ (t_k^2; t_k^2 + T_0], \quad (t_k^2 + T_0; t_k^3], \quad (t_k^3; t_k^3 + T_0], \quad (t_k^3 + T_0; t_{k+1}]. \end{gathered}$$

Любые два соседних элемента (с номерами $k > k_3$) построенной последовательности связаны соотношением

$$t_{k+1} = t_k + \Delta_i, \quad k_i \leqslant k \leqslant k_{i+1} - 1. \tag{8}$$

Промежуток $(t_k, t_{k+1}]$ разбиваем на две группы по $2i$ частей:

$$(t_k; t_k + T_0], \, (t_k^1; t_k^1 + T_0], \, (t_k^2; t_k^2 + T_0], \ldots, (t_k^{2i-1}; t_k^{2i-1} + T_0], \tag{9}$$

$$(t_k + T_0; t_k^1], \, (t_k^1 + T_0; t_k^2], \, (t_k^2 + T_0; t_k^3], \ldots, (t_k^{2i-1} + T_0; t_{k+1}], \tag{10}$$

где

$$\begin{gathered} t_k^1 \equiv t_k + T_0 + 2^i\pi, \quad t_k^2 \equiv t_k^1 + T_0 + 2^{i-2}\pi, \quad t_k^3 \equiv t_k^2 + T_0 + 2^{i-3}\pi, \ldots, \\ t_k^i \equiv t_k^{i-1} + T_0 + \pi, \quad t_k^{i+1} \equiv t_k^i + T_0 + 2\pi, \quad t_k^{i+2} \equiv t_k^{i+1} + T_0 + \pi, \ldots, \\ t_k^{2i-1} \equiv t_k^{2i-2} + T_0 + 2^{i-3}\pi, \quad t_{k+1} \equiv t_k^{2i-1} + T_0 + 2^{i-2}\pi. \end{gathered}$$

3. Построим уравнение третьего порядка, фундаментальная система решений которого на каждом из промежутков (10) при некотором фиксированном значении k будет совпадать с наперед выбранными фундаментальными системами решений.

Для набора функций $f_1(t) = \exp(\sin t) + \alpha$, $f_2(t) = 1$, $f_3(t) = \cos t \exp(\sin t)$ определитель Вронского

$$\begin{gathered} W_{f_1,f_2,f_3}(t) = \\ = \begin{vmatrix} \exp(\sin t) + \alpha & 1 & \cos t \exp(\sin t) \\ \cos t \exp(\sin t) & 0 & (\cos^2 t - \sin t) \exp(\sin t) \\ (\cos^2 t - \sin t) \exp(\sin t) & 0 & (\cos^3 t - 3 \sin t \cos t - \cos t) \exp(\sin t) \end{vmatrix} = \\ = -\exp(2 \sin t) \left(\cos^4 t - 3 \sin t \cos^2 t - \cos^2 t - \cos^4 t + 2 \sin t \cos^2 t - \sin^2 t \right) = \\ = \exp(2 \sin t) \left(1 + \sin t \cos^2 t \right) \end{gathered}$$

при любом $t \in \mathbb{R}$ положителен, а линейное однородное уравнение, решениями которого они являются, имеет вид (см. [8])

$$\begin{vmatrix} \exp(\sin t) + \alpha & 1 & \cos t \exp(\sin t) & y \\ \cos t \exp(\sin t) & 0 & (\cos^2 t - \sin t) \exp(\sin t) & \dot{y} \\ (\cos^2 t - \sin t) \exp(\sin t) & 0 & F_1(t) & \ddot{y} \\ F_1(t) & 0 & F_2(t) & \dddot{y} \end{vmatrix} = 0,$$

где

$$F_1(t) \equiv (\cos^3 t - 3\sin t\cos t - \cos t)\exp(\sin t),$$
$$F_2(t) \equiv (\cos^4 t - 6\sin t\cos^2 t - 4\cos^2 t + 3\sin^2 t + \sin t)\exp(\sin t).$$

Раскладывая в последнем равенстве определитель по элементам последнего столбца, получим

$$W_{f_1,f_2,f_3}(t)\cdot\dddot{y} - \Delta_1(t)\cdot\ddot{y} + \Delta_2(t)\cdot\dot{y} = 0,$$

или

$$\dddot{y} - \frac{\Delta_1(t)}{W_{f_1,f_2,f_3}(t)}\cdot\ddot{y} + \frac{\Delta_2(t)}{W_{f_1,f_2,f_3}(t)}\cdot\dot{y} = 0, \tag{11}$$

