УДК 517.925
ББК 22.161.6
Р 65

Ройтенберг В.Ш.
Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики Ярославского государственного технического университета, Ярославль, e-mail: vroitenberg@mail.ru

О бифуркациях замкнутых траекторий гамильтоновых систем на плоскости

(*Рецензирована*)

Аннотация
Рассматривается типичная трехпараметрическая деформация гамильтоновой системы на плоскости в окрестности ее замкнутой траектории. Из этой траектории рождается либо тройной цикл, либо двойной и грубый циклы, либо три грубых цикла.
Ключевые слова: *гамильтоновы системы на плоскости, трехпараметрические деформации, предельные циклы.*

Roytenberg V.Sh.
Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of Higher Mathematics Department, Yaroslavl State Technical University, Yaroslavl, e-mail: vroitenberg@mail.ru

On bifurcations of closed orbits of planar Hamiltonian systems

Abstract
The paper examines a typical three-parameter deformation of planar Hamiltonian system in neighborhood of its closed orbit. Either triple cycle or double cycle and rough cycles or three rough cycles are born from this orbit.
Keywords: *planar Hamiltonian systems, three-parameter deformations, limit cycles.*

К динамическим системам на плоскости, близким к гамильтоновым, приводит ряд задач теории колебаний. Теорема Понтрягина [1, 2, с. 427] дает достаточные условия рождения грубого предельного цикла из замкнутой траектории гамильтоновой системы при малых однопараметрических возмущениях этой системы. Бифуркации в окрестностях замкнутой траектории, петли сепаратрисы седла и сепаратрисного контура «восьмерка» гамильтоновой системы при малых двухпараметрических возмущениях изучались, соответственно, в работах [3-5]. Здесь мы исследуем бифуркации в окрестности замкнутой траектории гамильтоновой системы при малых трехпараметрических возмущениях системы.

Пусть на плоскости задана гамильтонова система с функцией Гамильтона H класса C^∞:

$$\dot{x} = X_0(x), \tag{1}$$

где

$$X_0(x_1, x_2) = \left(-\frac{\partial H}{\partial x_2}(x_1, x_2), \frac{\partial H}{\partial x_1}(x_1, x_2)\right).$$

Предположим, что h_0 – некритическое значение функции H и одна из связных компонент – Γ_0 линии уровня $H(x_1, x_2) = h_0$ компактна. Тогда Γ_0 является замкнутой траекторией системы (1). Без ограничения общности в дальнейшем можно считать, что $h_0 = 0$. Рассмотрим динамическую систему, являющуюся трехпараметрической дефор-

мацией гамильтоновой системы (1):

$$\dot{x} = X_0(x) + \sum_{i=1}^{3} \mu_i X_i(x,\mu), \tag{2}$$

где $\mu = (\mu_1, \mu_2, \mu_3) \in \mathbb{R}^3$, $X_i = (p_i, q_i) \in C^\infty$ $(i = 1,2,3)$.

Мы можем выбрать C^∞-вложение $\eta: (-\bar{v}, \bar{v}) \times \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{R}^2$ с положительным якобианом так, чтобы кривые $\eta(\{h\} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z})$, $h \in (-\bar{v}, \bar{v})$, являлись замкнутыми траекториями системы (1), принадлежащими линии уровня $H(x) = 0$, причем $\Gamma(0) = \Gamma_0$, а ориентация на $\Gamma(h)$, индуцированная стандартной ориентацией $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, совпадала с ориентацией, заданной векторным полем X_0.

Обозначим

$$J_k(h) = \oint_{\Gamma(h)} (-q_k(x,0)\, dx_1 + p_k(x,0) dx_2) \ \ (k = 1,2,3),$$

$$W(h) := \begin{pmatrix} J_1(h) & J_2(h) & J_3(h) \\ J_1'(h) & J_2'(h) & J_3'(h) \\ J_1''(h) & J_2''(h) & J_3''(h) \end{pmatrix}.$$

Предположим, что $\det W(0) = 0$ и $rang W(0) = 2$, а $\frac{d}{dh} \det W(h)\,|_{h=0} \neq 0$. Сделав при необходимости линейную замену параметров μ, можно в дальнейшем считать, что

$$J_1(0) = J_1'(0) = J_1''(0) = J_3(0) = J_2'(0) = 0, J_2(0) < 0, J_3'(0) > 0, J_1'''(0) < 0. \tag{3}$$

