УДК 512.64
ББК 22.143
К 59

Козлов В.А.
Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики и методики преподавания Армавирской государственной педагогической академии, Армавир, e-mail: shagin196@yandex.ru
Паланджянц Л.Ж.
Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики и системного анализа инженерно-экономического факультета Майкопского государственного технологического университета, Майкоп, e-mail: levonmgtu@rambler.ru

О вычислении криволинейного мультипликативного интеграла

(Рецензирована)

Аннотация
Предлагается метод вычисления криволинейного мультипликативного интеграла от матричных функций произвольного порядка. Интегрирование ведется вдоль прямоугольника на плоскости с помощью дифференциального представления соответствующего обыкновенного мультипликативного интеграла.
Ключевые слова*: мультипликативный интеграл, кривизна.*

Kozlov V.A.
Candidate of Physics and Mathematics, Assistant Professor of Department of Mathematics and Methodology of Teaching, Armavir State Pedagogical Academy, Armavir, e-mail: shagin196@yandex.ru
Palandzhyants L.Zh.
Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of Higher Mathematics and System Analysis Department, Engineering-Economics Faculty, Maikop State University of Technology, Maikop, ph. (8772) 57-03-53, e-mail: levonmgtu@rambler.ru

The computation of a curvilinear multiplicative integral

Abstract
The paper proposes a method to calculate the curvilinear multiplicative integral proceeding from matrix functions of any order. The integration is performed along a rectangle on the plane with the help of differential representation of the corresponding ordinary multiplicative integral.
Keywords*: multiplicative integral, curvature.*

В статье приводится метод вычисления криволинейного мультипликативного интеграла вдоль замкнутой кривой на плоскости, основанный на дифференциальном представлении обыкновенного мультипликативного интеграла. Основные понятия теории мультипликативного интеграла изложены в работах [1-6].

Мультипликативные интегралы

$$\int_a^{\cup b} E + A(t)dt, \tag{1}$$

$$\int_a^{\cap b} E + A(t)dt, \tag{2}$$

где $A(t)$ – матричная функция произвольного порядка, называют прямым и обратным.

Связь между прямым и обратным мультипликативными интегралами задается формулой

$$\left(\int_a^{\cup b} E + A(t)dt\right)^{-1} = \int_a^{\cap b} E - A(t)dt\,. \qquad (3)$$

Для вычисления прямого мультипликативного интеграла применяется следующее интегральное представление, известное как матрицант соответствующей системы линейных дифференциальных уравнений:

$$Y(t) = E + \int_a^t A(t)dt + \int_a^t\left(\int_a^\tau A(s)ds)\right)A(\tau)d\tau + \cdots.$$

Для обратного мультипликативного интеграла имеет место равенство

$$Y(t) = E + \int_a^t A(t)dt + \int_a^t A(\tau)\int_a^\tau A(s)dsd\tau + \cdots.$$

Лемма 1. Для мультипликативного интеграла (1) имеет место следующее дифференциальное представление:

$$Y(t) = E + A\cdot t + \left(A' - A^2\right)\frac{t^2}{2} + \left(A'' - 2A\cdot A' - A'\cdot A + A^3\right)\frac{t^3}{3!} + \cdots + A_n(t)\frac{t^n}{n!} + \cdots, \qquad (4)$$

где $A_n = A_{n-1}\cdot A(t) - A'_{n-1}$, $A_0 = E$ при соответствующих предположениях о дифференцируемости подынтегральной функции $A(t)$.

Доказательство. Рассмотрим задачу Коши для матричного дифференциального уравнения первого порядка

$$\frac{dY}{dt} = YA(t)\,, \qquad Y(t_0) = E\,, \qquad (5)$$

где $A(t)$ – известная матричная функция, $Y = Y(t)$ – искомая матричная функция, определенные при $t \ge t_0$, E – единичная матрица. Будем считать матрицу $A(t)$ бесконечно дифференцируемой и ограниченной.