где

$$\Delta_1(t) = \begin{vmatrix} \exp(\sin t)+\alpha & 1 & \cos t\exp(\sin t) \\ \cos t\exp(\sin t) & 0 & (\cos^2 t - \sin t)\exp(\sin t) \\ F_1(t) & 0 & F_2(t) \end{vmatrix} =$$
$$= -\exp(2\sin t)(\cos t F_2(t) - F_1(t)(\cos^2 t - \sin t)) =$$
$$= -\exp(2\sin t)(\cos^5 t - 6\sin t\cos^3 t - 4\cos^3(t) + 3\sin^2 t\cos t +$$
$$+ \sin t\cos t - \cos^5 t + 3\sin t\cos^3 t - \cos^3(t) + \sin t\cos^3 t -$$
$$-3\sin^2 t\cos t - \sin t\cos t) = \exp(2\sin t)(5\cos^3(t) + 2\sin t\cos^3 t),$$

$$\Delta_2(t) = \begin{vmatrix} \exp(\sin t)+\alpha & 1 & \cos t\exp(\sin t) \\ (\cos^2 t - \sin t)\exp(\sin t) & 0 & F_1(t) \\ F_1(t) & 0 & F_2(t) \end{vmatrix} =$$
$$= -\exp(2\sin t)(F_2(t)(\cos^2 t - \sin t) - F_1^2(t)) =$$
$$= -\exp(2\sin t)(\cos^6 t - \sin t\cos^4 t - 6\sin t\cos^4 t - 6\sin^2 t\cos^2 t - \cos^4 t +$$
$$+4\sin t\cos^2 t + 3\sin^2 t\cos^2 t - 3\sin^3 t + \sin t\cos^2 t - \sin^2 t - \cos^6 t +$$
$$+6\sin t\cos^4 t + 2\cos^4 t - 9\sin^2 t\cos^2 t - 6\sin t\cos^2 t - \cos^2 t =$$
$$= \exp(2\sin t)(1 + 2\cos^4 t + \sin t\cos^4 t + \sin t\cos^2 t + 3\sin^3 t).$$

Именно таким и возьмем по определению искомое уравнение $a \in \mathcal{E}^3$ на всех промежутках (10).

Теорема 3 [9] позволяет строить уравнение $a \in \mathcal{E}^n$, имеющее фундаментальную систему решений, совпадающую слева и справа от заданного отрезка $[t_0, t_1] \subset \mathbb{R}^+$ с заданными фундаментальными системами решений с положительными определителями Вронского. На основании этой теоремы при каждом фиксированном $k \in \mathbb{N}$ строим уравнение следующим образом:

– на участке $(t_k; t_k + T_0]$ — найдем уравнение, переводящее набор

$$(\exp(\sin t) + 4,\ 1,\ \cos t\exp(\sin t)) \tag{12}$$

решений, заданных слева от точки t_k, в набор

$$(\exp(\sin t) + 1,\ 1,\ \cos t\exp(\sin t)) \tag{13}$$

решений, заданных на $[t_k + T_0; t_k^1]$ (здесь первое решение начального набора переходит в первое решение конечного набора, второе — во второе, и третье — в третье);

– на участке $(t_k^1; t_k^1 + T_0]$ — найдем уравнение, переводящее набор (13) решений, заданных слева от точки t_k^1, в набор (12) решений, заданных на $[t_k^1 + T_0; t_k^2]$;

– на участке $(t_k^2; t_k^2 + T_0]$ — найдем уравнение, переводящее набор (12) решений, заданных слева от точки t_k^2, в набор

$$(\exp(\sin t) + 7,\ 1,\ \cos t\exp(\sin t)) \tag{14}$$

решений, заданных на $[t_k^2+T_0; t_k^3]$;

– ... и т.д.;

– на участке $(t_k^i; t_k^i+T_0]$ — выберем уравнение, переводящее набор

$$(\exp(\sin t)+3i-5,\ 1,\ \cos t\exp(\sin t)) \tag{15}$$

решений, заданных слева от точки t_k^i, в набор

$$(\exp(\sin t)+3i-2,\ 1,\ \cos t\exp(\sin t)) \tag{16}$$

решений, заданных справа от точки $t_k^i+T_0$;

– на участке $(t_k^{i+1}; t_k^{i+1}+T_0]$ — выберем уравнение, переводящее набор (16) решений, заданных слева от точки t_k^{i+1}, в набор (15) решений, заданных справа от точки $t_k^{i+1}+T_0$;

– на участке $(t_k^{i+2}; t_k^{i+2}+T_0]$ — выберем уравнение, переводящее набор (15) решений, заданных слева от точки t_k^{i+2}, в набор $(\exp(\sin t)+3i-8,\ 1,\ \cos t\exp(\sin t))$ решений, заданных справа от точки $t_k^{i+2}+T_0$;

– ... и т.д.;

– на участке $[t_k^{2i-1}; t_k^{2i-1}+T_0]$ — совпадающим с уравнением, переводящим набор (14) решений, заданных слева от точки t_k^{2i-1}, в набор (12) решений, заданных справа от точки $t_k^{2i-1}+T_0$;

– во всех остальных точках полуинтервала $(t_k; t_{k+1}]$ — имеющим вид (11).