Теорема. При условиях (3) существует такая окрестность U кривой Γ_0 и такие числа $\delta > 0$ и $k > 0$, что множество параметров

$$\mathrm{M} := \{\mu: 0 < |\mu_1| < \delta, |\mu_i/\mu_1| < k, \ \ i = 1,2\}$$

может быть представлено в виде объединения множеств (рис. 1):

$$B_0 = \{\mu \in \mathrm{M}: \mu_2 = \hat{k}_2(\mu_1)\mu_1, \mu_3 = \hat{k}_3(\mu_1), \ \mu_1 \neq 0\},$$

$$B_+ = \{\mu \in \mathrm{M}: \mu_2 = g_+(\mu_1, \mu_3/\mu_1)\mu_1, \ \mu_1 \neq 0\},$$

$$B_- = \{\mu \in \mathrm{M}: \mu_2 = g_-(\mu_1, \mu_3/\mu_1)\mu_1, \ \mu_1 \neq 0\},$$

$$\mathrm{M}_3 = \{\mu \in \mathrm{M}: g_-(\mu_1, \mu_3/\mu_1)\mu_1 < \mu_2 < g_+(\mu_1, \mu_3/\mu_1)\mu_1, \ \mu_1 \neq 0\}$$

и

$$\mathrm{M}_1 = \mathrm{M} \backslash (\mathrm{M}_3 \cup B_0 \cup B_+ \cup B_-),$$

где $\hat{k}_i: (-\delta, \delta) \to (-k, k)$ $(i = 2,3)$ – такие C^∞-функции, что

$$\hat{k}_i(0) = 0, \ g_-: G \to (-k, k) \ \text{ и } \ g_+: G \to (-k, k),$$

где $G = \{(\mu_1, k_3): |\mu_1| < \delta, \ \hat{k}_3(\mu_1) < k_3 < k\}$, такие C^∞-функции, что

$$g_-(\mu_1, k_3) < g_+(\mu_1, k_3),$$

$$\lim_{\tau \to +0} g_-(\mu_1, \hat{k}_3(\mu_1) + \tau) = \lim_{\tau \to +0} g_-(\mu_1, \hat{k}_3(\mu_1) + \tau) = \hat{k}_2(\mu_1),$$

$$\lim_{\tau \to +0} (g_-)'_{k_3}(\mu_1, \hat{k}_3(\mu_1) + \tau) = \lim_{\tau \to +0} (g_+)'_{k_3}(\mu_1, \hat{k}_3(\mu_1) + \tau) = a(\mu_1),$$

$$a(\cdot) \in C^{\infty}, a(0) = 0,$$

со следующими свойствами.

1. Если $\mu \in B_0$, то система (2) имеет в U единственную замкнутую траекторию – тройной цикл $L(\mu_1)$, устойчивый при $\mu_1 > 0$ и неустойчивый при $\mu_1 < 0$, при этом $\lim_{\mu_1 \to 0} L(\mu_1) = \Gamma_0$.

2. Если $\mu \in B_{\pm}$, то система (2) имеет в U только следующие замкнутые траектории: двойной цикл $L_1(\mu)$ и грубый цикл $L_2(\mu)$, устойчивый при $\mu_1 > 0$ и неустойчивый при $\mu_1 < 0$, при этом $\lim_{\mu \to 0} L_i(\mu) = \Gamma_0$, $i = 1,2$.

3. Если $\mu \in \mathrm{M}_3$, то система (2) имеет в U три грубых цикла $L_i(\mu)$, $\lim_{\mu \to 0} L_i(\mu) = \Gamma_0$, $i = 1,2,3$.

4. Если $\mu \in \mathrm{M}_1$, то система (2) имеет в U единственную замкнутую траекторию – грубый цикл $L(\mu)$, $\lim_{\mu \to 0} L(\mu) = \Gamma_0$, устойчивый при $\mu_1 > 0$ и неустойчивый при $\mu_1 < 0$.