Из уравнения (5) получаем:

$$\frac{dY^{-1}}{dt} = -A(t)Y^{-1}\,, \qquad Y^{-1}(t_0) = E\,. \qquad (6)$$

Проинтегрируем равенство (6) по частям, учитывая уравнение

$$Y^{-1}(t_0) = EY^{-1} - E = -A(t)Y^{-1}t + \int\frac{d}{dt}\left(AY^{-1}\right)tdt = -A(t)Y^{-1}t + \int\left(A^2 - \frac{dA}{dt}\right)Y^{-1}tdt\,.$$

Продолжая процесс интегрирования по частям в силу уравнения (6), получаем ряд

$$Y^{-1} - E = -A(t)Y^{-1}t + \left(A^2 - \frac{dA}{dt}\right)Y^{-1}\frac{t^2}{2} - \left(A^3 - 2A'A + AA' + A''\right)Y^{-1}\frac{t^3}{3!} + \cdots. \qquad (7)$$

Умножим обе части уравнения (7) на Y справа и вычислим $Y(t)$. Тогда получаем равенство (4):

$$Y(t) = E + A\cdot t + \left(A^2 - A'\right)\frac{t^2}{2} + \left(A^3 - 2A\cdot A' - A'\cdot A + A''\right)\frac{t^3}{3!} + \cdots + A_n(t)\frac{t^n}{n!} + \cdots,$$

где $A_n(t) = A_{n-1}(t)A(t) - A'_{n-1}(t)$, $n = 1,2,\dots$, $A_0(t) = E$.

Если ряд (4) сходится, то он является решением задачи (5). Лемма 1 доказана.

Лемма 2. Мультипликативный интеграл (2) имеет следующее дифференциальное представление:

$$Y(t) = E + At + \left(A^2 - A'\right)\frac{t^2}{2} + \left(A^3 - 2AA' - A'A + A''\right)\frac{t^3}{3!} + \dots + B_n\frac{t^n}{n!} + \dots, \tag{8}$$

где $B_n = AB_{n-1} - B'_{n-1}$, $B_0 = E$.

Доказательство проводится аналогично лемме 1.

Лемма 3. Произведение двух рядов с матричными коэффициентами вычисляется по формуле:

$$\sum_{m=0}^{\infty} Q_n \frac{y^m}{m!} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} P_n \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{n!}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i} Q_i P_{n-i} x^i y^{n-i}\right), \tag{9}$$

где $\binom{n}{i} = \dfrac{n!}{i!(n-i)!}$ – коэффициенты бинома Ньютона.

Доказательство проводится индукцией по n. Вычисления показывают, что справедливо следующее равенство:

$$\sum_{m=0}^{\infty} Q_n \frac{y^m}{m!} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} P_n \frac{x^n}{n!} = E + \frac{1}{1!}\sum_{i=0}^{1}\binom{1}{i} Q_i P_{1-i} x^i y^{1-i} + \frac{1}{2!}\sum_{i=0}^{2}\binom{2}{i} Q_i P_{2-1} x^i y^{2-i} +$$

$$+ \frac{1}{3!}\sum_{i=0}^{3}\binom{3}{i} Q_i P_{3-i} x^i y^{3-i} + \dots + \frac{1}{n!}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i} Q_i P_{n-i} x^i y^{n-i} + \dots,$$

откуда и следует утверждение леммы 3.

Лемма 4. Произведение двух рядов от двух переменных с матричными коэффициентами вычисляется по формуле:

$$\sum_{i,j=0}^{\infty} A_{ij} x^i y^j \cdot \sum_{i,j=0}^{\infty} B_{ij} x^i y^j = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{n!}\sum_{i,j=0}^{i+j=n} C_{ij} x^i y^i\right), \tag{10}$$

где $C_{ij} = \sum\limits_{k,s=0}^{i,j}\binom{n}{k+s} \cdot A_{ks} B_{n-k,n-s}$.

Доказательство проводится индукцией по n.

Рассмотрим криволинейный мультипликативный интеграл второго рода

$$\overset{\frown}{\int_c} E + P(x,y)dx + Q(x,y)dy. \tag{11}$$

Вычислим приближенно интеграл (11), считая, что кривая c ограничивает область достаточно малой площади.

Для вычисления интеграла (11) воспользуемся дифференциальным представлением мультипликативного интеграла, данным в лемме 1. Это необходимо, поскольку алгебраическая структура подынтегральной матричной функции неизвестна и невозможно применить алгебраические методы вычисления мультипликативного интеграла, используя структуру матричной функции.