Таким образом, построили уравнение на промежутке $(t_k; t_{k+1}]$, фундаментальная система решений y_1, y_2, y_3 которого удовлетворяет условиям:

$$(y_1,y_2,y_3)(t)=\begin{cases}(\exp(\sin t)+1,\ 1,\ \cos t\exp(\sin t)), & t_k+T_0<t\leqslant t_k^1,\\ (\exp(\sin t)+4,\ 1,\ \cos t\exp(\sin t)), & t_k^1+T_0<t\leqslant t_k^2,\\ (\exp(\sin t)+7,\ 1,\ \cos t\exp(\sin t)), & t_k^2+T_0<t\leqslant t_k^3,\\ \ldots, & \\ (\exp(\sin t)+3i-2,\ 1,\ \cos t\exp(\sin t)), & t_k^{i-1}+T_0<t\leqslant t_k^i,\\ (\exp(\sin t)+3i+1,\ 1,\ \cos t\exp(\sin t)), & t_k^i+T_0<t\leqslant t_k^{i+1},\\ (\exp(\sin t)+3i-2,\ 1,\ \cos t\exp(\sin t)), & t_k^{i+1}+T_0<t\leqslant t_k^{i+2},\\ \ldots, & \\ (\exp(\sin t)+7,\ 1,\ \cos t\exp(\sin t)), & t_k^{2i-2}+T_0<t\leqslant t_k^{2i-1},\\ (\exp(\sin t)+4,\ 1,\ \cos t\exp(\sin t)), & t_k^{2i-1}+T_0<t\leqslant t_{k+1}.\end{cases}$$

Повторяя эту процедуру построения на каждом промежутке $(t_k,\ t_{k+1}]$ $\quad k\in\mathbb{N}$, получим уравнение $a\in\mathcal{E}^3$ на $\mathbb{R}^+$.

4. Определим функцию $u(t)\equiv\exp(\sin t)-1$ и установим, что число нулей функции

$$(\psi u(t),\ m)\equiv m_1(\exp(\sin t)-1)+m_2\cos t\exp(\sin t)+m_3\exp(\sin t)(\cos^2 t-\sin t)$$

на полуинтервале $(0,\ 2\pi]$ при любом ненулевом векторе $m=(m_1,m_2,m_3)$ не меньше двух. Для этого проследим за значениями функции $(\psi u,\ m)$ в точках $0, \pi/2,\ \pi,\ 3\pi/2,\ 2\pi$:

$$(\psi u(0),\ m)=(\psi u(2\pi),\ m)=m_2+m_3, \tag{17}$$

$$(\psi u(\pi),\ m)=-m_2+m_3, \tag{18}$$

$$(\psi u\,(\pi/2)\,,\,m) = m_1 e - m_1 - m_3 e, \tag{19}$$

$$e(\psi u\,(3\pi/2)\,,\,m) = e\left(\frac{m_1}{e} - m_1 + \frac{m_3}{e}\right). \tag{20}$$

Если $m_2 = m_3 = 0$ ($m_1 \neq 0$), то функция $(\psi u,\, m)$ совпадает с $m_1 u$, а значит, имеет два нуля.

Предположим, что имеет место следующая система

$$\begin{cases} m_2 + m_3 = 0, \\ -m_2 + m_3 > 0, \\ m_1(e-1) - m_3 e > 0, \\ m_1(1-e) + m_3 > 0. \end{cases}$$

Выражая m_2 из равенства и подставляя в первое неравенство системы, получим $2m_3 > 0$. Далее, складывая последние неравенства данной системы, получим неравенство$(1-e)m_3 > 0$, из которого следует $m_3 < 0$. Полученное противоречие означает невыполнимость системы.

Аналогичными рассуждениями, можно показать, что следующие системы

$$\begin{cases} m_2 + m_3 = 0, \\ -m_2 + m_3 < 0, \\ m_1(e-1) - m_3 e < 0, \\ m_1(1-e) + m_3 < 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} m_2 + m_3 > 0, \\ -m_2 + m_3 = 0, \\ m_1(e-1) - m_3 e > 0, \\ m_1(1-e) + m_3 > 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} m_2 + m_3 < 0, \\ -m_2 + m_3 = 0, \\ m_1(e-1) - m_3 e < 0, \\ m_1(1-e) + m_3 < 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_2 + m_3 > 0, \\ -m_2 + m_3 > 0, \\ m_1(e-1) - m_3 e = 0, \\ m_1(1-e) + m_3 > 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} m_2 + m_3 < 0, \\ -m_2 + m_3 < 0, \\ m_1(e-1) - m_3 e = 0, \\ m_1(1-e) + m_3 < 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} m_2 + m_3 > 0, \\ -m_2 + m_3 > 0, \\ m_1(e-1) - m_3 e > 0, \\ m_1(1-e) + m_3 = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_2 + m_3 < 0, \\ -m_2 + m_3 < 0, \\ m_1(e-1) - m_3 e < 0, \\ m_1(1-e) + m_3 = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} m_2 + m_3 > 0, \\ -m_2 + m_3 > 0, \\ m_1(e-1) - m_3 e > 0, \\ m_1(1-e) + m_3 > 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} m_2 + m_3 < 0, \\ -m_2 + m_3 < 0, \\ m_1(e-1) - m_3 e < 0, \\ m_1(1-e) + m_3 < 0 \end{cases}$$

не имеют места.