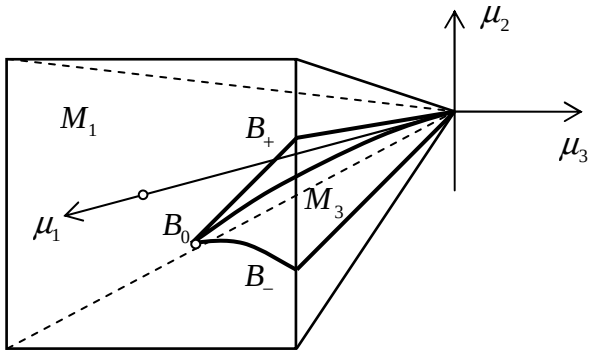

Рис. 1. Бифуркационная диаграмма

Доказательство. При достаточно малых $|\mu|$ на дуге $\eta((-\bar{v}/2, \bar{v}/2) \times \{0\})$ определено отображение последования по траекториям системы (2): $\eta(h,0) \mapsto \eta(f(h,\mu),0)$, $f \in C^{\infty}$. При $\mu = 0$ это отображение тождественное. Поэтому

$$f(h,\mu) - h = \mu_1 d_1(h,\mu) + \mu_2 d_2(h,\mu) + \mu_3 d_3(h,\mu),$$

где $d_i \in C^{\infty}$. Согласно [2, с. 425]

$$d_i(h,0) = \frac{J_i(h)}{\Delta(h)} \quad (i = 1,2,3), \tag{4}$$

где $\Delta(h) > 0$ – якобиан вложения η в точке $(h,0)$.

При $\mu_1 \neq 0$ перейдем к новым параметрам μ_1 и $k_i = \mu_i/\mu_1$ $(i = 2,3)$. Тогда

$$f(h,\mu) - h = \mu_1 \tilde{d}(h,\mu_1,k_2,k_3),$$

где

$$\tilde{d}(h,\mu_1,k_2,k_3) = d_1(h,\mu_1,k_2\mu_1,k_3\mu_1) + k_2 d_2(h,\mu_1,k_2\mu_1,k_3\mu_1) + k_3 d_3(h,\mu_1,k_2\mu_1,k_3\mu_1)) \tag{5}$$

Ясно, что нулю h функции $\tilde{d}(\cdot,\mu_1,k_2,k_3)$ соответствует замкнутая траектория системы (2), проходящая через точку $\eta(h,0)$.

Из (4) получаем, что

$$d'_{ih}(h,0) = J'_i(h)\Delta^{-1}(h) - J_i(h)\Delta^{-2}(h)\Delta'(h),$$

$$d''_{ihh}(h,0) = J''_i(h)\Delta^{-1}(h) + a_{i1}(h)J'_i(h) + a_{i0}J_i(h),$$

$$d'''_{ihhh}(h,0) = J'''_i(h)\Delta^{-1}(h) + b_{i2}(h)J''_i(h) + b_{i1}(h)J'_i(h) + b_{i0}(h)J_i(h),$$

где a_{ij} и b_{ij} – некоторые функции. Отсюда и из (3), (4) и (5) следует, что

$$\tilde{d}(0) = \tilde{d}'_h(0) = \tilde{d}''_{hh}(0) = 0, \tilde{d}'''_{hhh}(0) < 0, \tag{6}$$

$$\tilde{d}'_{k_2}(0) < 0, \tilde{d}'_{k_3}(0) = 0, \tilde{d}''_{hk_2}(0) = 0, \tilde{d}''_{hk_3}(0) > 0. \tag{7}$$

Ввиду (6) существуют такие числа $0 < h_- < h_+$ и $\nu > 0$, что

$$\operatorname{sgn} \tilde{d}(h,\mu_1,k_2,k_3) = -\operatorname{sgn} h \text{ при } h_- \le |h| \le h_+, |\mu_1| < \nu, |k_2| < \nu, |k_3| < \nu, \tag{8}$$

$$\tilde{d}'''_{hhh}(h,\mu_1,k_2,k_3) < 0 \text{ при } |h| \le h_+, |\mu_1| < \nu, |k_2| < \nu, |k_3| < \nu. \tag{9}$$

Обозначим $U := \eta((-h_+,h_+) \times \mathbb{R}/\mathbb{Z})$. Уменьшив при необходимости ν, мы можем считать, что при $|\mu_1| < \nu, |\mu_2/\mu_1| < \nu, |\mu_3/\mu_1| < \nu$ замкнутая траектория системы (2), проходящая через точку $\eta(h,0)$ $h \in (-h_-,h_-)$, целиком лежит в окрестности U. Отсюда и из (8) получаем, что при $|\mu_1| < \nu, |\mu_2/\mu_1| < \nu, |\mu_3/\mu_1| < \nu$ любая замкнутая траектория системы (2), принадлежащая U, проходит через точку $\eta(h,0)$, при некотором $h \in (-h_-,h_-)$. Из (9) следует, что сумма кратностей замкнутых траекторий, принадлежащих U, не превосходит трех.