Теорема. Криволинейный мультипликативный интеграл (11) имеет следующее представление в виде ряда:

$$\overset{\frown}{\int\limits_{c}} E + Pdx + Qdy = \sum_{i,j=0}^{\infty} K_{ij} x^i y^j , \tag{12}$$

где c – прямоугольник на плоскости с вершинами в точках $(0,0)$, $(x,0)$, (x,y), $(0,y)$; K_{ij} – матричные функции, зависящие от P и Q, и их производных по переменным x и y:

$$K_{ij} = \frac{1}{(i+j)!} \sum_{k,s=0}^{i+j} \binom{i+j}{k+s} \cdot \tilde{A}_{ks} A_{i+j-k,i+j-s} ,$$

$$A_{ij} = \frac{1}{(i+j)!} \sum_{i,j=0}^{i+j} \binom{i+j}{i} \cdot Q_i P_j , \qquad \tilde{A}_{ij} = \frac{1}{(i+j)!} \sum_{i,j=0}^{i+j} \binom{i+j}{i} \cdot \tilde{Q}_i \tilde{P}_j ,$$

$$P_n(x,0) = P(x,0) P_{n-1}(x,0) - \frac{\partial P_{n-1}(x,0)}{\partial x}, \quad n = 1,2,\dots, \quad P_0(x,0) = E .$$

$$Q_n(x,y) = Q(x,y) Q_{n-1}(x,y) - \frac{\partial Q_{n-1}(x,y)}{\partial y}, \quad n = 1,2,\dots, \quad Q_0(x,y) = E .$$

$$\tilde{P}_n(x,y) = P(x,y) \tilde{P}_{n-1}(x,y) - \frac{\partial \tilde{P}_{n-1}(x,y)}{\partial x}, \quad n = 1,2,\dots, \quad P_0(x,y) = E ;$$

$$\tilde{Q}_n(0,y) = Q(0,y) \tilde{Q}_{n-1}(0,y) - \frac{\partial \tilde{Q}_{n-1}(0,y)}{\partial y}, \quad n = 1,2,\dots, \quad Q_0(0,y) = E .$$

Доказательство. Вычисляя интеграл по сторонам прямоугольника, получим разложение криволинейного интеграла в произведение четырех обыкновенных мультипликативных интегралов:

$$\overset{\frown}{\int\limits_{c}} E + Pdx + Qdy = \overset{\frown}{\int\limits_{y}^{0}} E + Q(0,y)dy \cdot \overset{\frown}{\int\limits_{x}^{0}} E + P(x,y)dx \cdot \overset{\frown}{\int\limits_{0}^{y}} E + Q(x,y)dy \cdot \overset{\frown}{\int\limits_{0}^{x}} E + P(x,0)dx . \tag{13}$$

Каждый из четырех обыкновенных мультипликативных интегралов в (12) может быть вычислен с помощью формулы (8) из леммы 2.

Воспользуемся формулой (8). Тогда

$$\overset{\frown}{\int\limits_{0}^{x}} E + P(x,0)dx = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x,0) \frac{x^n}{n!} , \tag{14}$$

где $P_n(x,0) = P(x,0) P_{n-1}(x,0) - \dfrac{\partial P_{n-1}(x,0)}{\partial x}$, $n = 1,2,\dots,$ $P_0(x,0) = E$.

Аналогично для второго интеграла из равенства (11) получаем

$$\overset{\frown}{\int\limits_{0}^{y}} E + Q(x,y)dx = \sum_{m=0}^{\infty} Q_n(x,y) \frac{y^m}{m!} . \tag{15}$$

где $Q_n(x,y) = Q(x,y)Q_{n-1}(x,y) - \dfrac{\partial Q_{n-1}(x,y)}{\partial y}$, $n = 1,2,\dots$, $Q_0(x,y) = E$.

Теперь вычислим произведение интегралов (14) и (15).

$$\stackrel{\frown}{\int_0^y} E + Q(x,y)dy \cdot \stackrel{\frown}{\int_0^x} E + P(x,0)dx = \sum_{m=0}^{\infty} Q_n(x,y)\frac{y^m}{m!} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x,0)\frac{x^n}{n!}.$$

Применяя лемму 3, получаем

$$\sum_{m=0}^{\infty} Q_n(x,y)\frac{y^m}{m!} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x,0)\frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{n!}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i} Q_i P_{n-i} x^i y^{n-i}\right). \tag{16}$$