Следовательно, для значений (17)-(19),(21) исключили десять критических случаев, а все оставшиеся случаи обеспечивают существование по крайней мере двух нулей функции $(\psi u(t),\, m)$ на полуинтервале $(0,\, 2\pi]$.

Таким образом, установили следующее равенство

$$\inf_{m \in \mathbb{R}^3} \nu(u, m, 2\pi) = \nu(u, 2\pi) = 2. \tag{21}$$

5. Для произвольного решения $y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_3 y_3 \in \mathbb{S}_*(a)$ определим величины

$$\varkappa_k(y) \equiv \frac{\nu(y, t_k^1, t_k + T_0) + \nu(y, t_k^2, t_k^1 + T_0) + \cdots + \nu(y, t_{k+1}, t_k^{2i(k)-1} + T_0)}{2^{i(k)+1}},$$

$$\varkappa_k(y,m^*) \equiv \frac{1}{2^{i(k)+1}}(\nu(y,m^*,t_k^1,t_k+T_0)+\nu(y,m^*,t_k^2,t_k^1+T_0)+\dots+$$
$$+\nu(y,m^*,t_{k+1},t_k^{2i(k)-1}+T_0)) = \frac{1}{2^{i(k)+1}}\inf_{m\in\mathbb{R}^2}(\nu(y,m,t_k^1,t_k+T_0)+$$
$$+\nu(y,m,t_k^2,t_k^1+T_0)+\dots+\nu(y,m,t_{k+1},t_k^{2i(k)-1}+T_0)),$$

где $i(k)$ совпадает с номером шага между t_k и t_{k+1}.

Решение $z_1 \equiv (y_1-2y_2)\colon [0;\infty)\to\mathbb{R}$ при любом $k\in\mathbb{N}$ представимо в виде

$$z_1(t) = \begin{cases} \exp(\sin t)-1, & t_k+T_0<t\leqslant t_k^1,\\ \exp(\sin t)+2, & t_k^1+T_0<t\leqslant t_k^2,\\ \exp(\sin t)+5, & t_k^2+T_0<t\leqslant t_k^3,\\ \dots, & \\ \exp(\sin t)+3i(k)-4, & t_k^{i(k)-1}+T_0<t\leqslant t_k^{i(k)},\\ \exp(\sin t)+3i(k)-1, & t_k^{i(k)}+T_0<t\leqslant t_k^{i(k)+1},\\ \exp(\sin t)+3i(k)-4, & t_k^{i(k)+1}+T_0<t\leqslant t_k^{i(k)+2},\\ \dots, & \\ \exp(\sin t)+5, & t_k^{2i(k)-2}+T_0<t\leqslant t_k^{2i(k)-1},\\ \exp(\sin t)+2, & t_k^{2i(k)-1}+T_0<t\leqslant t_{k+1}, \end{cases}$$

и оно на каждом из промежутков $(t_k+T_0;t_k^1]$, $k\in\mathbb{N}$ имеет $2^{i(k)}$ нулей, тогда как любая функция (y_1,m) не может иметь менее $2^{i(k)}$ нулей в силу предыдущего пункта, а на любом другом промежутке вида (10) – отделено от нуля, поэтому $m^*=(1,0,0)$ и

$$\varkappa_k(z_1,m^*)=\varkappa_k(z_1)=2^{-1},\quad k\in\mathbb{N}.$$

Решение $z_2 \equiv (y_1-5y_2)\colon [0;\infty)\to\mathbb{R}$ при любом $k\geqslant k_2$ представимо в виде

$$z_2(t) = \begin{cases} \exp(\sin t)-4, & t_k+T_0<t\leqslant t_k^1,\\ \exp(\sin t)-1, & t_k^1+T_0<t\leqslant t_k^2,\\ \exp(\sin t)+2, & t_k^2+T_0<t\leqslant t_k^3,\\ \dots, & \\ \exp(\sin t)+3i(k)-7, & t_k^{i(k)-1}+T_0<t\leqslant t_k^{i(k)},\\ \exp(\sin t)+3i(k)-4, & t_k^{i(k)}+T_0<t\leqslant t_k^{i(k)+1},\\ \exp(\sin t)+3i(k)-7, & t_k^{i(k)+1}+T_0<t\leqslant t_k^{i(k)+2},\\ \dots, & \\ \exp(\sin t)+2, & t_k^{2i(k)-2}+T_0<t\leqslant t_k^{2i(k)-1}\\ \exp(\sin t)-1, & t_k^{2i(k)-1}+T_0<t\leqslant t_{k+1} \end{cases}$$