Из (6) по теореме о неявной функции получаем, что существуют такие числа $\bar{\delta} \in (0,\nu)$, $h' \in (0,h_-/2), k' \in (0,\nu/2)$, и такие C^∞-функции $\hat{h}: (-\bar{\delta},\bar{\delta}) \to (-h',h')$ и $\hat{k}_i: (-\bar{\delta},\bar{\delta}) \to (-k',k')$, $i = 2,3$, что

$$\hat{h}(0) = 0, \hat{k}_2(0) = \hat{k}_3(0) = 0, \tag{10}$$

при $(h,\mu_1,k_2,k_3) \in (-h',h') \times (-\bar{\delta},\bar{\delta}) \times (-2k',2k') \times (-2k',2k')$

$$\tilde{d}(h,\mu_1,k_2,k_3) = \tilde{d}'_h(h,\mu_1,k_2,k_3) = \tilde{d}''_{hh}(h,\mu_1,k_2,k_3) = 0 \Leftrightarrow$$

$$h = \hat{h}(\mu_1), k_2 = \hat{k}_2(\mu_1), k_3 = \hat{k}_3(\mu_1). \tag{11}$$

Ввиду (7) мы можем считать $\bar{\delta}$ столь малым, что при всех $\mu_1 \in (-\bar{\delta},\bar{\delta})$ и $\xi(\mu_1) := (\hat{h}(\mu_1),\hat{k}_2(\mu_1),\hat{k}_3(\mu_1))$ существует матрица $A(\mu_1) = \begin{pmatrix} a_{11}(\mu_1) & a_{12}(\mu_1) \\ a_{21}(\mu_1) & a_{22}(\mu_1) \end{pmatrix}$ такая, что $A(\cdot) \in C^\infty, A(0) = I$ и

$$\begin{pmatrix} \tilde{d}'_{k_2}(\xi(\mu_1)) & \tilde{d}'_{k_3}(\xi(\mu_1)) \\ \tilde{d}''_{hk_2}(\xi(\mu_1)) & \tilde{d}''_{hk_3}(\xi(\mu_1)) \end{pmatrix} A(\mu_1) = \begin{pmatrix} \tilde{d}'_{k_2}(0) & 0 \\ 0 & \tilde{d}''_{hk_3}(0) \end{pmatrix}. \tag{12}$$

Перейдем к новым переменным χ, κ_2, κ_3:

$$h = \chi + \hat{h}(\mu_1),\ k_2 = a_{11}(\mu_1)\kappa_2 + a_{12}(\mu_1)\kappa_3 + \hat{k}_2(\mu_1),\ k_3 = a_{21}(\mu_1)\kappa_2 +$$

$$a_{22}(\mu_1)\kappa_3 + \hat{k}_3(\mu_1).$$

Если $\bar{\delta}$ достаточно мало, то функция

$$\tilde{\tilde{d}}(\chi,\mu_1,\kappa_2,\kappa_3) :=$$

$$= \tilde{d}(\chi + \hat{h}(\mu_1), a_{11}(\mu_1)\kappa_2 a_{12}(\mu_1)\kappa_3 + \hat{k}_2(\mu_1), a_{21}(\mu_1)\kappa_2 + a_{22}(\mu_1)\kappa_3 + \hat{k}_3(\mu_1))$$

определена при $(h, \mu_1, k_2, k_3) \in (-h', h') \times \left(-\bar{\delta}, \bar{\delta}\right) \times (-k', k') \times (-k', k')$.