Вычислим теперь третий и четвертый интегралы из равенства (12). Согласно свойству мультипликативного интеграла и равенству (3), имеют место следующие соотношения:

$$\stackrel{\frown}{\int_x^0} E + P(x,y)dx = \stackrel{\smile}{\int_0^x} E - P(x,y)dx, \tag{17}$$

$$\stackrel{\frown}{\int_y^0} E + Q(0,y)dy = \stackrel{\smile}{\int_0^y} E - Q(0,y)dy. \tag{18}$$

Воспользуемся равенством (4) из леммы 1.

$$\stackrel{\smile}{\int_0^x} E - P(x,y)dx = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{P}_n(x,y)\frac{x^n}{n!}, \tag{19}$$

$$\stackrel{\smile}{\int_0^y} E - Q(0,y)dy = \sum_{m=0}^{\infty} \tilde{Q}_n(0,y)\frac{y^m}{m!}, \tag{20}$$

где $\tilde{P}_n(x,y) = P(x,y)\tilde{P}_{n-1}(x,y) - \dfrac{\partial \tilde{P}_{n-1}(x,y)}{\partial x}$, $n = 1,2,\dots$, $P_0(x,y) = E$;

$\tilde{Q}_n(0,y) = Q(0,y)\tilde{Q}_{n-1}(0,y) - \dfrac{\partial \tilde{Q}_{n-1}(0,y)}{\partial y}$, $n = 1,2,\dots$, $Q_0(0,y) = E$.

Тогда из равенств (17), (19) и (18), (20) получаем

$$\stackrel{\frown}{\int_0^x} E + P(x,y)dx = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{P}_n(x,y)\frac{x^n}{n!}, \tag{21}$$

$$\stackrel{\frown}{\int_0^y} E + Q(0,y)dy = \sum_{m=0}^{\infty} \tilde{Q}_n(0,y)\frac{y^m}{m!}. \tag{22}$$

Произведение интегралов (21) и (22) равно

$$\overset{y}{\underset{0}{\widehat{\int}}} E+\tilde{Q}(0,y)dy\cdot\overset{x}{\underset{0}{\widehat{\int}}} E+\tilde{P}(x,y)dx=\sum_{m=0}^{\infty}\tilde{Q}_n(0,y)\frac{y^m}{m!}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\tilde{P}_n(x,y)\frac{x^n}{n!}.$$

Применяя лемму 3, получаем

$$\sum_{m=0}^{\infty}\tilde{Q}_n(0,y)\frac{y^m}{m!}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\tilde{P}_n(x,y)\frac{x^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{n!}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\tilde{Q}_i\tilde{P}_{n-i}x^i y^{n-i}\right). \tag{23}$$

Для окончательного вычисления исходного интеграла необходимо перемножить ряды (23) и (16).

Предварительно введем обозначения:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{n!}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}Q_iP_{n-i}x^iy^{n-i}\right)=\sum_{i,j=0}^{\infty}A_{ij}x^iy^j,\qquad \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{n!}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\tilde{Q}_i\tilde{P}_{n-i}x^iy^{n-i}\right)=\sum_{i,j=0}^{\infty}\tilde{A}_{ij}x^iy^j,$$

где $A_{ij}=\frac{1}{(i+j)!}\sum_{i,j=0}^{i+j}\binom{i+j}{i}\cdot Q_iP_j$, $\tilde{A}_{ij}=\frac{1}{(i+j)!}\sum_{i,j=0}^{i+j}\binom{i+j}{i}\cdot\tilde{Q}_i\tilde{P}_j$.

Тогда, применяя лемму 4, получаем

$$\sum_{i,j=0}^{\infty}\tilde{A}_{ij}x^iy\cdot\sum_{i,j=0}^{\infty}A_{ij}x^iy=\sum_{i,j=0}^{\infty}K_{ij}x^iy^j,$$

где $K_{ij}=\frac{1}{(i+j)!}\sum_{k,s=0}^{i+j}\binom{i+j}{k+s}\cdot\tilde{A}_{ks}A_{i+j-k,i+j-s}$.

Теорема доказана.