и любая функция (y_2,m) каждом из промежутков $(t_k^1+T_0;t_k^2]$, $(t_k^{2i(k)-1}+T_0;t_{k+1}]$, $k\in\mathbb{N}$ имеет не менее $2^{i(k)-2}$ нулей в силу предыдущего пункта, а на любом другом промежутке вида (10) – отделено от нуля, поэтому $m^*=(1,0,0)$ и

$$\varkappa_k(z_2,m^*)=\varkappa_k(z_2)=2^{-2},\quad k\in\mathbb{N}.$$

При любом фиксированном $q \in \mathbb{N}$ решение $z_q \equiv (y_1 - (3q-1)y_2)\colon [0;\infty) \to \mathbb{R}$ (начиная с первого момента k_q появления Δ_q – го шага) при любом $k \geqslant k_q$ представимо в виде

$$z_q(t) = \begin{cases} \exp(\sin t) + 2 - 3q, & t_k + T_0 < t \leqslant t_k^1, \\ \exp(\sin t) + 5 - 3q, & t_k^1 + T_0 < t \leqslant t_k^2, \\ \dots, & \\ \exp(\sin t) - 1, & t_k^{q-1} + T_0 < t \leqslant t_k^q, \\ \dots, & \\ \exp(\sin t) - 1 + 3(i(k) - q), & t_k^{i(k)-1} + T_0 < t \leqslant t_k^{i(k)}, \\ \exp(\sin t) + 2 + 3(i(k) - q), & t_k^{i(k)} + T_0 < t \leqslant t_k^{i(k)+1}, \\ \exp(\sin t) - 1 + 3(i(k) - q), & t_k^{i(k)+1} + T_0 < t \leqslant t_k^{i(k)+2}, \\ \dots, & \\ \exp(\sin t) - 1, & t_k^{2i(k)-q+1} + T_0 < t \leqslant t_k^{2i(k)-q+2}, \\ \dots, & \\ \exp(\sin t) + 8 - 3q, & t_k^{2i(k)-2} + T_0 < t \leqslant t_k^{2i(k)-1}, \\ \exp(\sin t) + 5 - 3q, & t_k^{2i(k)-1} + T_0 < t \leqslant t_{k+1}, \end{cases}$$

и любая функция (z_q, m) на каждом из промежутков

$$(t_k^{q-1} + T_0; t_k^q],\ (t_k^{2i(k)-q+1} + T_0; t_k^{2i(k)-q+2}], \quad k \in \mathbb{N} \tag{22}$$

имеет не менее $2^{i(k)-q}$ нулей в силу п.4 настоящего доказательства, а на любом другом промежутке вида (10) – отделено от нуля, поэтому $m^* = (1, 0, 0)$ и

$$\varkappa_k(z_q, m^*) = \varkappa_k(z_q) = 2^{-q}, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{23}$$

6. Последовательность $\{T_l\}$ сумм длин всех промежутков (длины T_0) вида (9), попавших в полуинтервал $(0, t_l]$, можно задать формулой $T_l \equiv (2P_1 + 4P_2 + \dots + 2j(l)P_{j(l)})T_0$, где P_1 — число всех элементов последовательности $\{t_k\}$ с шагом Δ_1, P_2 — число всех элементов последовательности $\{t_k\}$ с шагом Δ_2 и т.д., $P_{j(l)}$ — число всех элементов последовательности $\{t_k\}$ с шагом Δ_j, не превышающих $t_l \equiv t_{l-1} + \Delta_{j(l)}$. Ясно, что (см. 7)

$$t_l \equiv (2^2 P_1 + 2^3 P_2 + \dots + 2^{j(l)+1} P_{j(l)})\pi + (2P_1 + 4P_2 + \dots + 2j(l)P_{j(l)})T_0$$

и из $l \to \infty$ следует $j \to \infty$.

Благодаря выше сформулированной лемме3, найдется такое число L, что любое ненулевое решение построенного уравнения $a \in \mathcal{E}^3$ на любом промежутке длины T_0 имеет не более чем L нулей. Поэтому последовательность $\{\nu_l\}$ сумм возможных наибольших чисел нулей функции $y \in \mathcal{S}_*(a)$ на каждом из всех промежутков (9), попавших в $(0, t_l]$, записывается в виде

$$\nu_l \equiv (2P_1 + 4P_2 + \dots + 2j(l)P_{j(l)})L.$$

Поскольку

$$\frac{P_k}{P_j} \leqslant 1, \quad k = 1, 2, \dots, j-1,$$

в силу неубывания последовательности $\{P_j\}$, то

$$\frac{\nu_l}{t_l} \leqslant \frac{L(2P_1 + 4P_2 + \dots + 2j(l)P_{j(l)})}{\pi 2^{j(l)+1} P_{j(l)}} \leqslant \frac{L(2 + 4 + \dots + 2j(l))}{\pi 2^{j(l)+1}} = \frac{L(j^2(l) + j(l))}{\pi 2^{j(l)+1}},$$

$$\frac{T_l}{t_l} \leqslant \frac{T_0(j^2(l) + j(l))}{\pi 2^{j(l)+1}}.$$

Поэтому для построенных последовательностей выполнены

$$\lim_{l\to\infty} \frac{T_l}{t_l} = \lim_{l\to\infty} \frac{\nu_l}{t_l} = 0.$$

7. Для любого $q \in \mathbb{N}$ обозначим через m_q вектор, на котором реализуется инфимум в определении нижней векторной частоты решения z_q. Тогда очевидно, что при любом значений k на каждом из промежутков (10) число нулей функций z_q и (z_q, m_q) совпадут, а на каждом из промежутков (9) число нулей функции (z_q, m_q) не превзойдет числа нулей решения z_q. Поэтому все рассуждения, проводимые в п. 6 настоящего доказательства для решения z_q, справедливы и для функции (z_q, m_q).