Из (6), (7), (11) и (12) имеем:

$$\tilde{\tilde{d}}'_{k_2}(0,\mu_1,0,0) = \tilde{d}'_{k_2}(0) < 0, \qquad \tilde{\tilde{d}}'_{k_2}(0,\mu_1,0,0) = \tilde{d}''_{hk_3}(0) > 0,$$
$$\tilde{\tilde{d}}'_{k_3}(0,\mu_1,0,0) = \tilde{\tilde{d}}''_{\chi k_2}(0,\mu_1,0,0) = 0. \tag{13}$$

$$\tilde{\tilde{d}}(\chi,\mu_1,\kappa_2,\kappa_3) = \tilde{\tilde{d}}'_{\chi}(\chi,\mu_1,\kappa_2,\kappa_3) = \tilde{\tilde{d}}''_{\chi\chi}(\chi,\mu_1,\kappa_2,\kappa_3) = 0 \Leftrightarrow \chi = \kappa_2 = \kappa_3 = 0 \tag{14}$$

По теореме о неявной функции из (13) с учетом (14) получаем, что существуют такие числа $0 < \delta' < \min\{h', \bar{\delta}\}$, $\kappa' \in (0, k')$ и такие C^∞-функции $\hat{\kappa}_i : (-\delta', \delta') \times (-\delta', \delta') \to (-\kappa', \kappa')$, $i = 2,3$, что

$$\text{при } (\chi,\mu_1,\kappa_2,\kappa_3) \in (-\delta',\delta') \times (-\delta',\delta') \times (-\kappa',\kappa') \times (-\kappa',\kappa')$$
$$\tilde{\tilde{d}}(\chi,\mu_1,\kappa_2,\kappa_3) = \tilde{\tilde{d}}'_{\chi}(\chi,\mu_1,\kappa_2,\kappa_3) = 0 \Leftrightarrow \kappa_2 = \hat{\kappa}_2(\chi,\mu_1), \kappa_3 = \hat{\kappa}_3(\chi,\mu_1), \tag{15}$$

при этом

$$\hat{\kappa}_2(0,\mu_1) = \hat{\kappa}_3(0,\mu_1) = 0. \tag{16}$$

Из (15) получаем, что

$$\tilde{\tilde{d}}'_{\chi} + \tilde{\tilde{d}}'_{k_2}\hat{\kappa}'_{2\chi} + \tilde{\tilde{d}}'_{k_3}\hat{\kappa}'_{3\chi} = 0, \qquad \tilde{\tilde{d}}''_{\chi\chi} + \tilde{\tilde{d}}''_{\chi k_2}\hat{\kappa}'_{2\chi} + \tilde{\tilde{d}}''_{\chi k_3}\hat{\kappa}'_{3\chi} = 0, \tag{17}$$

где производные функций $\hat{\kappa}_2$ и $\hat{\kappa}_3$ вычислены в точке $(\chi, \mu_1) \in (-\delta', \delta') \times (-\kappa', \kappa')$, а производные функции $\tilde{\tilde{d}}$ в точке $\left(\chi, \mu_1, \hat{\kappa}_2(\chi,\mu_1), \hat{\kappa}_3(\chi,\mu_1)\right)$. При $\chi = 0$ с учетом (16) и (13) следует, что

$$\hat{\kappa}'_{2\chi}(0,\mu_1) = \hat{\kappa}'_{3\chi}(0,\mu_1) = 0. \tag{18}$$

Дифференцируя тождества (17), получаем тождества:

$$\tilde{\tilde{d}}''_{\chi\chi} + \tilde{\tilde{d}}''_{\chi\kappa_2}\hat{\kappa}'_{2\chi} + \tilde{\tilde{d}}''_{\chi\kappa_3}\hat{\kappa}'_{3\chi} + \tilde{\tilde{d}}''_{\kappa_2\kappa_2}\left(\hat{\kappa}'_{2\chi}\right)^2 + 2\tilde{\tilde{d}}''_{\kappa_2\kappa_3}\hat{\kappa}'_{2\chi}\hat{\kappa}'_{3\chi} +$$
$$+\tilde{\tilde{d}}''_{\kappa_3\kappa_3}\left(\hat{\kappa}'_{3\chi}\right)^2 + \tilde{\tilde{d}}'_{k_2}\hat{\kappa}''_{2\chi\chi} + \tilde{\tilde{d}}'_{k_3}\hat{\kappa}''_{3\chi\chi} = 0, \tag{19}$$

$$\tilde{\tilde{d}}'''_{\chi\chi\chi} + \tilde{\tilde{d}}'''_{\chi\chi\kappa_2}\hat{\kappa}'_{2\chi} + \tilde{\tilde{d}}'''_{\chi\chi\kappa_3}\hat{\kappa}'_{3\chi} + \tilde{\tilde{d}}'''_{\chi\kappa_2\kappa_2}\left(\hat{\kappa}'_{2\chi}\right)^2 + 2\tilde{\tilde{d}}'''_{\chi\kappa_2\kappa_3}\hat{\kappa}'_{2\chi}\hat{\kappa}'_{3\chi}$$
$$+\tilde{\tilde{d}}'''_{\chi\kappa_3\kappa_3}\left(\hat{\kappa}'_{3\chi}\right)^2 + \tilde{\tilde{d}}''_{\chi k_2}\hat{\kappa}''_{2\chi\chi} + \tilde{\tilde{d}}''_{\chi k_3}\hat{\kappa}''_{3\chi\chi} = 0,$$