Следствие. Криволинейный мультипликативный интеграл вдоль прямоугольника c с вершинами в точках $(0,0)$, $(x,0)$, (x,y), $(0,y)$ на плоскости имеет вид:

$$\underset{c}{\widehat{\int}} E+Pdx+Qdy=E+\left(Q_x-P_y+QP-PQ\right)xy+\left([P_x,P]-4P_xP\right)\frac{x^3}{3!}+$$

$$+\left(-[P,[Q,P]]-2[P,Q_x]+[P,P_y]+[Q,P_x]+Q_{xx}-P_{xy}\right)\frac{x^2y}{2}+$$

$$+\left([Q,[P,Q]]+2[Q,P_y]-[P,Q_y]+[Q,Q_x]-P_{yy}+Q_{xy}\right)\frac{xy^2}{2}+\left([Q_y,Q]-4Q_yQ\right)\frac{y^3}{3!}+$$

$$+\left(-2P^4+6[[P_x,P],P]+[P^2,P_x]+2[P,P_{xx}]+4P_{xx}P-2(P_x)^2\right)\frac{x^4}{4!}+$$

$$+\left(-2Q^4+6[[Q_y,Q],Q]+[Q^2,Q_y]+2[Q,Q_{yy}]+4Q_{yy}Q-2(Q_y)^2\right)\frac{y^4}{4!}+$$

$$+\Big(2[[Q,P],Q]-[[Q,P^2],Q]+4[P_yP,Q]+2[[P_y,P],Q]+4[P_yQ,P]+[[Q,P_x],Q]-$$

$$-[[P,Q_y],P]+2[[Q_x,Q],P]+4[Q,P]Q_x+[Q_y,P_x]+[P,P_{yy}]+2[Q,P_{xy}]+$$

$$+2[Q_{xy},P]+2Q_{xx}Q+2PP_{yy}-4P_yQ_x-P_{xyy}+2Q_{xxy}\Big)\frac{x^2y^2}{4}+$$

$$+\Big([Q^3,P]+3[QP,Q]Q+3[[Q,P_y],Q]-[Q,[Q_x,Q]]+[[Q_y,Q],P]+3[QP,Q_y]+$$

$$+[Q_yQ,P]+3[Q_yP,Q]+[Q_y,Q_x]-2Q_yQ_x+3[Q,P_{yy}]+3[Q_y,P_y]+[Q_{xy},Q]-2QQ_{xy}-P_{yyy}\Big)\frac{xy^3}{3!}+$$

$$+\Big([Q,P^3]+3P[PQ,P]-3[P,[Q_x,P]]+[P_x,PQ]+[[P,P_y],P]+[[P_x,P],Q]+$$

$$+[QP_x,P]+[PP_x,Q]+[P_x,P_y]-2P_yP_x+3[Q_{xx},P]+3[Q_x,P_x]+6PP_yP-2P_{xy}P+O_{xxx}\Big)\frac{x^3y}{3!}+\cdots.$$

Таким образом, криволинейный мультипликативный интеграл вычислен с точностью до четвертой степени переменных интегрирования.

Примечания:

1. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М.: Наука, 1988. 552 с.
2. Мантуров О.В. Мультипликативный интеграл // Проблемы геометрии. 1990. Т. 22. С. 167-215.
3. Паланджянц Л.Ж. Геометрия мультипликативного интеграла. Майкоп: Качество, 1997. 94 с.
4. Козлов В.А., Паланджянц Л.Ж. Развитие теории мультипликативного интегрирования полиномиальных матричных функций. Майкоп: Магарин О.Г., 2010. 109 с.
5. Козлов В.А., Паланджянц Л.Ж. Мультипликативный интеграл и представления групп и алгебр Ли. Майкоп: Магарин О.Г., 2010. 92 с.
6. Козлов В.А., Паланджянц Л.Ж. Мультипликативный интеграл и вариационные задачи. Майкоп: Магарин О.Г., 2012. 104 с.

References:

1. Gantmakher F.R. Theory of matrices. M.: Nauka, 1988. 552 pp.
2. Manturov O.V. Multiplicative integral // Problems of geometry. 1990. Vol. 22. P. 167-215.
3. Palandzhyants L.Zh. Geometry of multiplicative integral. Maikop: Kachestvo, 1997. 94 pp.
4. Kozlov V.A., Palandzhyants L.Zh. Development of the theory of multiplicative integration of polynomial matrix functions. Maikop: Magarin O.G., 2010. 109 pp.
5. Kozlov V.A., Palandzhyants L.Zh. Multiplicative integral and representations of Lie groups and algebras. Maikop: Magarin O.G., 2010. 92 pp.
6. Kozlov V.A., Palandzhyants L.Zh. Multiplicative integral and variational problems. Maikop: Magarin O.G., 2012. 104 pp.