8. На основании пп. 6, 7 настоящего доказательства при вычислении векторных частот будем пользоваться леммой 1, согласно которой можно не учитывать как полуинтервал $(0,\, T_0]$, так и все полуинтервалы (9) (т. е. не учитывать их вклад ни в длину промежутка, на котором подсчитывается число нулей решения, ни в само это число). Следовательно, при любом $q \in \mathbb{N}$ для решения z_q, с учетом равенств (23), получим

$$\check{\zeta}(z_q) = \varliminf_{p\to\infty} \inf_{m\in\mathbb{R}^3} \frac{\pi}{t_p} \nu(z_q, m, t_p) =$$

$$= \varliminf_{p\to\infty} \frac{\pi}{t_p} \nu(z_q, m_q, t_p) = \varliminf_{p\to\infty} \frac{\pi}{t_p} \nu(z_q, t_p) = \check{\nu}(z_q) =$$

$$= \varliminf_{p\to\infty} \left(\frac{\pi\nu(z_q, t_{k_q}) + \pi \sum\limits_{i=k_q}^{p} (\nu(z_q, t_{i+1}, t_i))}{t_p} \right) =$$

$$= \lim_{p\to\infty} \frac{\pi\nu(z_q, t_{k_q})}{t_p} + \varliminf_{p\to\infty} \frac{\pi \sum\limits_{i=k_q}^{p} (\nu(z_q, t_{i+1}, t_i))}{t_p} =$$

$$= \varliminf_{p\to\infty} \left(\frac{\pi \sum\limits_{i=k_q}^{p} \Big(\nu(z_q, t_i^1, t_i + T_0) + \nu(z_q, t_i^2, t_i^1 + T_0) + \dots + \nu(z_q, t_{i+1}, t_i^{2j(i)-1} + T_0)\Big)}{(2^{j(k_q)+1} + 2^{j(k_q+1)+1} + \dots + 2^{j(p)+1})\pi} \right) =$$

$$= \varliminf_{p\to\infty} \left(\frac{2^{j(k_q)+1} \varkappa_{k_q}(y^q) + 2^{j(k_q+1)+1} \varkappa_{k_q+1}(y^q) + \dots + 2^{j(p)+1} \varkappa_p(y^q)}{2^{j(k_q)+1} + 2^{j(k_q+1)+1} + \dots + 2^{j(p)+1}} \right) =$$

$$= \varliminf_{p\to\infty} \left(\frac{2^{-q}(2^{j(k_q)+1} + 2^{j(k_q+1)+1} + \dots + 2^{j(p)+1})}{2^{j(k_q)+1} + 2^{j(k_q+1)+1} + \dots + 2^{j(p)+1}} \right) = 2^{-q},$$

где $j(i)$ совпадает с номером шага между $t_i,\, t_{i+1}$.

Для выбранных решений имеет место следующая оценка

$$\check{\sigma}(z_q) = \inf_{m\in\mathbb{R}^3} \varliminf_{p\to\infty} \frac{\pi}{t_p} \nu(z_q, m, t_p) \leqslant \varliminf_{p\to\infty} \frac{\pi}{t_p} \nu(z_q, m_q, t_p) = 2^{-q}, \quad q \in \mathbb{N}.$$

Аналогичные равенства и неравенства справедливы соответственно для верхних частот, поэтому имеем

$$\nu(z_q) = \zeta(z_q) = 2^{-q}, \quad q \in \mathbb{N}. \tag{24}$$

$$\sigma(z_q) \leqslant 2^{-q}, \quad q \in \mathbb{N}.$$

Из соотношений

$$2^{-q} = \zeta(z_q) \leqslant \sigma(z_q) \leqslant 2^{-q}, \quad q \in \mathbb{N}$$

(первое неравенство из которых вытекает непосредственно из определения точных векторной и полной частот) следует, что

$$\sigma(z_q) = 2^{-q}, \quad q \in \mathbb{N}. \tag{25}$$

9. Зафиксируем номер q решения, сколь угодно малую $\gamma > 0$ и набор c_1, c_2, c_3 коэффициентов, удовлетворяющих условиям

$$c_1 \in (1,\, 1+\gamma), \quad c_2 \in (1-3q,\, 1-3q+\gamma), \quad c_3 \in (0,\, \gamma). \tag{26}$$

По теореме о непрерывной зависимости решений от начальных значений решение $\overline{z} = c_1y_1 + c_2y_2 + c_3y_3$ на любом отрезке будет мало отличаться от z_q. Поэтому решение $\overline{z}$ ни разу не будет обращаться в нуль на тех участках, где функция z_q отделена от нуля. На остальных участках вида (22), где функция z_q имеет вид $\exp\sin t - 1$, решение $\overline{z}$ представимо в виде

$$\overline{z}_q \equiv c_1(\exp(\sin t) - 1) + c_2^* + c_3 \cos t \exp(\sin t),$$

где c_2^* - положительное, достаточно малое число.