из которых ввиду (16), (18), (13), (14) и (9) следует, что

$$\hat{\kappa}''_{2\chi\chi}(0,\mu_1) = 0, \;\; \hat{\kappa}''_{3\chi\chi}(0,\mu_1) = -\frac{\tilde{\tilde{d}}'''_{\chi\chi\chi}(0,\mu_1,0,0)}{\tilde{\tilde{d}}''_{\chi\kappa_3}(0,\mu_1,0,0)} > 0. \tag{20}$$

Дифференцируя (19), получаем тождество вида

$$\tilde{\tilde{d}}'''_{\chi\chi\chi} + 2\tilde{\tilde{d}}''_{\chi\kappa_2}\hat{\kappa}''_{2\chi\chi} + 2\tilde{\tilde{d}}''_{\chi\kappa_3}\hat{\kappa}''_{3\chi\chi} + \tilde{\tilde{d}}'_{k_2}\hat{\kappa}'''_{2\chi\chi\chi} + \tilde{\tilde{d}}'_{k_3}\hat{\kappa}'''_{3\chi\chi\chi} + N = 0,$$

где N – сумма произведений, один из сомножителей которых $\hat{\kappa}'_{2\chi}$ или $\hat{\kappa}'_{3\chi}$. Используя (16), (18), (20), (13) и (9), находим, что

$$\hat{\kappa}_{2\chi\chi\chi}'''(0,\mu_1) = \frac{\tilde{\tilde{d}}_{\chi\chi\chi}'''(0,\mu_1,0,0)}{\tilde{\tilde{d}}_{\kappa_2}'(0,\mu_1,0,0)} > 0. \qquad (21)$$

Из (20) – (21) следует, что существуют такие числа $h'' \in (0,\delta'), \delta'' \in (0,\delta'), \kappa'' \in (0,\kappa')$ и такие C^∞-функции

$$\chi_+ : (-\delta'',\delta'') \times (0,\delta'') \to (0,h''), \qquad \chi_- : (-\delta'',\delta'') \times (0,\delta'') \to (-h'',0),$$

$$\gamma_+ : (-\delta'',\delta'') \times (0,\delta'') \to (0,\kappa''), \quad \gamma_- : (-\delta'',\delta'') \times (0,\delta'') \to (-\kappa'',0),$$

что равномерно относительно $\mu_1 \in (-\delta'',\delta'')$

$$\lim_{k_3\to+0} \chi_\pm(\mu_1,\kappa_3) = 0, \qquad \lim_{k_3\to+0} \gamma_\pm(\mu_1,\kappa_3) = \lim_{k_3\to+0} (\gamma_\pm)'(\gamma_\pm)'_{\kappa_3}(\mu_1,\kappa_3) = 0, \qquad (22)$$

$$\begin{gathered}\text{при } (\chi,\mu_1,\kappa_2,\kappa_3) \in (0,h'') \times (-\delta'',\delta'') \times (-\kappa'',\kappa'') \times (-\delta'',\delta'') \\ \kappa_2 = \hat{\kappa}_2(\chi,\mu_1), \kappa_3 = \hat{\kappa}_3(\chi,\mu_1) \Leftrightarrow \chi = \chi_+(\mu_1,\kappa_3), \kappa_2 = \gamma_+(\mu_1,\kappa_3),\end{gathered} \qquad (23)$$

$$\begin{gathered}\text{при } (\chi,\mu_1,\kappa_2,\kappa_3) \in (-h'',0) \times (-\delta'',\delta'') \times (-\kappa'',\kappa'') \times (-\delta'',\delta'') \\ \kappa_2 = \hat{\kappa}_2(\chi,\mu_1), \kappa_3 = \hat{\kappa}_3(\chi,\mu_1) \Leftrightarrow \chi = \chi_-(\mu_1,\kappa_3), \kappa_2 = \gamma_-(\mu_1,\kappa_3).\end{gathered} \qquad (24)$$

