

---

УДК 517.925  
ББК 22.161.6  
Р 65

**Ройтенберг В.Ш.**

*Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики Ярославского государственного технического университета, Ярославль, e-mail: vroitenberg@mail.ru*

**О бифуркациях замкнутых траекторий гамильтоновых систем на плоскости**  
(Рецензирована)

**Аннотация**

*Рассматривается типичная трехпараметрическая деформация гамильтоновой системы на плоскости в окрестности ее замкнутой траектории. Из этой траектории рождается либо тройной цикл, либо двойной и грубый циклы, либо три грубых цикла.*

**Ключевые слова:** гамильтоновы системы на плоскости, трехпараметрические деформации, предельные циклы.

**Roytenberg V.Sh.**

*Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of Higher Mathematics Department, Yaroslavl State Technical University, Yaroslavl, e-mail: vroitenberg@mail.ru*

**On bifurcations of closed orbits of planar Hamiltonian systems**

**Abstract**

*The paper examines a typical three-parameter deformation of planar Hamiltonian system in neighborhood of its closed orbit. Either triple cycle or double cycle and rough cycles or three rough cycles are born from this orbit.*

**Keywords:** planar Hamiltonian systems, three-parameter deformations, limit cycles.

К динамическим системам на плоскости, близким к гамильтоновым, приводит ряд задач теории колебаний. Теорема Понтрягина [1, 2, с. 427] дает достаточные условия рождения грубого предельного цикла из замкнутой траектории гамильтоновой системы при малых однопараметрических возмущениях этой системы. Бифуркации в окрестностях замкнутой траектории, петли сепаратрисы седла и сепаратрисного контура «восьмерка» гамильтоновой системы при малых двухпараметрических возмущениях изучались, соответственно, в работах [3-5]. Здесь мы исследуем бифуркации в окрестности замкнутой траектории гамильтоновой системы при малых трехпараметрических возмущениях системы.

Пусть на плоскости задана гамильтонова система с функцией Гамильтона  $H$  класса  $C^\infty$ :

$$\dot{x} = X_0(x), \tag{1}$$

где

$$X_0(x_1, x_2) = \left( -\frac{\partial H}{\partial x_2}(x_1, x_2), \frac{\partial H}{\partial x_1}(x_1, x_2) \right).$$

Предположим, что  $h_0$  – некритическое значение функции  $H$  и одна из связных компонент –  $\Gamma_0$  линии уровня  $H(x_1, x_2) = h_0$  компактна. Тогда  $\Gamma_0$  является замкнутой траекторией системы (1). Без ограничения общности в дальнейшем можно считать, что  $h_0 = 0$ . Рассмотрим динамическую систему, являющуюся трехпараметрической дефор-

мацией гамильтоновой системы (1):

$$\dot{x} = X_0(x) + \sum_{i=1}^3 \mu_i X_i(x, \mu), \quad (2)$$

где  $\mu = (\mu_1, \mu_2, \mu_3) \in \mathbb{R}^3$ ,  $X_i = (p_i, q_i) \in C^\infty$  ( $i = 1, 2, 3$ ).

Мы можем выбрать  $C^\infty$ -вложение  $\eta: (-\bar{v}, \bar{v}) \times \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}^2$  с положительным якобианом так, чтобы кривые  $\eta(\{h\} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z})$ ,  $h \in (-\bar{v}, \bar{v})$ , являлись замкнутыми траекториями системы (1), принадлежащими линии уровня  $H(x) = 0$ , причем  $\Gamma(0) = \Gamma_0$ , а ориентация на  $\Gamma(h)$ , индуцированная стандартной ориентацией  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ , совпадала с ориентацией, заданной векторным полем  $X_0$ .

Обозначим

$$J_k(h) = \oint_{\Gamma(h)} (-q_k(x, 0) dx_1 + p_k(x, 0) dx_2) \quad (k = 1, 2, 3),$$

$$W(h) := \begin{pmatrix} J_1(h) & J_2(h) & J_3(h) \\ J_1'(h) & J_2'(h) & J_3'(h) \\ J_1''(h) & J_2''(h) & J_3''(h) \end{pmatrix}.$$

Предположим, что  $\det W(0) = 0$  и  $\text{rang} W(0) = 2$ , а  $\frac{d}{dh} \det W(h) |_{h=0} \neq 0$ . Сделаем при необходимости линейную замену параметров  $\mu$ , можно в дальнейшем считать, что

$$J_1(0) = J_1'(0) = J_1''(0) = J_3(0) = J_2'(0) = 0, J_2(0) < 0, J_3'(0) > 0, J_1'''(0) < 0. \quad (3)$$

**Теорема.** При условиях (3) существует такая окрестность  $U$  кривой  $\Gamma_0$  и такие числа  $\delta > 0$  и  $k > 0$ , что множество параметров

$$M := \{\mu: 0 < |\mu_1| < \delta, |\mu_i/\mu_1| < k, i = 1, 2\}$$

может быть представлено в виде объединения множеств (рис. 1):

$$B_0 = \{\mu \in M: \mu_2 = \hat{k}_2(\mu_1)\mu_1, \mu_3 = \hat{k}_3(\mu_1), \mu_1 \neq 0\},$$

$$B_+ = \{\mu \in M: \mu_2 = g_+(\mu_1, \mu_3/\mu_1)\mu_1, \mu_1 \neq 0\},$$

$$B_- = \{\mu \in M: \mu_2 = g_-(\mu_1, \mu_3/\mu_1)\mu_1, \mu_1 \neq 0\},$$

$$M_3 = \{\mu \in M: g_-(\mu_1, \mu_3/\mu_1)\mu_1 < \mu_2 < g_+(\mu_1, \mu_3/\mu_1)\mu_1, \mu_1 \neq 0\}$$