Установим, что функция

$$\begin{gathered}(\psi\overline{z}_q(t),\, m) \equiv m_1(c_1(\exp(\sin t) - 1) + c_2^* + c_3\cos t\exp(\sin t)) + \\ + m_2\exp(\sin t)(c_1\cos t + c_3(\cos^2 t - \sin t)) + \\ + m_3\exp(\sin t)(c_1(\cos^2 t - \sin t) + c_3(\cos^3 t - 3\sin t\cos t - \cos t))\end{gathered}$$

на полуинтервале $(0,\, 2\pi]$ при любом ненулевом векторе $m \in \mathbb{R}^3$ имеет не менее двух нулей. Для этого проследим за следующими значениями функции

$$(\psi\overline{z}_q(0),\, m) = (\psi\overline{z}_q(2\pi),\, m) = (c_2^* + c_3)m_1 + (c_1 + c_3)m_2 + c_1m_3, \tag{27}$$

$$(\psi\overline{z}_q(\pi),\, m) = (c_2^* - c_3)m_1 + (c_3 - c_1)m_2 + c_1m_3, \tag{28}$$

$$(\psi\overline{z}_q\left(\pi/2\right),\, m) = m_1(c_1e + c_2^* - c_1) - ec_3m_2 - ec_1m_3, \tag{29}$$

$$e(\psi\overline{z}_q\left(3\pi/2\right),\, m) = m_1(c_1 + ec_2^* - ec_1) + c_3m_2 + c_1m_3. \tag{30}$$

Если $m_2 = m_3 = 0$, то функция

$$(\psi\overline{z}_q(t),\, m) = m_1\overline{z}_q(t)$$

имеет на полуинтервале $(0,\, 2\pi]$ ровно два нуля, поскольку условия (26) обеспечивают близость функций u, $\overline{z}_q$.

Нетрудно проверить, что следующие системы

$$\begin{cases}(\psi\overline{z}_q(0),\, m)=0,\\(\psi\overline{z}_q(\pi),\, m)>0,\\(\psi\overline{z}_q\left(\pi/2\right),\, m)>0,\\e(\psi\overline{z}_q\left(3\pi/2\right),\, m)>0,\end{cases}\qquad\begin{cases}(\psi\overline{z}_q(0),\, m)=0,\\(\psi\overline{z}_q(\pi),\, m)<0,\\(\psi\overline{z}_q\left(\pi/2\right),\, m)<0,\\e(\psi\overline{z}_q\left(3\pi/2\right),\, m)<0,\end{cases}$$

$$\begin{cases}(\psi\overline{z}_q(0),\, m)>0,\\(\psi\overline{z}_q(\pi),\, m)=0,\\(\psi\overline{z}_q\left(\pi/2\right),\, m)>0,\\e(\psi\overline{z}_q\left(3\pi/2\right),\, m)>0,\end{cases}\qquad\begin{cases}(\psi\overline{z}_q(0),\, m)<0,\\(\psi\overline{z}_q(\pi),\, m)=0,\\(\psi\overline{z}_q\left(\pi/2\right),\, m)<0,\\e(\psi\overline{z}_q\left(3\pi/2\right),\, m)<0,\end{cases}$$

$$\begin{cases}(\psi\overline{z}_q(0),\, m)>0,\\(\psi\overline{z}_q(\pi),\, m)>0,\\(\psi\overline{z}_q\left(\pi/2\right),\, m)=0,\\e(\psi\overline{z}_q\left(3\pi/2\right),\, m)>0,\end{cases}\qquad\begin{cases}(\psi\overline{z}_q(0),\, m)<0,\\(\psi\overline{z}_q(\pi),\, m)<0,\\(\psi\overline{z}_q\left(\pi/2\right),\, m)=0,\\e(\psi\overline{z}_q\left(3\pi/2\right),\, m)<0,\end{cases}$$

$$\begin{cases}(\psi\overline{z}_q(0),\, m)>0,\\(\psi\overline{z}_q(\pi),\, m)>0,\\(\psi\overline{z}_q\left(\pi/2\right),\, m)>0,\\e(\psi\overline{z}_q\left(3\pi/2\right),\, m)=0,\end{cases}\qquad\begin{cases}(\psi\overline{z}_q(0),\, m)<0,\\(\psi\overline{z}_q(\pi),\, m)<0,\\(\psi\overline{z}_q\left(\pi/2\right),\, m)<0,\\e(\psi\overline{z}_q\left(3\pi/2\right),\, m)=0,\end{cases}$$