Ввиду (10) и (12) мы можем выбрать такие числа $\delta \in (0,\delta'')$ и $k \in (0,\delta'')$, что если рассматривать уравнение $\kappa_2 = \gamma_\pm(\mu_1,\kappa_3)$, как уравнение поверхности в пространстве переменных (μ_1,k_2,k_3), то ее пересечение с областью, задаваемой неравенствами $|\mu_1| < \delta$, $|k_2| < k, |k_3| < k$, имеет уравнение $k_2 = g_\pm(\mu_1,k_3)$, $(\mu_1,k_3) \in G$, где $g_\pm$ – функции, со свойствами, сформулированными в утверждении теоремы. Определим теперь множества $\mathrm{M}, \mathrm{M}_1, \mathrm{M}_3, \mathrm{B}_0, \mathrm{B}_+, \mathrm{B}_-$ так, как это сделано в формулировке теоремы.

Утверждение 1 теоремы следует из (11) и (10).

Из (9), (14), (15), (23) и (24) получаем, что при $k_2 = g_\pm(\mu_1,k_3)$ функция $\tilde{d}(\cdot,\mu_1,k_2,k_3)$ имеет на интервале $(-h_-,h_-)$ двукратный нуль $h_1 = \hat{h}(\mu_1) + \chi_\pm(\mu_1,\kappa_3)$. Ввиду (8) она имеет на $(-h_-,h_-)$ еще один простой нуль h_2, в котором $\tilde{d}_h'(h_2,\mu_1,k_2,k_3) < 0$. Тем самым, имеем утверждение 2 теоремы.

В силу (15) при $\mu \in \mathrm{M}_1 \cup \mathrm{M}_3$ функция $\tilde{d}(\cdot,\mu_1,\mu_2/\mu_1,\mu_3/\mu_1)$ имеет на $(-h_-,h_-)$ только простые нули. По формуле конечных приращений, используя (13), получаем

$$\tilde{\tilde{d}}_{\chi\chi}''\big(\chi,\mu_1,\hat{\kappa}_2(\chi,\mu_1),\hat{\kappa}_3(\chi,\mu_1)\big) = \tilde{\tilde{d}}_{\chi\chi\chi}'''(\xi)\chi + \tilde{\tilde{d}}_{\chi\chi\kappa_2}'''(\xi)\hat{\kappa}_2(\chi,\mu_1) + \tilde{\tilde{d}}_{\chi\chi\kappa_3}'''(\xi)\hat{\kappa}_3(\chi,\mu_1), \qquad (25)$$

где $\xi = \big(\theta\chi,\mu_1,\theta\hat{\kappa}_2(\chi,\mu_1),\theta\hat{\kappa}_3(\chi,\mu_1)\big), \theta \in (0,1)$.

Из (25), (9), (22) и (23) следует, что при фиксированном μ_1 найдется такое $\varepsilon \in (0,\delta')$, что при всех $\chi \in (0,\varepsilon)$ будем иметь $\tilde{\tilde{d}}_{\chi\chi}''\big(\chi,\mu_1,\hat{\kappa}_2(\chi,\mu_1),\hat{\kappa}_3(\chi,\mu_1)\big) < 0$.

В силу (22) существует такое κ_3, что $0 < \chi_+(\mu_1,\kappa_3) < \varepsilon$. Пусть значения параметров $k_2 = g_+(\mu_1,k_3)$, k_3 соответствуют значениям параметров $\kappa_2 = \gamma_+(\mu_1,\kappa_3)$, κ_3.

Так как

$$\tilde{d}_{hh}''(h_1,\mu_1,g_+(\mu_1,k_3),k_3) = \tilde{\tilde{d}}_{\chi\chi}''\big(\chi,\mu_1,\hat{\kappa}_2(\chi,\mu_1),\hat{\kappa}_3(\chi,\mu_1)\big) \text{ при } \chi = \chi_+(\mu_1,\kappa_3),$$

то $\tilde{d}_{hh}''(h_1,\mu_1,g_+(\mu_1,k_3),k_3) < 0$.