и

$$M_1 = M \setminus (M_3 \cup B_0 \cup B_+ \cup B_-),$$

где  $\hat{k}_i: (-\delta, \delta) \rightarrow (-k, k)$  ( $i = 2, 3$ ) – такие  $C^\infty$ -функции, что

$$\hat{k}_i(0) = 0, g_-: G \rightarrow (-k, k) \text{ и } g_+: G \rightarrow (-k, k),$$

где  $G = \{(\mu_1, k_3): |\mu_1| < \delta, \hat{k}_3(\mu_1) < k_3 < k\}$ , такие  $C^\infty$ -функции, что

$$g_-(\mu_1, k_3) < g_+(\mu_1, k_3),$$

$$\lim_{\tau \rightarrow +0} g_-(\mu_1, \hat{k}_3(\mu_1) + \tau) = \lim_{\tau \rightarrow +0} g_-(\mu_1, \hat{k}_3(\mu_1) + \tau) = \hat{k}_2(\mu_1),$$

$$\lim_{\tau \rightarrow +0} (g_-)'_{k_3}(\mu_1, \hat{k}_3(\mu_1) + \tau) = \lim_{\tau \rightarrow +0} (g_+)'_{k_3}(\mu_1, \hat{k}_3(\mu_1) + \tau) = a(\mu_1),$$

$$a(\cdot) \in C^\infty, a(0) = 0,$$

со следующими свойствами.

1. Если  $\mu \in B_0$ , то система (2) имеет в  $U$  единственную замкнутую траекторию – тройной цикл  $L(\mu_1)$ , устойчивый при  $\mu_1 > 0$  и неустойчивый при  $\mu_1 < 0$ , при этом  $\lim_{\mu_1 \rightarrow 0} L(\mu_1) = \Gamma_0$ .

2. Если  $\mu \in B_\pm$ , то система (2) имеет в  $U$  только следующие замкнутые траектории: двойной цикл  $L_1(\mu)$  и грубый цикл  $L_2(\mu)$ , устойчивый при  $\mu_1 > 0$  и неустойчивый при  $\mu_1 < 0$ , при этом  $\lim_{\mu \rightarrow 0} L_i(\mu) = \Gamma_0, i = 1, 2$ .

3. Если  $\mu \in M_3$ , то система (2) имеет в  $U$  три грубых цикла  $L_i(\mu)$ ,  $\lim_{\mu \rightarrow 0} L_i(\mu) = \Gamma_0, i = 1, 2, 3$ .

4. Если  $\mu \in M_1$ , то система (2) имеет в  $U$  единственную замкнутую траекторию – грубый цикл  $L(\mu)$ ,  $\lim_{\mu \rightarrow 0} L(\mu) = \Gamma_0$ , устойчивый при  $\mu_1 > 0$  и неустойчивый при  $\mu_1 < 0$ .

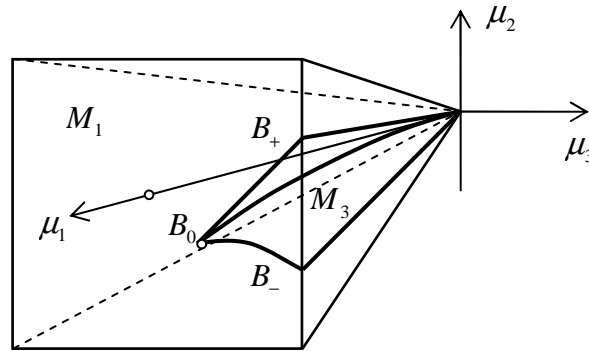


Рис. 1. Бифуркационная диаграмма

**Доказательство.** При достаточно малых  $|\mu|$  на дуге  $\eta((-\bar{v}/2, \bar{v}/2) \times \{0\})$  определено отображение последования по траекториям системы (2):  $\eta(h, 0) \mapsto \eta(f(h, \mu), 0)$ ,  $f \in C^\infty$ . При  $\mu = 0$  это отображение тождественное. Поэтому

$$f(h, \mu) - h = \mu_1 d_1(h, \mu) + \mu_2 d_2(h, \mu) + \mu_3 d_3(h, \mu),$$

где  $d_i \in C^\infty$ . Согласно [2, с. 425]

$$d_i(h, 0) = \frac{J_i(h)}{\Delta(h)} \quad (i = 1, 2, 3), \quad (4)$$

где  $\Delta(h) > 0$  – якобиан вложения  $\eta$  в точке  $(h, 0)$ .

При  $\mu_1 \neq 0$  перейдем к новым параметрам  $\mu_1$  и  $k_i = \mu_i / \mu_1$  ( $i = 2, 3$ ). Тогда

$$f(h, \mu) - h = \mu_1 \check{d}(h, \mu_1, k_2, k_3),$$

где

$$\check{d}(h, \mu_1, k_2, k_3) = d_1(h, \mu_1, k_2 \mu_1, k_3 \mu_1) + k_2 d_2(h, \mu_1, k_2 \mu_1, k_3 \mu_1) + k_3 d_3(h, \mu_1, k_2 \mu_1, k_3 \mu_1) \quad (5)$$

Ясно, что нулю  $h$  функции  $\check{d}(\cdot, \mu_1, k_2, k_3)$  соответствует замкнутая траектория системы (2), проходящая через точку  $\eta(h, 0)$ .

Из (4) получаем, что