$$\begin{cases}(\psi\overline{z}_q(0),\, m)>0,\\(\psi\overline{z}_q(\pi),\, m)>0,\\(\psi\overline{z}_q\left(\pi/2\right),\, m)>0,\\e(\psi\overline{z}_q\left(3\pi/2\right),\, m)>0,\end{cases}\qquad\begin{cases}(\psi\overline{z}_q(0),\, m)<0,\\(\psi\overline{z}_q(\pi),\, m)<0,\\(\psi\overline{z}_q\left(\pi/2\right),\, m)<0,\\e(\psi\overline{z}_q\left(3\pi/2\right),\, m)<0,\end{cases}$$

не имеют места.

Следовательно, рассмотренные десять различных комбинаций знаков значений (27)–(30) не имеют места, а любая другая комбинация гарантирует существование хотя бы двух нулей функции $(\psi\overline{z}_q,\, m)$ на полуинтервале $(0,\, 2\pi]$ и тем самым установлено равенство

$$\inf_{m\in\mathbb{R}^3}\nu(\overline{z}_q, m, 2\pi)=\nu(\overline{z}_q, 2\pi)=2. \tag{31}$$

Таким образом, все решения $\overline{z}_q$ с коэффициентами c_1, c_2, c_3 из условия (26) обладают свойством

$$\sigma(\overline{z}_q)=\zeta(\overline{z}_q)=\nu(\overline{z}_q)=\sigma(z_q)=2^{-q},\quad q\in\mathbb{N}.$$

Последнее означает, что значения, задаваемые равенствами (24),(25), являются существенными.

Теорема полностью доказана.

Автор выражает глубокую благодарность профессору И.Н. Сергееву за постановку задачи и внимание к работе.

Примечания:

1. Сергеев И.Н. Определение и свойства характеристических частот линейного уравнения // Труды Семинара им. И.Г. Петровского. 2006. Вып. 25. С. 249-294.
2. Сергеев И.Н. Свойства характеристических частот линейных уравнений произвольного порядка // Труды Семинара им. И.Г. Петровского. 2013. Вып. 29. С. 414-442.
3. Сергеев И.Н. Определение полных частот решений линейного уравнения // Дифференциальные уравнения. 2008. Т. 44, № 11. С. 1577.
4. Бурлаков Д.С., Цой С.В. Равенство полной и векторной частот решений линейной автономной системы // Дифференциальные уравнения. 2011. Т. 47, № 11. С. 1662-1663.
5. Сергеев И.Н. Метрически типичные и существенные значения показателей линейных систем // Дифференциальные уравнения. 2011. Т. 47, № 11. С. 1661-1662.
6. Сташ А.Х. Спектры полных и векторных частот линейных дифференциальных уравнений третьего порядка // Дифференциальные уравнения. 2012. Т. 48, № 6. С. 908.
7. Сташ А.Х. О множестве значений полных частот решений линейного уравнения // Дифференциальные уравнения. 2011. Т. 47, № 11. С. 1665.
8. Филиппов А.Ф. Введение в теорию дифференциальных уравнений. М.: Едиториал УРСС, 2004. 240 с.
9. Сергеев И.Н. Об управлении решениями линейного дифференциального уравнения. // Вестник Московского университета. Сер. 1. Математика. Механика. 2009. № 3. С. 25-33.

References:

1. Sergeev I.N. Definition and properties of characteristic frequencies of the linear equation // Works of Seminar of I.G. Petrovsky. 2006. Iss. 25. P. 249-294.
2. Sergeev I.N. Properties of characteristic frequencies of the linear equations of random order // Works of Seminar of I.G. Petrovsky. 2013. Iss. 29. P. 414-442.
3. Sergeev I.N. Determination of full frequencies of solutions of the linear equation // Differential equations. 2008. Vol. 44, No. 11. P. 1577.
4. Burlakov D.S., Tsoy S.V. Equality of full and vector frequencies of solutions of linear autonomous system // Differential equations. 2011. Vol. 47, No. 11. P. 1662-1663.
5. Sergeev I.N. Metricaally typical and essential values of indices of linear systems // Differential equations. 2011. Vol. 47, No. 11. P. 1661-1662.
6. Stash A.Kh. Spectra of full and vector frequencies of the linear differential tertiary equations // Differential equations. 2012. Vol. 48, No. 6. P. 908.
7. Stash A.Kh. On set of values of full frequencies of solutions of the linear equation // Differential equations. 2011. Vol. 47, No. 11. P. 1665.
8. Filippov A.F. Introduction in the theory of differential equations. M.: Editorial URSS, 2004. 240 pp.
9. Sergeev I.N. On control of solutions of the linear differential equation. // Bulletin of the Moscow University. Series 1. Mathematics. Mechanics. 2009. No. 3. P. 25-33.