Вследствие (13) мы можем считать, что

$$\tilde{d}_{k_2}'(h,\mu_1,k_2,k_3) < 0 \text{ при } h \in (-h_-,h_-) \text{ и } k_2 = g_+(\mu_1,k_3).$$

Но тогда найдется такое $\rho > 0$, что

$$g_-(\mu_1, k_3) < g_+(\mu_1, k_3) - \rho < g_+(\mu_1, k_3) + \rho < k$$

и функция $\tilde{d}(\cdot, \mu_1, \mu_2/\mu_1, \mu_3/\mu_1)$ при $\mu_3/\mu_1 = k_3, g_+(\mu_1, k_3) - \rho < \mu_2/\mu_1 < g_+(\mu_1, k_3)$, а потому и при всех $\mu \in \mathrm{M}_3$ имеет на $(-h_-, h_-)$ три простых нуля, при $\mu_3/\mu_1 = k_3$, $g_+(\mu_1, k_3) < \mu_2/\mu_1 < g_+(\mu_1, k_3) + \rho$, а потому и при всех $\mu \in \mathrm{M}_1$ – единственный простой нуль. Тем самым, получаем утверждения 3 и 4 теоремы.

Замечание. Рассмотрим теперь деформацию системы (1):

$$\dot{x} = X_0(x) + \sum_{i=1}^{i=n} \mu_i X_i(x, \mu) \text{ при } n > 3.$$

Будем считать что условия (3) по-прежнему выполнены. Тогда сохраняется и утверждение теоремы со следующими изменениями. Теперь

$$\mathrm{M} := \{\mu: 0 < |\mu_1| < \delta,\ |\mu_i/\mu_1| < k,\ \ i = 2,3,..,n\},$$

а в определении множеств $\mathrm{M}_1, \mathrm{M}_3, \mathrm{B}_0, \mathrm{B}_+, \mathrm{B}_-$ следует считать, что функции $\tilde{k}_1, \tilde{k}_2, \tilde{k}_3$, g_+ и g_- зависят от дополнительных переменных $k_j = \mu_j/\mu_1, j = 4,..,n$. Таким образом, в этом случае только три параметра $\mu_i, i = 1,2,3$ являются «существенными».

Примечания:

1. Понтрягин Л.С. О динамических системах, близких к гамильтоновым // Журнал экспериментальной и теоретической физики. 1934. Т. 4, № 9. С. 883-885.
2. Теория бифуркаций динамических систем на плоскости / А.А. Андронов, Е.А. Леонтович, И.И. Гордон, А.Г. Майер. М.: Наука, 1967. 488 с.
3. Ройтенберг В.Ш. О бифуркациях замкнутых траекторий при малых двухпараметрических возмущениях гамильтоновых систем на плоскости // Математика и ее приложения: межвуз. сб. науч. тр. СПб.: Изд-во СПГУВК, 2009. Вып. 2. С. 8-15.
4. Медведев В.С., Федоров Е.Л. О динамических системах, близких к гамильтоновым, с петлей сепаратрисы седла // Мат. сб. 1994. Т. 185, № 9. С. 95-108.
5. Ройтенберг В.Ш. О бифуркациях сепаратрисного контура «восьмерка» гамильтонова векторного поля при малых двухпараметрических возмущениях // Математика и математическое образование. Теория и практика: межвуз. сб. науч. тр. Ярославль: Изд-во ЯГТУ, 2010. Вып. 7. С. 43-60.

References:

1. Pontryagin L.S. On dynamic systems close to Hamiltonian systems // Journal of Experimental and Theoretical Physics. 1934. Vol. 4, No. 9. P. 883-885.
2. Theory of bifurcations of dynamic systems in a plane / A.A. Andronov, E.A. Leontovich, I.I. Gordon, A.G. Mayer. M.: Nauka, 1967. 488 pp.
3. Roytenberg V.Sh. On bifurcations of closed trajectories under small two-parameter perturbations of Hamiltonian systems in a plane // Mathematics and its applications: inter-higher school coll. of scient. works. SPb.: SPUVC publishing house, 2009. Iss. 2. P. 8-15.
4. Medvedev V.S., Fedorov E.L. On dynamic systems close to Hamiltonian systems with a saddle separatrix loop // Math. coll. 1994. Vol. 185, No. 9. P. 95-108.
5. Roytenberg V.Sh. On bifurcations of separatrix contour of «eight» of Hamiltonian vector field under small two-parameter perturbations // Mathematics and mathematical education. Theory and practice: inter-higher school coll. of scient. works. Yaroslavl: YaSTU publishing house, 2010. Iss. 7. P. 43-60.